Real Analysis
Volume 3

3rd year degree honours course

Dr. Arnab Chakraborty

Associate Professor
Indian Statistical Institute, Kolkata

Formerly

Guest Faculty
Ramakrishna Mission Vidyamandira, Belur

⋄

Guest Faculty
Ramakrishna Vivekananda University, Belur

⋄

Assistant Professor
St. Xavier's College, Kolkata

Levant Publications
18-B, Shyamacharan De Street
Kolkata 700 073

সূচী

VII. Power series 339

VIII. Bounded variation 385

ছাত্রছাত্রীদের প্রতি

আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই সিরিজে real analysis-এর উপর বই আছে তিন খণ্ড। আগের খণ্ডদুটি ইতিমধ্যেই দ্বিতীয় সংস্করণে পা রেখেছে, এবার তৃতীয় খণ্ডটিও করল। এই সিরিজের সবগুলো বইই লেখা হয়েছে সেই সব ছাত্রছাত্রীদের কথা মাথায় রেখে যারা ইংরাজী মাধ্যমে পড়ছ, কিন্তু ইংরাজীর চেয়ে যাদের বাংলা বুঝতে বেশী সুবিধা হয়। যাবতীয় technical term ইত্যাদি ইংরাজীতেই লেখা, উত্তরগুলোও তাই। শুধু বোঝানো অংশটুকু বাংলায়।

যাদের ইংরাজী বুঝতে অসুবিধা হয় না, তারাও অনেক সময়ে বুঝতে পারো না যে একটা অংকের উত্তর কি করে ইংরাজীতে লিখতে হয়। অংক লেখার ইংরাজী আর সাধারণ ইংরাজী ঠিক এক জিনিস নয়। কি করে একটা উত্তর ইংরাজীতে গুছিয়ে লিখতে হয় সেটা এই বইতে handwriting-এর মত লিখে দেখানো আছে।

বইটায় প্রচুর ছবি দেওয়া আছে। একটা অংকের উত্তর জানা থাকলে লিখে ফেলা কঠিন নয়। কঠিন হল উত্তরটা নিজে নিজে ভেবে বার করা। ছবিগুলো এই কাজে অপরিহার্য। এই বইয়ের অন্যতম উদ্দেশ্য হল তোমাকে ছবি এঁকে অংক করতে উৎসাহিত করা। অংক করার সময়ে যত পারবে ছবি আঁকবে, এমন কি পরীক্ষার খাতাতেও। ওতে সময় নষ্ট হয় না, বরং সময় বাঁচে।

সূচীপত্রে বাঁটুলের মাথা কেন?

এই বইটার নানারকম গুণের মধ্যে একটাই বড় দোষ--একটু মোটা। আসলে এখানে অনেকগুলো দরকারী জিনিস আলোচনা করতে হয়েছে, তার উপরে দশ বছরের যাবতীয় প্রশ্ন আলোচনা করতে গিয়ে মোটা না করে পথ ছিল না। কিন্তু তোমাদের মধ্যে যারা মোটা বই দেখলে দমে যাও, তারা হয়তো ভাবতে শুরু করেছ--এত সব তো পড়া যাবে না, কি কি বাদ দেওয়া যায়! সেই কাজটা সহজ করার জন্যই বাঁটুল হাজির--

যে যে শিরোনামের পাশে বাঁটুলের ছবি দেখবে সেগুলোর জন্য একটু বেশী শক্তি দরকার (বা অপেক্ষাকৃত কম প্রাসঙ্গিক)। এদের বাদ দিতে চাইলে বাদ দিতে পারো, তাতে বাকি অংশ পড়তে অসুবিধা হবে না। পুরো বইটা পড়তে যাদের আপত্তি নেই, তারাও প্রথমবার পড়ার সময়ে ওই অংশগুলো বাদ দিয়ে যেও, পরে ফিরে এসে ওইগুলো পড়ে নিও।

সূচীপত্রের দিকে তাকালেই দেখবে পুরো বইটাকে day1, day2,... এইভাবে দিনে দিনে ভাগ করা আছে। মোটামুটিভাবে এক দিনের কাজ বলে যতটা দিয়েছি, সেটা হল কোচিং ক্লাসের দুই ঘন্টার পড়া। যেগুলো ইংরাজীতে লেখা সেগুলো যেন মাষ্টারমশাই বোর্ডে লেখাচ্ছেন, আর বাংলাগুলো মুখে বলছেন।

10 years' questions

যখন যে অধ্যায়টা শিখলে তখন তখনই সেই অধ্যায়ের 10 years' question-গুলো কষে ফেলা বুদ্ধিমানের কাজ। ঠিক এই নীতিতেই এই বইটা লেখা। প্রতিটি অধ্যায়ে সেই বিষয়ের গত দশ বছরের সব প্রশ্নের বিশদ উত্তর আলোচনা করা আছে। এমন কি ভুল অংকগুলোও বাদ নেই, সেগুলো কেন ভুল সেটাও বোঝানো আছে।

এই বইয়ের 10 years' question-গুলো নিয়েছি বাজারে প্রচলিত সংকলনগুলো থেকে। সুতরাং ভুল প্রশ্নগুলোর ভুলের দায় কতটা প্রশ্নকর্তার আর কতটা সংকলনকারীর সেটা জানি না। এই বইটাকে যথাসম্ভব ত্রুটিমুক্ত রাখতে চেষ্টা করেছি। ছাত্রছাত্রী থেকে শুরু করে মাষ্টারমশায়রা পর্যন্ত অনেকেই প্রথম সংস্করণের নানারকম ভুলত্রুটি বার করে সাহায্য করেছেন। বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য রামিজ, যে প্রথম সংস্করণ প্রকাশের প্রথম দিনেই প্রথম ভুলটা ধরেছিল। অধ্যাপক অশোক নন্দ অত্যন্ত উৎসাহ নিয়ে নানা মুদ্রনপ্রমাদ বার করে ফোন মারফত জানিয়েছিলেন। তবে প্রতিটা পাতা খুঁটিয়ে খুঁটিয়ে পড়ে নানারকম পরামর্শ দিয়ে এ বইয়ের উৎকর্ষসাধনে যার ভূমিকা সর্বাধিক তিনি হলেন কিশলয় সাহা। এদের সব্বাইকে অনেক অনেক ধন্যবাদ। অবশ্য এত কিছুর পরও কিছু ভুল থেকে যাওয়া অসম্ভব নয়। সেইসব ফেরারি ভুলদের সন্ধান পেলে, বা অন্য কারণে যোগাযোগ করতে চাইলে email (arnabc74@gmail.com) বা ফোন (9231542600) ব্যবহার করতে পারো।

অর্ণব চক্রবর্তী

Chapter I
Compact sets

DAY 1
গোড়ার কথা

Real analysis-এ আমরা $\mathbb{R}$-এর বিভিন্ন subset নিয়ে কাজ করি। বিভিন্ন subset-এর বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য থাকে, কোনোটা open হয়, কোনোটা closed হয়, কোনোটা bounded, এইরকম। এইখানে আমরা এই ধরণের আরেকটা বৈশিষ্ট্য নিয়ে আলোচনা করব, যার নাম compactness.
একটা set $A \subseteq \mathbb{R}$-কে কখন compact বলে, সেটা বলার আগে পুরোনো কয়েকটা definition একটু মনে করে নিই। প্রথমে মনে করি open set-এর কথা। কোনো $U \subseteq \mathbb{R}$-কে আমরা open বলব যদি

$$\forall a \in U \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(a, \epsilon) \subseteq U$$

হয়।
একটা set $V \subseteq \mathbb{R}$-কে closed কখন বলে? এর দুটো definition আছে, যারা দেখতে আলাদা হলেও আসলে সমার্থক। প্রথম definition অনুযায়ী V-কে closed বলব যদি V^c open হয়। দ্বিতীয় definition অনুযায়ী V-কে closed বলব যদি V-এর সব limit point-ই V-এর ভিতরেই থাকে।
একটা set $B \subseteq \mathbb{R}$-কে বলে bounded, যদি

$$\exists M > 0 \quad B \subseteq [-M, M].$$

Exercise 1: এদের মধ্যে কারা closed বল। আর কারা bounded?
(1) $\mathbb{N}$ **(2)** $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ **(3)** $\mathbb{Q}^c \cap [0,1]$ **(4)** $\{1,2,3\}$ **(5)** $[0,1]$ **(6)** $[0,\infty)$
■

1.1 সবচেয়ে সহজ definition

এবার compactness-এর প্রসঙ্গে ফেরা যাক। কোনো $A \subseteq \mathbb{R}$-কে কখন compact বলা হবে তার definition নানাভাবে দেওয়া যায়। এই definition-গুলো দেখতে সম্পূর্ণ আলাদা হলেও আসলে সমার্থক। প্রথম definition-টা সবচেয়ে সোজা--যদি A closed এবং bounded হয়, তবেই A-কে compact বলব।

DEFINITION: Compact (simple defn)
$A \subseteq \mathbb{R}$ is called **compact** if it is closed and bounded.

Exercise 2: এরা কি compact?
(1) $[0,1]$ **(2)** $\mathbb{N}$ **(3)** $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, **(4)** $\{1,2,...,n\}$, **(5)** $\mathbb{R}$-এর যে কোনো finite subset, **(6)** $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$, **(7)** $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.
■

Example 1: State true/false with justification: If $A = (-1,1)$ and $B = \{\pm 3, \pm 2, \pm 1\}$, then $A \cup B$ is compact.[3]
(2006.1a)
SOLUTION: আমরা একে একে পরীক্ষা করে দেখব $A \cup B$-টা closed এবং bounded কি না। প্রথমে closed কি না দেখি--

> Here $A \cup B = [-1,1] \cup \{\pm 2, \pm 3\}$.
> We know that $[-1,1]$ is a closed set. Also, any finite set is a closed set. So $\{\pm 2, \pm 3\}$ is a closed set.
> Finite union of closed sets is a closed set. So $A \cup B = [-1,1] \cup \{\pm 2, \pm 3\}$ is a closed set.

এবার bounded কিনা দেখতে হবে--

> Also $A \cup B$ is bounded since $A \cup B \subseteq [-3,3]$.
> So $A \cup B$ is closed and bounded, hence compact.

■

Example 2: Correct or justify the statement: The set $\mathbb{N}$ is not a compact set in $\mathbb{R}$.[2] **(2004.2a)**
SOLUTION: আমরা জানি যে $\mathbb{N}$ মোটেই bounded নয়, সুতরাং ওর কপালে আর compact হওয়া নেই।

> We know that $\mathbb{N}$ is an unbounded subset of $\mathbb{R}$. But a subset of $\mathbb{R}$ is compact iff it is closed and bounded.
> Hence $\mathbb{N}$ is not a compact set in $\mathbb{R}$.

লক্ষ কর যে $\mathbb{N}$ কিন্তু closed ছিল, কিন্তু আমরা সেই প্রসঙ্গেই গেলাম না, কারণ ওটা bounded হওয়ার পরীক্ষাতেই ফেল মেরে গেছে! ■

একই অংক অন্য ভাষায়।

Exercise 3: Determine whether the set $\{1,2,3,...,,n,...\}$ is compact in $\mathbb{R}$.[3] **(2010.1a)** ■

Exercise 4: Prove or disprove: For any continuous function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ the set $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 5\}$ is compact.[3] **(2014.1aii)**
HINT: যদি $f(x) = x$ নিই, তবে সেটা অবশ্যই continuous. এর জন্য আমাদের set-টা কী হচ্ছে? Compact হচ্ছে কি? ■

Example 3: Prove or disprove: the range of any convergent sequence in $\mathbb{R}$ is a compact set.[3]

(2009.1a)
SOLUTION: একটা sequence $\{a_n\}_n$-এ একই সংখ্যা বার বার আসতে পারে, যেমন $a_n = (-1)^n$ হলে sequence-টা হবে $-1, 1, -1, 1, ...$ যদি প্রতিটা সংখ্যাকে খালি একবার করেই রাখি তবে পাব একটা set– $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. একে বলে sequence-টার range set. যেমন $a_n = (-1)^n$ হলে range set-টা হবে $\{-1, 1\}$.
এই অংকটায় জানতে চেয়েছে যে $\{a_n\}_n$ যদি convergent হয়, তবে $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ একটা compact set হতে বাধ্য কিনা।

> No, it need not be a compact set.
>
> Counterexample:
>
> We know $\frac{1}{n} \to 0$ as $n \to \infty$. But its range set $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ is not closed, as the limit point 0 is outside the set.
>
> Since any compact set must be closed, so this range set is not compact.

■

নীচের অংকগুলোও একইভাবে closed আর bounded দিয়ে চিন্তা করলেই হবে।

Exercise 5: Let $\{a_n\}_n$ be a sequence with $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$. If the range set $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ is compact, then show that $\ell = a_n$ for some $n \in \mathbb{N}$. ■

এই অংকটা করতে একটা ব্যাপারে সাবধান--ℓ কিন্তু range set-এর একটা limit point নাও হতে পারে!

Exercise 6: Prove that the union and intersection of two compact sets are compact. ■

Exercise 7: Is it possible to have a set $A \subseteq \mathbb{R}$ such that both A and A^c are compact? ■

Example 4: Prove or disprove: If A is a compact subset of $\mathbb{R}$, B is a finite subset of A, and C is an enumerable subset of A, then $A - B$ and $A - C$ are compact subsets of $\mathbb{R}$.[3] **(2012.1a)**
SOLUTION:

> Both the statements are wrong.
>
> Counterexample 1: Let $A = [0, 1]$ and $B = \{1\}$.
>
> Then $A - B = A \cap B^c = [1, 0)$ is not closed, and hence cannot be compact.
>
> Counterexample 2: Let $A = [0, 1]$ and $C = \mathbb{Q}$.
>
> Then $A - C = A \cap C^c =$ set of all irrational numbers in $[0, 1]$. Since $\mathbb{Q}^c$ is dense in $\mathbb{R}$, so there is a sequence $\{x_n\}_n \in A \cap C^c$ such that $x_n \to \frac{1}{2} \notin A \cap C^c$.
>
> So $A \cap C^c$ is not closed, and hence cannot be compact.

■

Example 5: If A and B are two open sets in $\mathbb{R}$ such that $A \cap B$ is compact, then show that $A \cap B = \phi$.[2] **(2011.2c)**

SOLUTION:

> $\because A, B$ are open in $\mathbb{R}$,
>
> $\therefore A \cap B$ is open in $\mathbb{R}$, because intersection of finitely many open subsets of $\mathbb{R}$ is again open in $\mathbb{R}$.
>
> Thus $A \cap B$ is both open and closed ($\because$ compact).
>
> So $A \cap B = \phi$ or $\mathbb{R}$.
>
> But $A \cap B$ is bounded ($\because$ compact).
>
> $\therefore A \cap B = \phi$, as required.

■

Example 6: Construct a compact set in $\mathbb{R}$ whose accumulation points form a countably infinite set.[3] **(2009.2b)**

SOLUTION: এই অংকটায় একটু হাতড়ে হাতড়ে এগোতে হবে। ধরো যে set-টা খুঁজছি তার নাম দিলাম E. তার মানে E এমন একটা compact set যাতে E' হয় countably infinite. তাহলে E'-এর বিষয়ে কী কী জানা যাচ্ছে?

- countably infinite,
- bounded, যেহেতু E নিজে bounded,
- আর derived set মাত্রেই closed হয়।

প্রথমে এরকম একটা E' খুঁজে পাওয়ার চেষ্টা করি, তারপর তা থেকে E-তে পৌঁছবার চেষ্টা করা যাবে। Countably infinite বলতেই প্রথমেই $\mathbb{N}$ বা $\mathbb{Z}$ বা $\mathbb{Q}$-এর কথা মনে আসে, কিন্তু দুঃখের বিষয় যে এরা কেউই bounded নয়। একটা bounded এবং countably infinite set হল $\left\{\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$. কিন্তু এটা আবার ছাই closed নয়। অবশ্য এটাকে closed করে দেওয়া সহজ, খালি 0-টা জুড়ে দিলেই হবে। সুতরাং আমরা

$$E' = \left\{\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$$

নিয়ে চেষ্টা করব। প্রশ্ন হল এ থেকে E কিভাবে বেরোবে? যদি তোমাকে বলি এমন একটা set দিতে যার derived set হল $\{2, 10\}$, তবে তার একটা কায়দা হল ওদের সাথে $\frac{1}{m}$ যোগ করে দেওয়া--

$$\left\{2 + \tfrac{1}{m}\right\} \cup \left\{10 + \tfrac{1}{m}\right\}.$$

এই কায়দাটা আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম। এখানেও একই কায়দায় এগোলে পাব

$$\left\{\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m} \;:\; m, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{0 + \tfrac{1}{m} \;:\; m \in \mathbb{N}\right\}.$$

এখানে অবশ্য $\frac{1}{m}$-জাতীয় সংখ্যাগুলো সবাই $\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$-জাতীয়ও বটে, তাই ওদেরকে আলাদা করে union না নিলেও চলত। যেমন $\frac{1}{7}$হল $\frac{1}{14} + \frac{1}{14}$. বস্তুতঃ যেকোনো $\frac{1}{m}$-কেই $\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m}$ লেখা যায়। তাই

$$\left\{\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m} \;:\; m, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{0 + \tfrac{1}{m} \;:\; m \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m} \;:\; m, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

সমস্যা হল এই set-টা bounded বটে, কিন্তু closed নয়, কারণ 0-এর একটা limit point, অথচ 0 এই set-এর মধ্যে নেই। কিন্তু সে সমস্যার সমাধান সহজ, 0-টাকে ঢুকিয়ে দিলেই হল--

Consider the set

$$E = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \ : \ m, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}.$$

Its set of accumulation points is

$$E' = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}.$$

⟦ Because:

For any fixed $n \in \mathbb{N}$ the sequence of distinct terms $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\}_m \subseteq E$ converges to $\frac{1}{n}$.
Similarly, $\{\frac{1}{n}\}_n \subseteq E$ converges to 0.
Conversely, no $a \notin [0,2]$ can be an accumulation point, since $E \subseteq [0,2]$.
Also for any $a \in [0,2]$ outside $\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ let $\delta > 0$ be the distance of a from the nearest $\frac{1}{n}$. Then $N'(a, \frac{\delta}{2})$ contains only finitely many points of E.

⟧

Since $E' \subseteq E$, hence E is closed. Also $E \subseteq [0,2]$, and so E is bounded.

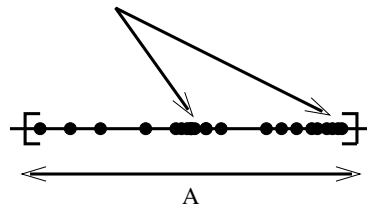
Thus E is compact.

Clearly, E' is countably infinite.

■

1.2 Bolzano-Weierstrass definitions

Compact-এর একটা definition শিখেছি। দ্বিতীয় definition-টা দেবার আগে একটা জিনিস কল্পনা কর। ধর, $A \subseteq \mathbb{R}$ একটা compact set, তার মানে closed আর bounded.
এবার মনে কর A-র মধ্যে প্রচুর সংখ্যায় পিঁপড়ে ঢুকছে, প্রতিটা পিঁপড়ে A-র একটা করে point দখল করেছে। এখন যেহেতু A হল bounded, তাই A-র ভিতরে তো আর বেশী জায়গা নেই, এদিকে পিঁপড়ে ঢুকেই চলেছে, ফলে পিঁপড়েগুলোকে এখানে সেখানে গাদাগাদি করে থাকতে হবে (Fig 1). এই গাদাগাদির কেন্দ্রগুলো হবে একেকটা limit point. তার মানে A-র অন্ততঃ একটা limit point থাকবেই। যদি এই বইয়ের প্রথম খণ্ডটা পড়ে থাকো তবে এই পিঁপড়ের গল্পটা অপরিচিত হবার কথা নয়--এটাই হল Bolzano-Weierstrass theorem for sets. এদিকে বলেছে যে A হল closed তাই limit

Fig 1

point-গুলো সব A-র মধ্যেই থাকবে। তার মানে A-র ভিতর যে কোনো infinite subset-এরই অন্ততঃ একটা limit point A-র মধ্যে থাকবে। এ থেকেই আসে compactness-এর দ্বিতীয় definition–

> **DEFINITION: Compact (limit point defn)**
>
> A is called compact if every infinite subset of A has at least one limit point inside A.

লক্ষ কর যে যদি $A \subseteq \mathbb{R}$ একটা finite set হয় তবে তার কোনো infinite subset থাকতেই পারে না। তাই যদি বলি

"A-র সব infinite subset-এরই অন্ততঃ একটা limit point A-এর মধ্যে আছে"

তবে সে কথাটা vacuously true হবে। সুতরাং $\mathbb{R}$-এর যে কোনো finite subset-ই compact হতে বাধ্য।
আমরা জানি যে একটা set-এর যেমন limit point হয় তেমনি একটা sequence-এরও limit point হয়ে থাকে, এবং sequence-দের নিয়েও একটা Bolzano-Weierstrass theorem আছে। সেখান থেকেও compactness-এর আরেকটা সংজ্ঞা পাওয়া যায়, এইরকম--

> **DEFINITION: Compact (sequential defn)**
>
> A is called compact if every infinite sequence in A has at least one limit point inside A.

Example 7: Let A be a compact set in $\mathbb{R}$ such that every point of A is an isolated point of A. Show that A is finite.[3] **(2011,2013)**
SOLUTION: Isolated point কাকে বলে মনে আছে তো? A-র মধ্যে যেসব point-গুলো A-র limit point নয়, তারাই হল A-র একেকটা isolated point.

> Given: all points in A are isolated,

তার মানে A-র মধ্যে A-একটাও limit point নেই--

> ie, no point in A is a limit point of A.
> Let, if possible, A be an infinite set. Then by limit point definition of compactness $\exists \ell \in A$ such that ℓ is a limit point of $A (\Rightarrow\Leftarrow)$.
> Hence A must be a finite set.

■

Example 8: Let A be an uncountable subset of $\mathbb{R}$ such that A' (the set of all accumulation points of A) is compact in $\mathbb{R}$. Does it follow that A is bounded in $\mathbb{R}$? Justify your answer.[3] **(2010.2b)**
SOLUTION:

> No, A need not be bounded.
> Counterexample: $A = (0,1) \cup \mathbb{N}$.
> Then $A' = [0,1]$ which is closed, bounded, and hence compact.
> But $\because \mathbb{N} \subseteq A$, and $\because \mathbb{N}$ is unbounded,
> $\therefore A$ is unbounded.

■

1.3 তিনটে সংজ্ঞা আসলে একই

আমরা এতক্ষণ পর্যন্ত compactness-এর তিনটে definition শিখলাম। এই তিনটে definition-ই যে আসলে সমার্থক সেটা বিশ্বাস হওয়া কঠিন। আমরা সেটা পরে প্রমাণ করব, আপাততঃ কয়েকটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 9: $\mathbb{N}$ কি একটা compact set? এই রকম প্রশ্নের উত্তরে সব সময়ে প্রথম definition-টা লাগানো সহজ।

আমরা জানি $\mathbb{N}$ closed (কেন?)। কিন্তু $\mathbb{N}$ মোটেই bounded নয়। তাই $\mathbb{N}$ compact হতে পারে না। এবার দ্বিতীয় definition-টা লাগাব। $\mathbb{N}$-এর যত infinite subset আছে তাদের সবারই সব limit point যদি $\mathbb{N}$-এর মধ্যেই থাকত তবে তো $\mathbb{N}$ compact-ই হত। তা যখন নয় তার মানে এমন অন্ততঃ একটা infinite subset পাওয়া যাবে যার কোনো limit point $\mathbb{N}$-এর মধ্যে নেই।
এরকম একটা subset বার করতে পারো? এরকম subset শুধু একটা নয়, অনেক আছে, যেমন একটা হল যাবতীয় even number-এর set $\{2n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. এটা একটা infinite subset, কিন্তু দুটো even number কখনোই খুব কাছাকাছি আসে না, (অন্ততঃ 2 তফাৎ থাকে), তাই কোনো limit point নেই। ■

Exercise 8: এরকম আরও তিনটে infinite subset দাও। ■

Example 10: $[0,1)$ একটা bounded set হলেও closed নয়, তাই compact হতে পারে না। এর ভিতর এমন একটা infinite subset পাওয়া উচিত যার কোনো limit point নেই $[0,1)$-এর ভিতরে। এরকম একটা set দাও।
SOLUTION: যেহেতু $[0,1)$-টা একটা closed set নয়, তাই এমন একটা limit point পাবেই যেটা set-এর বাইরে আছে। প্রথমে এরকম একটা limit point নাও। এক্ষেত্রে এরকম একটাই আছে, সেটা হল 1. এবার $[0,1)$-এর মধ্যে এমন একটা sequence নাও যেটা 1-এ converge করে, এবং যার প্রতিটা term-ই distinct. আমাদের উদাহরণে এরকম একটা sequence হতে পারে $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}_n$. যেহেতু প্রতিটা term-ই আলাদা আলাদা তাই range set-টাও একটা infinite set হবে-- $\left\{1-\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$, এবং এর একটাই মাত্র limit point হল 1, যেটা $[0,1)$-এর বাইরে, ঠিক যেমনটা চেয়েছিলাম। ■

Exercise 9: $[0,10) \cup (10,20]$-র মধ্যে এমন একটা infinite subsetদাও যার কোনো limit point নেই $[0,10) \cup (10,20]$-এর মধ্যে। ■

এবার আমরা দেখাব যে compactness-এর সহজ definition-টা আর limit point definition-টা সমার্থক। নীচের theorem-টা তারই প্রথম অর্ধেক-- যদি একটা set সহজ definition অনুযায়ী compact হয় (মানে closed, bounded হয়), তবে limit point definition অনুযায়ীও compact হবে।

THEOREM
If $A \subseteq \mathbb{R}$ is closed and bounded, then every infinite subset of A has at least one limit point inside A.

Proof: এটাই ছিল Bolzano-Weierstrass theorem for sets, যেটা আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে প্রমাণ করেছিলাম। নতুন করে তাই আর দিলাম না। **[Q.E.D]**

এবার বাকী অর্ধেক--limit point definition অনুযায়ী compact হলে closed, bounded-ও হবে।

Example 11: Show that a subset E of $\mathbb{R}$ is compact if every infinite subset has an accumulation point in E.[5] **(2009,2007)**

SOLUTION: প্রথমে bounded দেখাব--

Step 1: Let, if possible, E be not bounded.

তার মানে E একেবারে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত। সুতরাং আমরা E-র ভিতর থেকে এমনভাবে point তুলেই যেতে পারব যারা সবাই পরস্পরের থেকে দূরে দূরে থাকে। এইভাবে তুলতে তুলতে যে infinite set-টা পাব তার মধ্যে point-গুলো সবাই দূরে দূরে থাকায় কোনো limit point থাকবে না।

Then $E \neq \phi$.
$\therefore$ Can pick $a_1 \in E$.
Since E is unbounded,
$\therefore |a_1| + 1$ is not a bound of E,
$\therefore$ can pick a_2 such that $|a_2| > |a_1| + 1$.
Continuing thus, we get $a_1, a_2, a_3, \ldots \in E$ such that

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_{n+1}| > |a_n| + 1.$$

Then $\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ is an infinite set.
But since the distance between any two distinct a_n's is > 1, so $\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ has no limit point $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

এবার closed দেখাব। এর জন্য একটু আগেই $[0, 1)$-এর জন্য যে কায়দাটা করেছিলাম, ঠিক সেটাই করব।

Step 2: Let, if possible, E be not closed.
Then E must have at least one limit point $\ell \notin E$.

যেমন $E = [0, 1)$ হলে $\ell = 1$ নিয়েছিলাম।

Since ℓ is a limit point of E,
so there is a sequence $\{a_n\}_n \subseteq E$ of distinct terms such that $a_n \to \ell$.

যেমন আমরা আগে $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ নিয়েছিলাম।

> Hence $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ is an infinite set with exactly one limit point ℓ.
> $\because \ell \notin E$,
> $\therefore \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ has no limit point in $E(\Rightarrow\Leftarrow)$.

■

ঠিক একই কায়দায় দেখানো যাবে যে সহজ definition-টা আর sequential definition-টাও সমার্থক। নীচের অংকে ঠিক সেটাই চেয়েছে।

Exercise 10: Let $A \subseteq \mathbb{R}$. Prove that the following two statements are equivalent:

1. A is closed and bounded.
2. Every infinite sequence in A has at least one limit point inside A.

■

DAY 2
Heine-Borel

এবার আমরা আরও একটা নতুন সংজ্ঞা শিখব compactness-এর। এটা দেখতে একটু বেশী জটিল। বোঝার জন্য একটা নতুন জিনিস শিখতে হবে, যার নাম cover.

2.1 Cover

Example 12: ধর $\mathbb{R}$-এর একটা কোনো subset নিলাম-- $A = [0, 1]$. এইটাকে আমরা চারটে set দিয়ে ঢাকব--

$$U_1 = (-1, \tfrac{1}{2}), U_2 = (\tfrac{1}{4}, 1), U_3 = (\tfrac{3}{4}, 2), U_4 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}).$$

Fig 2-তে এই চারজনকে ছাতার মত দেখানো হয়েছে। প্রথম ছাতাটা রয়েছে $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$-এর উপরে, দ্বিতীয়টা $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$-এর উপরে, এইরকম। এইভাবে ছাতা দিয়ে ঢাকাকে অংকের ভাষায় বলে cover করা। অর্থাৎ cover করা মানে হল

$$A \subseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4.$$

■

DEFINITION: (Open) cover

Let $A \subseteq \mathbb{R}$ be any set, and let $\{U_i : i \in I\}$ be any collection of subsets of $\mathbb{R}$. We say that this collection is a **cover** of A if

$$A \subseteq \bigcup_i U_i.$$

If all the U_i's are also open, then it is called an **open cover** of A.

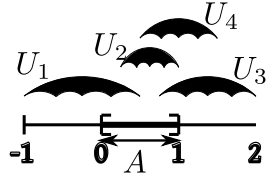
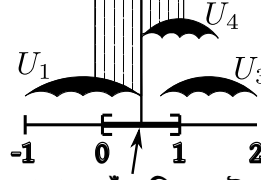
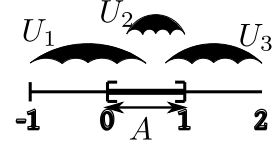



Fig 2 **Fig 3** **Fig 4**

Exercise 11: ধরো $A = [0,1] \cup \{2\}$. তবে এদের মধ্যে কারা কারা A-র open cover?
(1) $\{(0,1), \{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ **(2)** $\{N(x, 0.1) \ : \ x \in A\}$ **(3)** $\{(0,n) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ **(4)** $\{(-n,n) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$
■

Example 13: আবার Fig 2 দ্যাখো। যদি U_2-কে বাদ দিয়ে খালি U_1, U_3, U_4 নিতাম, তবে কিন্তু একটা cover হত না, কারণ পুরো A-টা তাতে ঢাকা পড়ত না, মানে

$$A \not\subseteq U_1 \cup U_3 \cup U_4,$$

যেহেতু $\frac{1}{2} \in A$ কিন্তু $\frac{1}{2} \not\in U_1 \cup U_3 \cup U_4$. Fig 3 দেখে নাও।
তার মানে U_2-টা cover-এর জন্য অপরিহার্য। কিন্তু U_4-কে স্বচ্ছন্দে বাদ দেওয়া চলবে কারণ (Fig 4)--

$$A \subseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3.$$

তার মানে $\{U_1, U_2, U_3\}$-ও A-এর একটা cover. আমরা বলব যে $\{U_1, U_2, U_3\}$ হল $\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$-এর একটা subcover. ■

> DEFINITION: **Subcover**
>
> Let $A \subseteq \mathbb{R}$ be any set, and let the collection $\{U_i \ : \ i \in I\}$ be a cover of A. By a **subcover** of this cover we mean any subcollection which is again a cover of A.

একটা cover-এ কতগুলো set ব্যবহৃত হয়েছে, সেটা হল cover-টার size. অনেক সময়ে আমাদের infinite cover নিয়ে কাজ করতে হয়।

Example 14: $\mathbb{N}$-এর একটা cover হল $\{(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Fig 5 দ্যাখো। এইটা একটা infinite cover-এর উদাহরণ, কারণ এর মধ্যে infinitely many sets আছে--

$$(1 - \tfrac{1}{4}, 1 + \tfrac{1}{4}), \quad (2 - \tfrac{1}{4}, 2 + \tfrac{1}{4}), \ 3 - \tfrac{1}{4}, 3 + \tfrac{1}{4}), \quad \text{ইত্যাদি।}$$

■

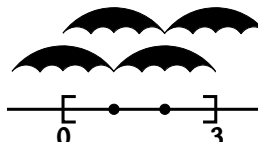
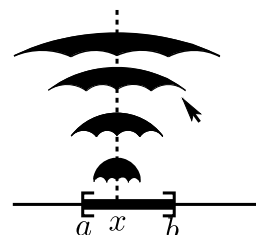



Fig 5 **Fig 6** **Fig 7** **Fig 8**

এর মধ্যে থেকে কি একটাকেও বাদ দিয়ে কোনো subcover পাওয়া সম্ভব? না, কারণ এরা প্রত্যেকেই $\mathbb{N}$-এর একটা করে point-কে ঢেকে রেখেছে। কিন্তু কখনো কখনো এমন infinite cover পাওয়া যায়, যাদের মধ্যে সবই প্রায় ফেলে দিয়ে খালি finitely many set দিয়েই দিব্যি একটা subcover পাওয়া যায়। এবার এরকম একটা উদাহরণ দেখি--

Example 15: এখানে $A = [0,3]$ নেব। এর মধ্যে যে কোনো একটা x নিয়ে তার উপর একটা ছাতা বসাই--

$U_x = (x-1, x+1)$. বলাই বাহুল্য যে যদি প্রতিটি x-এই এরকম ছাতা বসাই তবে সেই সব ছাতার নীচে পুরো A-টা ঢাকা পড়ে যাবে, তার মানে $\{U_x \ : \ x \in A\}$ হল A-র একটা cover. Fig 6 দ্যাখো। বুঝতেই পারছো যে এটা একটা infinite cover. কিন্তু সবগুলোর ছাতার কি সত্যিই দরকার আছে? আমরা যদি খালি $U_0, ..., U_3$ এই চারটে ছাতা রেখে বাকীগুলো ফেলেও দিই তাতেও A দিব্যি ঢাকা পড়ত। বিশ্বাস না হলে Fig 7 দেখে নাও। তার মানে $\{U_0, U_1, U_2, U_3\}$ হল একটা subcover. এবং লক্ষ করার বিষয় হচ্ছে যে এটা একটা finite subcover. ■

Example 16: Let $a < x < b$ and $\Gamma = \{(x-\epsilon, x+\epsilon) \ : \ \epsilon > 0\}$. Is Γ an open cover of $[a,b]$ having a finite subcover? Justify your answer.[3] **(2014.2b)**

SOLUTION:এখানে ছাতাগুলো Fig 8-এর মত। প্রথমে $[a,b]$-র মধ্যে কোনো একটা x নিয়ে সেখানেই সবগুলো ছাতা বসানো হয়েছে, খালি ছাতাগুলো সাইজে বাড়ছে। বুঝতেই পারছ যে, একটা যথেষ্ট বড় ছাতা নিলেই সেটা পুরো $[a,b]$-কে ঢেকে ফেলবে। তখন বাকি ছাতাগুলো ফেলে দিলেও অসুবিধা নেই। সুতরাং finite subcover পাচ্ছি।
প্রথমে open cover দেখানো দিয়ে শুরু করি--

> By definition, each element of Γ is an open set.
> Also if we take $\epsilon = \max\{x-a, b-x\}+1$, then $[a,b] \subseteq (x-\epsilon, x+\epsilon) \in \Gamma$.
> So Γ is an open cover of $[a,b]$, as required.
> Also $\{(x-\epsilon, x+\epsilon)\}$ is a finite subcover.

■

তার মানে দেখা যাচ্ছে যে কোনো কোনো infinite cover-এর finite subcover থাকে, আবার কোনো কোনো ক্ষেত্রে থাকে না। কখন একটা finite subcover থাকবে সেটা নিয়েই compact set-এর চতুর্থ definition.

2.2 Heine-Borel definition

> DEFINITION: **Compact (Heine-Borel defn)**
>
> A set $A \subseteq \mathbb{R}$ is called **compact** if every open cover of A has a finite subcover.

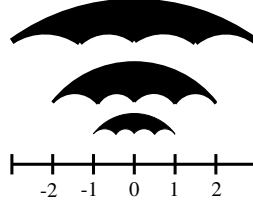



Fig 9

শুনতে অন্যরকম লাগলেও এই নতুন সংজ্ঞাটা কিন্তু আসলে আগের তিনটে সংজ্ঞার সঙ্গে সমার্থক! সেটা প্রমাণ করা একটু জটিল। আগে কয়েকটা উদাহরণ দেখে ব্যাপারটা বুঝে নিই।

Example 17: $\mathbb{N}$ কি একটা compact set? আমরা জানি যে এর উত্তর হল-- "না", কারণ $\mathbb{N}$ bounded নয়। তার মানে Heine-Borel definition অনুযায়ী, এর এমন একটা open cover পাব, যার কোনো finite subcover নেই। এরকম একটা cover হল--

$$\{(-n,n) \;:\; n\in\mathbb{N}\}.$$

Fig 9-এ এর ছবি রয়েছে। এটা যে সত্যিই একটা cover সেটা দেখার জন্য লক্ষ কর যে $(-n,n)$ set-গুলো ক্রমশঃই বড় হচ্ছে, মানে

$$(-1,1)\subseteq(-2,2)\subseteq(-3,3)\subseteq\cdots$$

এইভাবে বাড়তে বাড়তে পুরো $\mathbb{R}$-টাই আস্তে আস্তে ঢেকে যাচ্ছে-- তুমি যে কোনো $x\in\mathbb{R}$ নাও, এমন একটা $n\in\mathbb{N}$ পাবে যাতে $n>|x|$ হয়, মানে $x\in(-n,n)$ হয়।
অতএব

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,n)=\mathbb{R}.$$

তা, পুরো $\mathbb{R}$-ই যদি ঢাকা পড়ল, তো $\mathbb{N}$ আর ঢাকা না পড়ে যায় কোথায়?
এবার দেখি এর কোনো finite subcover আছে কিনা। যদি ধর খালি প্রথম 100-টা set রাখতাম--$(-1,1),\cdots,(-100,100)$, তবে কি পুরো $\mathbb{N}$ ঢাকা পড়ত? না, কারণ

$$(-1,1)\cup\cdots\cup(-100,100)=(-100,100),$$

কিন্তু $\mathbb{N}$ তো একটা unbounded set, সেটার অনেকটাই $(-100,100)$-র বাইরে রয়ে গেছে! যদি 100-র জায়গায় 10000-ও নিতাম তবেও একই যুক্তি খাটত। বুঝতেই পারছ যে এই cover-টার কোনো finite subcover নেই। ■

Exercise 12: নীচের unbounded set-গুলো নিয়ে চিন্তা করে দ্যাখো যে প্রত্যেকক্ষেত্রেই এই একই cover $\{(-n,n) \;:\; n\in\mathbb{N}\}$ দিয়ে কাজ চলবে--

$$\mathbb{R},\quad \mathbb{Q},\quad \{2n \;:\; n\in\mathbb{N}\}.$$

■

Example 18: Let

$$D=\left\{x\in(0,1) \;:\; x\neq\frac{1}{n},\quad n\in\mathbb{N}\right\},$$

and

$$\Gamma = \left\{ \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Show that Γ is an open cover of D. Justify whether Γ has a finite subcover for D.[3] **(2013.1ai)**

SOLUTION: লক্ষ কর যে Γ-র প্রতিটা element-ই একেকটা open interval যারা disjoint, মানে ওদের মধ্যে কোনো intersection নেই। আরো লক্ষ কর যে, ওদের সবগুলোর union নিলে তবে পুরো D-টা পাওয়া যায়। সুতরাং একটাকেও বাদ দিলে আর cover থাকবে না।

> Let $I_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ for $n \in \mathbb{N}$.
>
> We know that $\frac{1}{n}$ strictly decreases to 0.
>
> So $D = I_1 \cup I_2 \cup \cdots$.
>
> Thus D is the union of all the sets in Γ. Hence Γ is a cover of D.
>
> Also each I_n is an open set. So Γ is an open cover of D.

এবার দেখি finite subcover পাই কিনা--

> Shall show that Γ does not contain any finite subcover for D.
>
> Let, if possible, Γ have a finite subcover $\{I_{n_1}, ..., I_{n_k}\}$ for some $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$.

যেহেতু I_n-রা সবাই disjoint, তাই $I_{n_1}, ..., I_{n_k}$ ছাড়া বাকি I_n-রা এতে ঢাকা পড়বে না।

> We note that for $m \neq n$ we have $I_m \cap I_n = \phi$.
>
> Let $n \in \mathbb{N}$ be such that $n \notin \{n_1, ..., n_k\}$.
>
> Then $I_n \subseteq D$ but $I_n \not\subseteq \cup_{i=1}^{k} I_{n_i} (\Rightarrow\Leftarrow)$.

■

Example 19: $A = (0, 2]$ কি compact? আমরা জানি যে $(0, 2]$ closed নয়, সুতরাং প্রথম definition অনুযায়ী A compact নয়। তার মানে এমন কোনো open cover থাকবে যার কোনো finite subcover নেই। এরকম একটা open cover বার কর দেখি।

SOLUTION: A যেহেতু closed নয়, তার মানে অন্ততঃ একটা limit point A-র বাইরে আছে। এরকম একটা limit point হল 0. আমরা এমন একটা open cover নেব যেটা এই limit point-টার "গলা টিপে ধরে"--

$$U_n = (\tfrac{1}{n}, \infty), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Fig 10

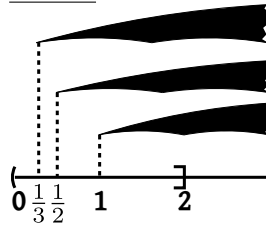
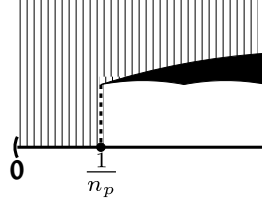



Fig 11

Fig 10 দ্যাখো। "গলা টিপে ধরা" মানে হল-- U_n-গুলো ক্রমশঃ 0-র দিকে এগিয়ে যাচ্ছে, ফলে আস্তে আস্তে A-টা ঢাকা পড়ছে, কিন্তু কোনো U_n-ই পুরো A-কে ঢাকছে না, এক চিলতি জায়গা ফাঁকা রাখছে। ওই ফাঁকা রাখাটাই হল এখানে মোক্ষম ব্যাপার, ওই জন্যই কেবল finite সংখ্যক U_n দিয়ে পুরো A-টা cover করা যাবে না, সব সময়েই একটা ছোট্টো চিল্‌তি ঢাকনার তলা থেকে উঁকি মারবেই! এটাই Fig 11-এ দেখানো হয়েছে। ■

Exercise 13: $[-1, 0)$-এর এমন একটা open cover দাও যার কোনো finite subcover নেই। এখানেও 0-র গলা টিপে ধরতে হবে, কিন্তু এবার বাঁদিক থেকে। ■

এবার আরেকটা গলা টিপে ধরার অংক।

Example 20: Exhibit an open cover of the set

$$\{\tfrac{1}{n} \;:\; n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

that has no finite subcover. Is this set compact? Justify your answer.[3] **(2008.1a)**

SOLUTION: এখানে 0 একটা limit point যেটা set-এর বাইরে আছে। আমরা ডানদিক থেকে 0-র গলা টিপে ধরব।

> For $n \in \mathbb{N}$, let $U_n = \left(\frac{1}{n}, \infty\right)$.

দেখাব যে $\{U_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ হল একটা open cover. এর জন্য সহজ কায়দা হল এইটা লক্ষ করা যে $\cup U_n$-এর তলায় পুরো $(0, \infty)$-ই ঢেকে গেছে। সুতরাং $\left\{\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$ তো ঢাকা পড়বেই।

> Then
> $$\cup_{n=1}^{\infty} U_n = (0, \infty).$$
> [[Because:
> Since $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \subseteq (0, \infty)$, hence $LHS \subseteq RHS$.
> Conversely, let $a \in (0, \infty)$. Since $\frac{1}{n} \to 0$, so $\exists n \in \mathbb{N}$ with $\frac{1}{n} < a$. So $a \in (\frac{1}{n}, \infty) = U_n$. Hence $a \in LHS$.
>]]
> Thus $\{U_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ is an open cover for the given set.

এবার দেখাব যে কোনো finite subcover নেই। কারণ প্রত্যেকটা U_n-ই 0-র ডানদিকে এক চিল্‌তি করে জায়গা ফাঁকা রাখছে, কেউই পুরো ঢাকছে না।

> Shall show that this has no finite subcover.
> Let, if possible, there be a finite subcover
> $$\{U_{n_k} \;:\; k=1,...,p\} \qquad (*)$$
> with $n_1 < n_2 < \cdots < n_p$.

লক্ষ কর যে ছাতাগুলো ক্রমশঃই বড় হচ্ছে, তাই U_{n_k}-দের union হবে সবচেয়ে বড় ছাতাটা মানে U_{n_p}. এই ছাতাটাও 0-র ডানদিকে এক চিল্‌তি জায়গা ছেড়েছে--$\left(0, \frac{1}{n_p}\right]$. লক্ষ কর যে $\frac{1}{n_p}$ এই ফাঁকের মধ্যে রয়েছে, তাই ওর গায় বৃষ্টি পড়বে।

> Then
> $$\cup_{k=1}^{p} U_{n_k} = U_{n_p}.$$
> Let $a = \frac{1}{n_p}$. Then a is in the given set but $a \notin U_{n_p}$. So (*) is not a subcover.($\Rightarrow\Leftarrow$)

অংকের দ্বিতীয় অংশের উত্তর এবার এক লাইনে--

> Since we have shown an open cover without any finite subcover, the given set cannot be compact.

■

একই রকম আরেকটা অংক। চেষ্টা করে দ্যাখো।

Exercise 14: Find an open covering of $E = (0,1)$ which does not contain a finite subcovering.[3] **(2011.1a)** ■

Example 21: সব সময়েই যে খালি বাঁদিক বা খালি ডানদিক থেকে গলা টিপলেই চলে তা নয়। যদি limit point-টা মাঝামাঝি জায়গায় থাকে তবে দুদিক দিয়েই টিপে ধরতে হয়। যেমন যদি $A = [0,2) \cup (2,4]$ হত। তাহলে আমরা নিতাম

$$U_n = (-\infty, 2 - \tfrac{1}{n}) \cup (2 + \tfrac{1}{n}, \infty).$$

■

যেহেতু $\mathbb{R}$ হল একটা লম্বা লাইনের মত, তাই গলা টেপার জন্য দুইয়ের চেয়ে বেশী দিক আর হয় না। দুই দিক দিয়ে টিপে ধরলে যে কোনো ক্ষেত্রেই কাজ হয়।

Exercise 15: যদি $A = [-1, 0)$ আর $B = (0, 1]$ হয় তবে দেখাও যে

$$\{U_n \;:\; n \in \mathbb{N}\} \text{ যেখানে } U_n = (-\infty, -\tfrac{1}{n}) \cup (\tfrac{1}{n}, \infty)$$

হল A, B দুজনেরই open cover, যার কোনোক্ষেত্রেই finite subcover নেই। ■

এই কায়দাটা দিয়ে যে কোনো closed নয় এমন set-এর open cover বানানো যায়, যার কোনো finite subcover নেই। প্রথমে একটা limit point বার করতে হয়, যেটা set-টার বাইরে আছে (এমনটা পাওয়া যাবেই, কারণ set-টা closed নয়), তারপর দুই দিক থেকে সেই limit point-টার গলা টিপে ধরতে হবে। হয়তো একদিক দিয়ে টিপে ধরলেই চলত, কিন্তু দু দিক দিয়ে টিপলে একেবারে নিশ্চিন্ত, সব ক্ষেত্রেই কাজ করবে!

DAY 3
Heine-Borel বনাম...

এবারে দেখব যে Heine-Borel definition-টা আর আর definition-গুলো সবাই সমার্থক।

3.1 ...সবচেয়ে সোজা definition

প্রথমে সবচেয়ে সোজা definition-টা দিয়ে শুরু করি। দেখাব যে Heine-Borel definition অনুযায়ী কোনো set যদি compact হয়, তবে সেটা closed এবং bounded হবেই।

Example 22: Let S be a subset of $\mathbb{R}$ such that every infinite open cover of S has a finite subcover. Prove that S is bounded and closed.[2+3] **(2012.2a)**

SOLUTION: প্রথমে দেখাব bounded. শুরু করব একটা open cover নিয়ে--

> <u>Bounded:</u>
> Let $U_n = (-n, n)$.
> Then $\cup_n U_n = \mathbb{R}$, and so $\{U_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ is an open cover of S.
> By assumption, this has a finite subcover.
> $$\{U_{n_1}, ..., U_{n_p}\},$$
> say, where $n_1 < n_2 < \cdots < n_p$. Then
> $$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} U_{n_i} = \bigcup_{i=1}^{p} (-n_i, n_i) = (-n_p, n_p),$$
> which is bounded. So S is bounded, as required.

এবার closed দেখাব।

> <u>Closed:</u> Let, if possible, S be not closed.
> Then $\exists b \in S'$ such that $b \notin S$.

এর পরের কাজ হল দুদিক থেকে b-এর গলা টিপে ধরা--

> Consider the collection of open sets
> $$\{V_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}. \qquad (**)$$
> where $V_n = \left(-\infty, b - \frac{1}{n}\right) \cup \left(b + \frac{1}{n}, \infty\right)$.

> Then
> $$\cup_n V_n = (-\infty, b) \cup (b, \infty) = \{b\}^c.$$

অর্থাৎ একমাত্র b বাদে পুরো $\mathbb{R}$-ই V_n-দের তলায় ঢাকা পড়ে গেছে। যেহেতু S-এর মধ্যে b নেই, তাই S-ও V_n-দের তলায় covered হয়েছে।

> Since $b \notin S$, so (**) is an open cover of S.
> By assumption, this has a subcover
> $$\{V_{n_1}, ..., V_{n_k}\}.$$
> Let $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Then
> $$S \subseteq \cup_{j=1}^k V_{n_j} = V_{n_k}.$$
> But then
> $$S \cap (b - \tfrac{1}{n_k}, b + \tfrac{1}{n_k}) = \phi,$$
> which is impossible, since $b \in S'$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

কারণ $b \in S'$ হওয়ার জন্য $N'\left(b, \frac{1}{n_k}\right) \cap S \neq \phi$ হবে। তাই $S \cap (b - \frac{1}{n_k}, b + \frac{1}{n_k}) \neq \phi$ হওয়া উচিত ছিল। ■

নীচের অংক দুটো একই জিনিসের সামান্য অন্য রূপ।

Exercise 16: Define 'Open Covering' of a point-set of real numbers and hence define a compact set in $\mathbb{R}$. Using this definition of compact set, show that if C is a compact set of real numbers then C is a bounded set.[1+1+2] **(2003.2a)** ■

Exercise 17: Let E be an infinite subset of $\mathbb{R}$ such that any open covering of E has a finite subcover. Prove that E is both bounded and closed.[2+3] **(2009,2005)** ■

Exercise 18: Prove that a compact subset of $\mathbb{R}$ is closed and bounded.[2+3] **(2014.2a)** ■

এবার উল্টো দিকটা করব, মানে দেখাব যে সোজা definition অনুযায়ী একটা set যদি compact হয় তবে Heine Borel definition অনুসারেও হবে। এই প্রমাণটা নানাভাবে করা যায়। আমরা তিনটে কায়দা দেখাব।

3.1.1 প্রথম প্রমাণ

প্রথম প্রমাণটা হবে contradiction দিয়ে।

Example 23: Let the set $E(\subseteq \mathbb{R})$ be closed and bounded. Prove that every open cover of E has a finite subcover.[5] **(2008,2006)**

SOLUTION:

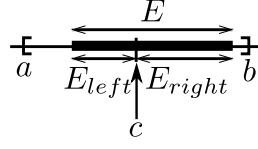



Fig 12

Let, if possible, there be an open cover $\{U_i : i \in \Lambda\}$ of E that has no finite subcover. Here Λ is an index set.

এখানে কায়দাটা হল E-কে বারবার করে দুভাগ করা। Fig 12-এর দিকে চোখ রাখো।

Step 1: $\because E$ is bounded, $\therefore E \subseteq [a,b]$ for some $a < b$.

Let $I_0 = [a,b]$.

Let c be the midpoint of I_0.

Let $E_{\text{left}} = [a,c] \cap E$ and $E_{\text{right}} = [c,b] \cap E$.

মানে c-এর বাঁদিকের অংশটাকে বললাম E_{left} আর ডানদিকের অংশটাকে E_{right}.

Then at least one of E_{left} and E_{right} cannot be covered by finitely many U_i's.

⟦ Because:

If both E_{left} and E_{right} can be covered by finitely many U_i's, then $E = E_{\text{left}} \cup E_{\text{right}}$ can be covered by finitely many U_i's $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

⟧

এবার আমরা এমন একটা দিক নেব যেদিকের অংশটাকে finite-সংখ্যক U_i দিয়ে ঢাকা যায় না।

Let

$$I_1 = \begin{cases} [a,c] & \text{if } E_{\text{left}} \text{ cannot be covered by finitely many } U_i\text{'s} \\ [c,b] & \text{otherwise} \end{cases}$$

এবার একই কাজ বারবার করতে থাকব--

In this way we can define a sequence of nested closed, bounded intervals

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$$

such that for each n the set $E \cap I_n$ cannot be covered by finitely many U_i's.

Also the length of I_n is
$$|I_n| = \frac{b-a}{2^n} \to 0.$$
By the nested interval theorem,
$$\bigcap_0^\infty I_n = \{\ell\},$$
for some $\ell \in \mathbb{R}$.

Nested interval theorem কী জিনিস মনে আছে তো? অনেকে Cantor's intersection theorem বলে। আমরা এটা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম-- যদি closed, bounded interval-এর একটা sequence থাকে $\{[a_n, b_n]\}_n$ যেগুলো একটার মধ্যে একটা পর পর ঢোকানো--
$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots,$$
তবে ওদের intersection হবে nonempty. যদি $b_n - a_n \to 0$ হয়, তবে আরও বলা যায় যে intersection-টা একটা singleton set হতে বাধ্য।

Step 2: Shall show that $\ell \in E$.

এইটা খুবই সহজ কাজ। খালি এটা দেখালেই হবে যে ℓ হল E-এর একটা limit point, অমনি $\ell \in E$ হতে বাধ্য, কারণ E বলা আছে closed.

$\because E$ is closed,

$\therefore$ enough to show that $\ell \in E'$, ie,
$$\forall \epsilon > 0 \quad N'(\ell, \epsilon) \cap E \neq \phi.$$

এটা দেখানোই আমাদের লক্ষ, তাই গোড়ায় একটা target এঁকে নিয়েছি। এই target বাক্যটা ধরে ধরে আমাদের প্রমাণ এগোবে। যারা আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই সিরিজের Real Analysis (volume 1) পড়েছো, তাদের কাছে এটা অপরিচিত হবার কথা নয়। এই বাক্যটার প্রথমেই $\forall \epsilon$ আছে, তাই--

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এখানে target বাক্যটায় আর কোনো $\forall$ বা $\exists$ নেই, অতএব আমরা পরীক্ষা করে দেখব যেটা দাবি করা হয়েছিল সেটা মিলছে কিনা। পরীক্ষা করব, তাই আতস কাঁচের ছবি দিয়েছি!

$\because |I_n| \to 0, \therefore \exists n \in \mathbb{N} \quad |I_n| < \epsilon.$

$\because \ell \in I_n, \therefore I_n \subseteq N(\ell, \epsilon).$

Now $I_n \cap E$ has infinitely many points in it.

⟦ Because:

If $I_n \cap E$ had only finitely many points, then it could be covered by only finitely many U_i's.

>]]
>
> $\therefore N(\ell,\epsilon)\cap E$ has infinitely many points.
>
> $\therefore N'(\ell,\epsilon)\cap E\neq\phi$, as required.
>
> Step 3:
>
> $\because \ell\in E,\ \therefore \exists U_i\quad \ell\in U_i$.
>
> $\because U_i$ is open, $\therefore \exists\delta>0\quad N(\ell,\delta)\subseteq U_i$.
>
> $\because |I_m|\to 0,\ \therefore \exists m\in\mathbb{N}\quad I_m\subseteq N(\ell,\delta)$.
>
> $\therefore I_m\cap E\subseteq I_m\subseteq N(\ell,\delta)\subseteq U_i$.
>
> Thus $I_m\cap E$ can be covered by just a single $U_i(\Rightarrow\Leftarrow)$.

■

3.1.2 দ্বিতীয় প্রমাণ

এবার আমরা একই জিনিসের আরেকটা প্রমাণ দেখব। এটা সামান্য বেশী লম্বা, কিন্তু এখানে যে কায়দাটা লাগবে সেটা অংকের বহু জায়গাতেই ব্যবহার হয়, তাই জেনে রাখা ভাল। আমাদের একটা closed, bounded set দেওয়া থাকবে, আর দেওয়া থাকবে তার একটা open cover, মানে অনেকগুলো open set-এর একটা গুচ্ছ, যাদের union-এর তলায় আমাদের set-টা পুরো চাপা পড়ে যায়। আমাদের কাজ হল একটা finite subcover বার করা, মানে সেই গুচ্ছটার থেকে খালি finite-সংখ্যক set রাখা যাদের দিয়েও আমাদের set-টা সম্পূর্ণ চাপা পড়ে। যদি গোড়ার cover-টাই finite হয়, তবে তো ল্যাঠা চুকেই গেল। যদি infinite হয়, তবে কাজটা দুইধাপে করব। হয়তো মনে আছে যে 1st year-এ পড়েছিলে, inifinity নানারকম হয়। যেমন $\mathbb{R}$-ও একটা infinite set, আবার $\mathbb{N}$-ও তাই, কিন্তু $\mathbb{N}$-এর সাইজ হল "ছোটো" infinity, আর $\mathbb{R}$-এর সাইজ হল "বড়ো" infinity. অংকের জগতে এই "ছোটো" infinity-র প্রচলিত নাম হল countable infinity. আর "বড়ো" infinity-র নাম হল uncountable infinity. তা আমরা যে open cover নিয়ে শুরু করছি, সেটার মধ্যে কতগুলো set আছে সে বিষয়ে কিছু বলে দেওয়া নেই (তাই অনেক সময়ে একে arbitrary open cover-ও বলে)। আমরা প্রথম ধাপে একটা subcover বার করব যেটার সাইজ হবে countable (মানে হয় countable infinity, আর নয়তো finite)। মজার কথা হল এর জন্য কোনো compactness লাগবে না। দ্বিতীয় ধাপে countable subcover থেকে finite subcover বার করব।

> **THEOREM**
>
> Let S be any subset of $\mathbb{R}$. Then any open cover $\{U_\alpha\ :\ \alpha\in I\}$ of S (where I is an index set) contains a countable subcover.

Proof: প্রমাণটা দাঁড়িয়ে আছে দুটো অপরিসীম গুরুত্বপূর্ণ তথ্যের উপরে (যেগুলো তুমি 1st year-এ শিখেছিলে)-- এক, $\mathbb{Q}$ হল $\mathbb{R}$-এর মধ্যে dense, আর দুই, $\mathbb{Q}$ হল countable.

> $\forall x\in S\quad \exists\alpha\in I\quad x\in U_\alpha$.
>
> Since U_α is open (and nonempty), $\exists\epsilon>0\quad N(x,\epsilon)\subseteq U_\alpha$.
>
> Since $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$, hence $\exists p_x,q_x\in\mathbb{Q}\quad p_x\in(x-\epsilon,x),\quad q_x\in(x,x+\epsilon)$.

এখানে p_x, q_x-এর তলায় ছোটো করে x লিখেছি, কারণ ওরা x-এর উপরে নির্ভর করতে পারে।

> Since $\mathbb{Q}$ is countable the collection $\{(p_x, q_x) \ : \ x \in S\}$ must be countable, too.

এইটাই মোক্ষম ধাপ, যেখানে countable-এর জগতে ঢুকছি। ভালো করে বুঝে নেওয়া যাক। আমরা প্রতিটা x-কে ঘিরে একটা করে inteval নিচ্ছিলাম যাদের প্রান্তগুলো rational, যেমন $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ ইত্যাদি। ধরো $S = [0, 1]$. তার মধ্যে uncountable-সংখ্যক x পাবে, কিন্তু rational প্রান্তওয়ালা interval আছে মোটে countable-সংখ্যক। তার মানে তুমি নিশ্চয়ই একই interval একাধিকবার নিয়েছ। যেমন $x = 0.4$ হলেও $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ নেওয়া যায়, আবার $x = 0.45$ হলেও ওই একই interval দিয়ে কাজ চলবে। সুতরাং $\{(p_x, q_x) \ : \ x \in S\}$ হচ্ছে একটা countable set, কারণ একটা set-এর মধ্যে কোনো জিনিস একাধিকবার গোণা হয় না।
Countable যখন, তার মানে এক, দুই,... করে গোণা যাবে--

> We list them as $J_1, J_2, \ldots$.
> Then for each $n \in \mathbb{N}$ we can pick $\alpha_n \in I$ such that $J_n \subseteq U_{\alpha_n}$.
> Thus $\{U_{\alpha_n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ is a countable subcover, as required.
>
> ⟦ Because:
>
> For any $x \in S$ we have $x \in (p_x, q_x)$, which is J_n for some $n \in \mathbb{N}$.
> Now, $J_n \subseteq U_{\alpha_n}$.
> Hence $x \in U_{\alpha_n} \subseteq \cup_n U_{\alpha_n}$.
>
> ⟧

[Q.E.D]

এতক্ষণ আমরা arbitrary open cover থেকে countable subcover অবধি পৌঁছতে শিখলাম। এবার সেখানে থেকে finite subcover-এ পৌঁছব। এখানে আবার Cantor intersection theorem লাগবে, যার বক্তব্য হল যদি কিছু nonempty closed, bounded set নাও একটার ভিতর একটা--

$$C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \cdots,$$

তবে তাদের intersection-ও nonempty হবে, মানে $\cap_n C_n \neq \phi$.

Example 24: If S is a bounded and closed set of real numbers, then prove that every countably infinite open cover of S has a finite subcover.[5] **(2013.2a)**
HINT:

> Let $\{U_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ be a countably infinite open cover of S.

এটাকে আমরা সাম্রাজ্য বিস্তারের দৃষ্টিভঙ্গী থেকে দেখব। প্রথমে খালি U_1 ছিল, তারপরে তার সাথে U_2 এসে জুটল, দুজনে মিলে একটু বেশী ঢাকল, তারপর এল U_3, তিনজনে মিলে ঢাকল আরেকটু বেশী, এইভাবে চলতে চলতে n ধাপে ঢাকা পড়বে--

> Let, for $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_1 \cup \cdots \cup U_n$.
> Then each V_n is open.

এই ঢাকনার তলা থেকে S-এর কতটা বাইরে উঁকি মারছে?

> Let $C_n = V_n^c \cap S$. Then C_n is closed (because S is closed, and intersections of closed sets is closed).
> Also C_n is bounded, because S is bounded.
> Now $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots$.

আমরা দেখাব যে finite-সংখ্যক ধাপের পর পুরো S-টা ঢাকা পড়ে যেতে বাধ্য, মানে S-এর কোনো অংশই আর ঢাকনার বাইরে থাকবে না--

> Shall show that $C_n = \phi$ for some $n \in \mathbb{N}$.
> Let, if possible, $\forall n \in \mathbb{N}\ C_n \neq \phi$.
> So by Cantor's intersection theorem, $\cap_n C_n \neq \phi$,
> *i.e.*, $S \subsetneq \cup_n U_n (\Rightarrow\Leftarrow)$.

■

DAY 4
Heine-Borel বনাম... (part 2)

এবারে দেখব যে Heine-Borel definition-টা আর অন্য definition-গুলো সবাই সমার্থক।

4.1 ...সবচেয়ে সোজা definition (contd.)

4.1.1 তৃতীয় প্রমাণ

Example 25: Let the set $E(\subseteq \mathbb{R})$ be closed and bounded. Prove that every open cover of E has a finite subcover.[5] **(2008,2006)**

SOLUTION: এবার যে প্রমাণটা করব তাতে কোনো কঠিন উপাদান লাগবে না, কোনো Cantor intersection বা countability এসব কিচ্ছু নয়! প্রমাণটা হবে ধাপে ধাপে। প্রথমে ধরে নেব যে E একটা interval.

> <u>Step 1: When E is an interval:</u>
> Let $E = [a, b]$.
> Let $\{U_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ be an open cover of E. Here A is an index set. Shall extract a finite subcover.

Fig 13 দ্যাখো। Open cover-টা প্রচুর ছাতার মত $[a, b]$-কে ঢেকে রেখেছে। এবার যেটা করতে চলেছি সেটা বোঝার জন্য একটা গল্প মাথায় রাখলে সুবিধা হবে। ধরো একটা লোক a থেকে b-এর দিকে যাওয়ার চেষ্টা করছে। কিন্তু সে প্রতিজ্ঞা করেছে যে কেবল মাত্র finite-সংখ্যক ছাতার চেয়ে বেশী কিছু সে ব্যবহার করবে না। তবে সে কত দূর অব্ধি যেতে পারবে? যদি b পর্যন্ত পৌঁছতে পারে তবেই কেল্লা ফতে। আমরা সেটাই দেখাতে চাই। এখনও পর্যন্ত জানি না যে লোকটা সত্যিই কতটা যেতে পারবে। যে যে point অব্ধি যেতে পারবে তাদের set-এর একটা নাম দিয়ে রাখি--B.

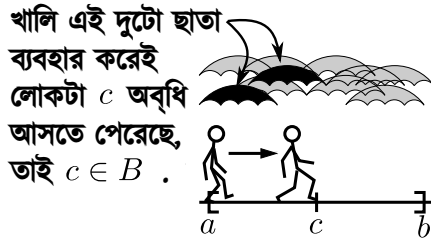



Fig 13

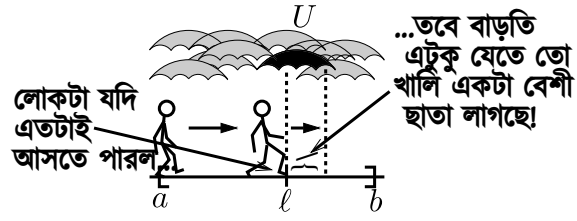



Fig 14

Define

$$B = \{c \in [a,b] \ : \ [a,c] \text{ can be covered with finitely many } U_\alpha\text{'s}\}.$$

আমরা শেষ পর্যন্ত দেখাব যে $b \in B$. প্রথমে দেখাই যে B-টা b পর্যন্ত বিস্তৃত, মানে $\sup B = b$. কিন্তু $\sup B$ আদৌ exist করে তো?

Clearly, $B \neq \phi$, since $a \in B$.

Also B is bounded above (by b).

So $\ell = \sup B$ exists.

Shall show $\ell = b$.

এবারই আসল প্যাঁচটা। Fig 14-এর দিকে চোখ রেখো।

Clearly, $\ell \leq b$. Let, if possible, $\ell < b$.

Since $\ell \in [a,b]$, so $\ell \in U_{\alpha^*}$ for some some α^*.

Since U_{α^*} is open,

$$\exists \epsilon > 0 \quad (\ell - \epsilon, \ell + \epsilon) \subseteq U_{\alpha^*}.$$

Since $a \leq \ell < b$, we can choose $x, y \in [a,b)$ such that

$$\ell - \epsilon < x < \ell < y < \ell + \epsilon.$$

Then $x \in B$, and so $[a,x]$ can be covered by finitely many U_α's.

Also $[x,y]$ is covered by U_{α^*}

So $[a,y] = [a,x] \cup [x,y]$ is covered by finitely many U_α's. Hence $y \in B (\Rightarrow\Leftarrow \because y > \ell = \sup B)$.

এ থেকেই অনায়াসে দেখাতে পারব যে পুরো $[a,b]$-কেই finite-সংখ্যক ছাতার তলায় চাপা দেওয়া যায়।

Step 2: Shall show $[a,b]$ can be covered with finitely many U_α's.

We have shown $b \in N(b,\epsilon) \subseteq U_{\alpha^*}$.

$\because b = \sup B, \ \therefore \exists c \in B \quad c > b - \epsilon.$

> Thus, $[a, c]$ can be covered by finitely many U_α's.
> Also $[c, b]$ can be covered by just U_{α^*}.
> So $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$ can be covered by finitely many U_α's, as required.

এতক্ষণ ধরে নিয়েছিলাম যে E একটা interval. এবার যে কোনো closed, bounded set-এর জন্য প্রমাণটা করব।

> Step 3: Shall prove for any closed and bounded set E.
> Since E is bounded, $\exists M$ such that $E \subseteq [-M, M]$.
> Let $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ be any open cover of E. Here A is an index set.
> Then $\{U_\alpha : \alpha \in A\} \cup E^c$ is an open cover of $[-M, M]$, since E is closed.
> Applying step 1 we get a finite subcover for $[-M, M]$. Since $E \subseteq [-M, M]$, this is also a finite subcover for E, removing E^c, if necessary.

■

Exercise 19: If S is a closed and bounded set of real numbers, then prove that every open cover of S has a finite subcover.[4] **(2011.2a)** ■

4.2 ...Bolzano-Weierstrass

এবার দেখাব যে Heine-Borel definition আর Bolzano-Weierstrass definition দুটো সমার্থক। একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে তার জন্য আর কোনো নতুন পরিশ্রমের দরকার নেই। কারণ আমরা দেখিয়েছি--

Bolzano-Weierstrass definitions	$\Longleftrightarrow$	closed bounded	$\Longleftrightarrow$	Heine-Borel definition

সুতরাং এ থেকেই দেখতে পাচ্ছি যে--

Bolzano-Weierstrass definitions	$\Longleftrightarrow$	Heine-Borel definition

কিন্তু যদি কেউ আমাদের এটা সরাসরি দেখাতে বলে, closed, bounded ব্যবহার না করে? তারও পথ আছে। যেমন নীচের অংকটায় আমরা Heine-Borel থেকে limit point definition-এ পৌঁছব।

Example 26: Let $K \subseteq \mathbb{R}$ be such that every open covering of K contains a finite subcovering.

Show that every infinite subset of K has a limit point in K. Hence prove that $\mathbb{R}$ is not compact.[3+1] **(2005.2b)**

SOLUTION:

> First part:
>
> If K has no infinite subset, then the statement is vacuously true.
>
> Otherwise, let $V \subseteq K$ be infinite. Let, if possible, V have no limit point in K.
>
> Thus,
> $$\forall x \in K \quad \exists \epsilon_x > 0 \quad N'(x, \epsilon_x) \cap V = \phi.$$

এটা পেয়েছি limit point-এর definition-কে উল্টে। যদি K-এর অন্ততঃ একটাও limit point থাকত তবে লিখতাম

$$\exists x \in K \quad \forall \epsilon > 0 \quad N'(x, \epsilon) \cap V \neq \phi.$$

এর উল্টোটা (মানে negation) হল

$$\forall x \in K \quad \exists \epsilon > 0 \quad N'(x, \epsilon) \cap V = \phi.$$

যেহেতু $\exists \epsilon$ আছে $\forall x$-এর পরে, তাই ϵ-টা x-এর উপর নির্ভর করতে পারে। এই অংকে এই নির্ভরতাটা এক্ষুণি কাজে লাগবে, তাই ϵ_x লিখেছি।

> Consider the open cover
> $$\{N(x, \epsilon_x) \ : \ x \in K\}$$
> of K.

লক্ষ কর যে আমরা প্রতিটা x-এর উপরেই একটা করে ছাতা বসিয়েছি। বিভিন্ন x-এর জন্য ছাতাগুলো বিভিন্ন সাইজের, সেই কারণেই ϵ_x লেখার দরকার হয়েছিল। আরও লক্ষ কর, যেহেতু V-এর সব point-ই হল isolated point, তাই সবাই স্বার্থপরের মত নিজের নিজের ছাতা মাথায় দিয়ে বসে আছে। সেই ছাতার তলায় অন্য কেউ নেই (কারণ $N'(x, \epsilon_x) \cap V = \phi$).

> Since K is compact, there must be a finite subcover
> $$\{N(x_i, \epsilon_{x_i}) \ : \ i = 1, ..., n\}.$$

এদিকে প্রত্যেকটা ছাতার তলায় তো খালি একজন করেই আছে। তার মানে finite-সংখ্যক ছাতার নীচে খালি finite-সংখ্যক point-ই ঢাকা থাকতে পারে। সুতরাং V-কে finite হতে হচ্ছে, এদিকে বলা ছিল যে V হল infinite!

> Then
> $$V \subseteq \cup_{i=1}^n N(x_i, \epsilon_{x_i}) = [\cup_{i=1}^n N'(x_i, \epsilon_{x_i})] \cup \{x_1, ..., x_n\}.$$
>
> Now, by construction, $\forall i = 1, ..., k$ we have $V \cap N'(x_i, \epsilon_{x_i}) = \phi$.
>
> So $V \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$ $(\Rightarrow\Leftarrow$, since V is infinite$)$.
>
> Second part:
>
> $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ is an infinite set. But it has no limit point in $\mathbb{R}$. So by the first part, $\mathbb{R}$ is not compact.

■

আগেই বলেছি যে Heine-Borel definition আর Bolzano-Weierstrass definition দুটো যে সমার্থক সেটা প্রমাণ করার সবচেয়ে সহজ পথ হল প্রথমে closed, bounded দেখিয়ে নেওয়া। কিন্তু আমরা এক্ষুণি যে সরাসরি প্রমাণটা করলাম তাতেও খুব কিছু পরিশ্রম করতে হয় নি। কিন্তু যদি Bolzano-Weierstrass definition থেকে Heine-Borel definition-এ সরাসরি যেতে হয় তবে ব্যাপারটা বেশ জটিল হয়ে পড়ে। আমরা সেই প্রমাণটা পুরো দেব না। কিন্তু যদি তোমার এইরকম সরাসরি প্রমাণ করতে মজা লাগে তবে নীচের অংকগুলো কর, ওর মধ্যেই প্রমাণের ধাপগুলো করা আছে।

Example 27: Let a subset E of $\mathbb{R}$ be such that every infinite sequence in E has a limit point in E. Let $\delta > 0$ be any positive number. Consider the open cover $\{N(x,\delta) \;:\; x \in E\}$. Prove that it has a finite subcover.

SOLUTION: আমরা এই অংকে যে কোনো open cover-এর finite subcover বার করার চেষ্টা না করে, খালি একটা বিশেষ open cover নিয়ে কাজ করছি। তাই কাজটা সহজে হওয়া উচিত। পুরো অংকটা করে দেব না, খালি আভাস দিচ্ছি। এখানে contradiction লাগাব। আমাদের যে cover-টা দেওয়া আছে সেটা হল প্রতিটা point-এই একটা করে δ-সাইজের ছাতা বসানো। যদি কোনো finite subcover না থাকে তবে পর পর point তুলতে পারব $x_1, x_2, x_3, \ldots$ এমনভাবে যাতে x_2 থাকে x_1-এর ছাতার বাইরে, x_3থাকে x_1, x_2 দুজনের ছাতারই বাইরে, ইত্যাদি। সুতরাং একটা infinite sequence পেলে $\{x_n\}_n$. এইবার ভাবো কী করবে! ■

এর পরের ধাপটা একটু বেশী শক্ত।

Example 28: Let $E \subseteq \mathbb{R}$ be such that every infinite sequence in E has an accumulation point in E. Let $\{U_i \;:\; i \in \Lambda\}$ be any open cover of E. Prove that

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad \exists i \in \Lambda \quad N(x,\delta) \cap E \subseteq U_i. \tag{*}$$

SOLUTION: প্রথমে বুঝে নিই যে কী দেখাতে বলেছে। এখানে E যেকোনো একটা set, যাকে প্রচুর ছাতা দিয়ে ঢেকে রাখা আছে--$\{U_i \;:\; i \in \Lambda\}$. এদের মধ্যে ছোটো বড় নানা মাপের ছাতা থাকতে পারে। এবার আমাদের কাজ হল এমন একটা ছোট্টো ফোল্ডিং ছাতা বানানো যেটা তুমি যেখানে খুশী বসিয়ে দিতে পারো, সব সময়েই ওটা কোনো একটা U_i ছাতার তলায় ফিট্ করে যাবে। এই ফোল্ডিং ছাতার সাইজের নাম দিয়েছি $\delta > 0$. এরকম একটা δ যে সম্ভব সেটা দেখানোই আমাদের কাজ। প্রসঙ্গতঃ বলে রাখি যে এইরকম $\delta > 0$-কে বলে open cover-টার একটা Lebesgue number.
এটা প্রমাণ করার একটা কায়দা হল contradiction লাগানো। প্রথমে (*)-এর negation নাও--

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in E \quad \forall i \in \Lambda \quad N(x,\delta) \cap E \not\subseteq U_i.$$

তার মানে আমরা ধরে নিচ্ছি যে সব $\delta > 0$-র জন্যই এটা ঠিক। যদি $\delta = \frac{1}{n}$ নিই (যেখানে $n \in \mathbb{N}$) তবে পাব--

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in E \quad \forall i \in \Lambda \quad N(x_n, \tfrac{1}{n}) \cap E \not\subseteq U_i.$$

সুতরাং একটা infinite sequence $\{x_n\}_n \subseteq E$ পাওয়া গেল। এবার কী করবে? ■

Exercise 20: উপরের অংকদুটোকে ব্যবহার করে অনায়াসেই প্রমাণ হয়ে যায় যে $E \subseteq \mathbb{R}$ যদি sequential definition অনুযায়ী compact হয় তবে Heine-Borel definition অনুযায়ীও compact হতে বাধ্য। প্রমাণটা কর তো! ■

DAY 5
Basic properties

আমরা আদৌ compact set নিয়ে মাথা ঘামাচ্ছি কেন? এর কারণ হল compact set-রা হল finite set-এর বড় ভাই। এটা বোঝাই যায় যে infinite set-দের তুলনায় finite set-দের নিয়ে কাজ করা সহজ। এই সব সুবিধার অনেকগুলোই compact set-দের বেলাতেও পাওয়া যায়। মনে রেখো যে finite set মাত্রেই কিন্তু compact হতে বাধ্য। সেটা প্রমাণ করা দিয়েই শুরু করি।

5.1 Finite sets are compact

THEOREM
Any finite subset of $\mathbb{R}$ is compact.

Proof: এর প্রমাণ অতি সহজ--finite set মাত্রেই আমরা জানি যে closed হয়, আর finite যখন তখন bounded তো বটেই!

> Let $A \subseteq \mathbb{R}$ be any finite set. Shall show that A is compact, *i.e.*, closed and bounded.
>
> Let $A = \{a_1, ..., a_n\}$ with $a_1 < \cdots < a_n$.
>
> Then
> $$A^c = (-\infty, a_1) \cup (a_1 \cup a_2) \cup \cdots \cup (a_n, \infty),$$
> which is a union of open intervals, and hence open. So A is closed.
>
> Also A is bounded (from above by a_n and from below by a_1).
>
> Thus A is compact.

[Q.E.D]

কিন্তু compact set মানেই যে finite হতে হবে এমন কোনো কথা নেই। যেমন $[0,1]$ মোটেই finite নয়, কিন্তু দিব্যি একটা compact set. তাই আমরা বলি যে compact set হল finite set-এর একটা generalisation.

5.2 Maximum এবং minimum

Finite set-এর সঙ্গে একটা compact set-এর নানা মিল পাওয়া যায়। যেমন যে কোনো finite set-এই (ϕ বাদে) একটা maximum element এবং একটা minimum element থাকে--যেমন $\{1,3,6\}$-এর maximum element হল 6, আর minimum element হল 1. এই গুণটা কিন্তু সব infinite set-এর থাকে না, যেমন $\mathbb{N}$-এর কোনো maximum element নেই (যদিও minimum element আছে)। আবার $(0,1)$-এর maximum বা maximum কোনোটাই নেই। সাবধান, ভুল করে যেন 1-কে $(0,1)$-এর maximum element ভেবে বোসো না! সেটা ভুল হবে কারণ 1 মোটেই $(0,1)$-এর element নয়--$1 \not\in (0,1)$. তাই $1 = \sup(0,1)$ হলেও ওকে maximum element বলা যায় না।

Exercise 21: নীচের set-গুলোর maximum element থাকলে বার কর, না থাকলে বল।
(1) $\mathbb{R}$ **(2)** $\mathbb{Q}$ **(3)** $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ **(4)** $\mathbb{Q}^c \cap [0,1]$ **(5)** $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ **(6)** $\left\{-\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$
■

কিন্তু compact set-দের (ϕ বাদে) সব সময়েই maximum এবং minimum element থাকে, ঠিক finite set-দের মত। যেমন $[0,1]$ একটা infinite set, কিন্তু compact, তাই maximum element আছে, 1, আর minimum element আছে, 0.
Compact set-দের এই ধর্মটা এবার গুছিয়ে প্রমাণ করা যাক।

Example 29: Let $E \subseteq \mathbb{R}$ be a nonempty compact set. Does E contain a greatest element? Justify your answer.[2] **(2005.2c)**
SOLUTION:

> $\because E$ is compact, $\therefore E$ is bounded, and hence bounded from above.
> $\because E \neq \phi$, it has a supremum.
> Let $\ell = \sup E \in \mathbb{R}$.

এবার দেখাতে হবে যে $\ell = \max(E)$. তার জন্য এটা দেখালেই চলবে যে $\ell \in E$.

> Shall show $\ell \in E$ to complete the proof.
> Let, if possible, $\ell \notin E$.
> Then ℓ must be a limit point of E.
>
> ⟦ Because:
> $\forall \epsilon > 0\ \exists a \in E$ with $\ell - \epsilon < a \leq \ell$.
> But since $\ell \notin E$, so $a \in E \cap (\ell - \epsilon, \ell)$. Hence
> $$\forall \epsilon > 0 \quad E \cap N'(\ell, \epsilon) \neq \phi.$$
> ⟧
>
> Since $\ell \notin E$, so E cannot be closed ($\Rightarrow\Leftarrow$, since a compact set must be closed).

■

একইভাবে নীচের অংকটাও হবে।

Exercise 22: If $E \subseteq \mathbb{R}$ is a nonempty compact set, show that E contain a minimum element. ■

5.3 Closed subsets

যে কোনো finite set-এর যাবতীয় subset-ই finite হতে বাধ্য। এই কথাটা কি compact set-দের বেলাতেও প্রযোজ্য? না, একটা compact set-এর এমন subset থাকতেই পারে যেটা compact নয়।

Exercise 23: $[0, 1]$ একটা compact set. এর এমন একটা subset দেখাতে পারো যেটা compact নয়? ■

একটা compact set-এর যে কোনো subset যদিও compact নাও হতে পারে, কিন্তু closed subset-রা কিন্তু compact হবেই। তার কারণটা সহজ--subset-টাকে closed তো বলেই দিয়েছে, আর মূল set-টা যেহেতু compact, তাই bounded-ও বটে, সুতরাং subset-টাও bounded. নীচের দুটো অংক এই কথাটারই দুটো রূপ।

Example 30: If A and B are respectively closed and compact subsets of the real line $\mathbb{R}$ then show that $A \cap B$ is compact.[3] **(2005.1a)**
SOLUTION: এখানে B একটা compact set আর $A \cap B$ হল তার একটা subset. বুঝতেই পারছ যে $A \cap B$ হল একটা closed set, কারণ A, B দুজনেই closed.

> Shall show that for all open covers of $A \cap B$ there is a finite subcover.
> Fix any open cover $\{U_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$ of $A \cap B$.
> Thus, each U_α is open in $\mathbb{R}$ and
> $$A \cap B \subseteq \cup_{\alpha\in I} U_\alpha.$$
> Now since B is closed in $\mathbb{R}$, its complement B^c must be open in $\mathbb{R}$.
> Also
> $$A \subseteq (A \cap B) \cup B^c \subseteq (\cup_{\alpha\in I} U_\alpha) \cup B^c.$$
> So $\{U_\alpha \ : \ \alpha \in I\} \cup \{B^c\}$ is an open cover for A.
> Since A is compact, it has a finite subcover. Let the U_α's present in this subcover be
> $$U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}.$$
> Then these must form a subcover for $A \cap B$.

■

Example 31: Prove without using the Heine-Borel theorem that for any subset A of a compact set K in $\mathbb{R}$, $\overline{A}$ is compact. ($\overline{A}$ denotes the closure of A.) [4] **(2010.2a)**

SOLUTION: এখানে K খালি bounded হলেই চলত।

> Shall show that $\overline{A}$ is compact, ie, closed and bounded.
> By standard property of closure $\overline{A}$ we know that $\overline{A}$ is a closed set.
> Also K is bounded, and so $A \subseteq K$ is bounded, ie,
> $$\exists B > 0 \quad A \subseteq [-B, B].$$
> So every limit point A is also a limit point of $[-B, B]$,
> ie, $A' \subseteq [-B, B]' \subseteq [-B, B]$, since $[-B, B]$ is a closed set.

আসলে $[-B, B]' = [-B, B]$ হবে, কিন্তু আমাদের এখানে খালি $\subseteq$ দিয়েই কাজ চলে যাচ্ছে, তাই সেটুকুই লিখেছি।

> $\therefore A'$ is a bounded set.
> $\because$ Union of two bounded sets is bounded,
> $\therefore \overline{A} = A \cup A'$ is bounded.

তার মানে closed তো ছিলই, এবার bounded-ও দেখানো গেল, অতএব compact হওয়া ঠেকায় কে?

> $\therefore \overline{A}$ is compact, as required.

■

Exercise 24: একটা compact set-এর সব subset-ই compact নাও হতে পারে, সেটা আমরা আগেই বলেছি। কিন্তু ধরো তোমাকে একটা বিশেষ compact set K এমন দিলাম, যার সব subset-ই compact. তবে দেখাতে পারো যে K অবশ্যই একটা finite set হতে বাধ্য? ■

5.4 কার মধ্যে compact?

আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে open আর closed set-এর সংজ্ঞা শিখেছিলাম, যেমন $A \subseteq \mathbb{R}$-কে বলব open in $\mathbb{R}$ যদি

$$\forall a \in A \quad \exists \delta > 0 \quad N(a, \delta) \subseteq A.$$

এর একটা ছোটো generalisation আছে যেটা আগে কখনো উল্লেখ করি নি। সেটা এইরকম--ধরো $S \subseteq \mathbb{R}$, আর $A \subseteq S$. এবার আমরা $\mathbb{R}$-এর কথা ভুলে যাব, খালি S নিয়ে কাজ করব, S-এর বাইরে $\mathbb{R}$-এর যে অংশটা সেটা মন থেকে মুছে ফেলব। তাহলে আমরা open set-এর একটা নতুন সংজ্ঞা পাব-- A-কে বলব "open in S" যদি

$$\forall a \in A \quad \exists \delta > 0 \quad N(a, \delta) \cap S \subseteq A.$$

একইভাবে $B \subseteq S$-কে বলব "closed in S" যদি $S \setminus A$ হয় open in S.
কয়েকটা উদাহরণ দেখি।

Example 32: ধরো $S = [0, 1]$ নিলাম। তবে দেখাও যে $A = (0, 1]$ হল open in S.

SOLUTION:

■

সুতরাং লক্ষ কর যে $(0, 1]$-কে open বলব কিনা সেটা নির্ভর করছে কোন set-এর পরিপ্রেক্ষিতে বিচার করছ তার উপর--

- $(0, 1]$ আমরা জানি $\mathbb{R}$-এর মধ্যে open নয়, কিন্তু
- সেই একই $(0, 1]$ দেখা গেল $[0, 1]$-এর মধ্যে open!

যেহেতু compact set-এর definition-এ আমরা open set ব্যবহার করি, তাই মনে হতেই পারে যে compactness-এর বেলাতেও একই সমস্যা হবে। কোন set-এর পরিপ্রেক্ষিতে বিচার হচ্ছে তার উপর নির্ভর করে একই set কখনও compact হবে, কখনও আবার হবে না! মজার কথা হল compactness-এর বেলায় কিন্তু সত্যিই এমনটা হয় না। একটা set যদি compact হয় তো সে সব সময়েই compact, কোন set-এর পরিপ্রেক্ষিতে বিচার করছ তাতে কিচ্ছু এসে যায় না! সেই

কারণে "compact in S" জাতীয় ভাষা কেউ কখনো ব্যবহার করে না। Compactness ব্যাপারটা কেন কোনো পরিপ্রেক্ষিতের উপর নির্ভর করে না, সেই প্রসঙ্গে যাব না। খালি এটা compactness-এর একটা গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য বলে উল্লেখ করলাম।

Example 33: Let $E = \{r \in \mathbb{Q} \ : \ \sqrt{2} < r < \sqrt{3}\}$. Show that E is not compact in $\mathbb{Q}$, the set of rationals. **(2008.2c)**

SOLUTION: আমরা এক্ষুণি যে আলোচনা করলাম তা থেকে বুঝতে পারছ যে আলাদা করে "compact in $\mathbb{Q}$" বলার কোনো মানে হয় না, খালি "compact" বললেই চলত। যাই হোক অংকটা অবশ্য সোজাই।

> Consider $U_n = (\sqrt{2} + \frac{1}{n}, \infty) \cap \mathbb{Q}$.
> Then U_n's are open in $\mathbb{Q}$.
> Also $\{U_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ is an open cover of E in $\mathbb{Q}$.
> Here $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \cdots$.
> Let, if possible, there be a finite subcover $\{U_{n_i} \ : \ i = 1, ..., k\}$ with
> $$n_1 < \cdots < n_k.$$
> Then
> $$\cup_{i=1}^k U_{n_i} = U_{n_k} = (\sqrt{2} + \frac{1}{n_k}, \infty) \cap \mathbb{Q}.$$
> Since $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$, there is a rational $r \in (\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{n_k})$.
> This $r \in E$ but $r \notin \cup_1^k U_{n_i}$.
> So $\{U_{n_i} \ : \ i = 1, ..., k\}$ is not a cover of $E (\Rightarrow\Leftarrow)$.
> Hence E is not compact.

■

DAY 6
Compactness and continuity

একটা continuous function যদি কোনো compact set-এর উপর defined হয় তবে তার বেশ কিছু গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য জন্মায়, যেগুলো অনেক জায়গাতেই খুব কাজে লাগে। এবার এদের কথা শিখব।

6.1 Continuous image

যদি $f : D \to \mathbb{R}$ একটা function হয় আর $A \subseteq D$ হয়, তবে $f(A)$ মানে হল

$$f(A) = \{f(x) \ : \ x \in A\}.$$

এর আরেক নাম "image of A under f." লক্ষ কর যে A হল একটা set, এবং $f(A)$-ও হল একটা set. দেখা যায় যে A-র কোনো কোনো বৈশিষ্ট্য $f(A)$-র মধ্যে সংক্রামিত হয়। যেমন ধর A যদি একটা finite set হয় $A = \{a_1, ..., a_n\}$, তাহলে $f(A) = \{f(a_1), ..., f(a_n)\}$-ও একটা finite set হবে। এই রকম একটা ব্যাপার compact set-দের বেলাতেও খাটে, খালি তার জন্য f-কে continuous হতে হয়। অর্থাৎ A যদি compact হয় এবং f যদি continuous হয়, তবে $f(A)$-ও compact হবে। যেহেতু f-কে continuous নিয়েছি, তাই $f(A)$-কে অনেক সময়ে বলে একটা "continuous image of A." সুতরাং আমরা বলতে পারি যে compact set-এর continuous image সব সময়ে compact হয়।

প্রমাণটা চেয়েছে নীচের অংকে।

Example 34: Let $f : S \to \mathbb{R}$ be continuous on a compact set S. Prove that $f(S)$ is a compact set.[4] **(2007.2b,2003.2b)**

SOLUTION: আমরা compact set-এর যে কোনো সংজ্ঞা দিয়েই প্রমাণটা করতে পারি। এখানে করব Heine-Borel definition-টা দিয়ে। $f(S)$-এর যে কোনো একটা open cover নিয়ে শুরু করব, এবং তার একটা finite subcover বার করে দেখিয়ে দেব।

> Let $\{U_\alpha \;:\; \alpha \in A\}$ be an open cover for $f(S)$. Here A is an index set.

কায়দাটা হল এইরকম--যেহেতু S-কে compact বলা আছে, তাই আমরা এই open cover-টা থেকে S-এর একটা open cover বানাব, এবং S-এর compactness ব্যবহার করে সেটার finite subcover বার করব। সেখান থেকে কোনোভাবে আমরা $f(S)$-এর finite subcover বার করব।

> Then $\{f^{-1}(U_\alpha) \;:\; \alpha \in A\}$ is an open cover for S.

কেন? কারণ আমরা এ বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম যে f যদি continuous হয় আর U হয় open, তবে $f^{-1}(U)$-ও open হবে।

> ⟦ Because:
>
> $\because U_\alpha$ is open and f is continuous,
> $\therefore f^{-1}(U_\alpha)$ is open.
> আর cover কেন হবে সেটা কষলেই দেখবে--
> If $s \in S$ then $f(s) \in f(S)$.
> $\therefore f(s) \in U_{\alpha^*}$ for some $\alpha^* \in A$.
> $\therefore s \in f^{-1}(U_{\alpha^*})$.
>
> ⟧

এবার এই নতুন open cover-টার একটা finite subcover বার করব--

> By compactness of S, we can extract a finite subcover $\{f^{-1}(U_{\alpha_1}), \ldots, f^{-1}(U_{\alpha_n})\}$.

এবং সেখান থেকে তৈরী করব গোড়ার open cover-টার একটা finite subcover.

> Then $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ is a finite subcover for $f(S)$.
>
> ⟦ Because:
>
> If $y \in f(S)$, then $y = f(x)$ for some $x \in S$.
> Now $x \in f^{-1}(U_{\alpha_i})$ for some i.
> Then $y = f(x) \in U_{\alpha_i}$.
>
> ⟧
>
> This completes the proof that $f(S)$ is compact.

■

এবার একই অংক সামান্য অন্য ভাষায়।

Exercise 25: Prove that the image of a compact set of real numbers under a real-valued continuous function is compact.[3] **(2011.2d,2009.2c)** ■

নীচের অংকটা আরো সহজ, খালি bounded দেখালেই হবে। এই অংকটার সমাধান আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডেই করেছিলাম, কোনো compactness ব্যবহার না করেই, স্রেফ Bolzano-Weierstrass theorem লাগিয়ে।

Exercise 26: If $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is continuous, then prove that f is bounded.[2] **(2012.2c)** ■

Exercise 27: Compact set-দের বেলায় continuous image নিয়ে যা বলা যায়, সেরকম কোনো কথা কিন্তু open বা closed set-দের বেলায় চলে না। এমন একটা উদাহরণ দাও $f : U \to \mathbb{R}$ যেখানে $U \subseteq \mathbb{R}$ একটা open set, f একটা continuous function, কিন্তু $f(U)$ open নয়। ■

Exercise 28: এমন একটা উদাহরণ দাও $f : V \to \mathbb{R}$ যেখানে $V \subseteq \mathbb{R}$ একটা closed set, f একটা continuous function, কিন্তু $f(V)$ closed নয়। ■

Exercise 29: এমন উদাহরণ $f : W \to \mathbb{R}$ কি সম্ভব যেখানে $W \subseteq \mathbb{R}$ একটা bounded set, f একটা continuous function, কিন্তু $f(W)$ bounded নয়? ■

এ বার দুটো অংক দিই তোমার মাথা খাটানোর জন্য।

Exercise 30: A set $A \subseteq \mathbb{R}$ is such that every continuous function $f : A \to \mathbb{R}$ is bounded. Then show that A must be compact. ■

Exercise 31: A set $A \subseteq \mathbb{R}$ is such that for every continuous function $f : A \to \mathbb{R}$ the set $f(A)$ is closed in $\mathbb{R}$. Then is it true that A must be compact? ■

নীচের অংকটায় compactness-এর উল্লেখ থাকলেও আসলে এতে compactness-এর কোনো দরকারই নেই, খালি closed বললেই চলত।

Example 35: Let $f : S \to \mathbb{R}$ be a continuous function defined on a compact set S in $\mathbb{R}$. Prove that the image under f of every Cauchy sequence of elements of S is also a Cauchy sequence.[4] **(2010.2c)**

SOLUTION:

Let $\{a_n\}_n \subseteq S$ be a Cauchy sequence.

$\because$ Every Cauchy sequence converges in $\mathbb{R}$,

$\therefore \exists \ell \in \mathbb{R} \quad a_n \to \ell$.

$\because S$ is closed, $\therefore \ell \in S$.

$\because f : S \to \mathbb{R}$ is continuous,

$\therefore f(a_n) \to f(\ell)$.

Hence $\{f(a_n)\}_n$ is a convergent sequence, and hence a Cauchy sequence, as

required.

■

এবার তোমার মাথাটা একটু গুলিয়ে দেওয়ার চেষ্টা করি। ধরো একটা continuous function নিলাম $f : S \to \mathbb{R}$. ধরো তার মধ্যে একটা sequence নিলাম $\{x_n\}_n$.আমরা এরকম একটা কথা শিখেছিলাম না যে, $x_n \to \ell$ হলে $f(x_n) \to f(\ell)$ হয়? আর এটাও তো শিখেছিলাম যে $\mathbb{R}$-এর মধ্যে একটা sequence-এর পক্ষে convergent হওয়া আর Cauchy sequence হওয়া সমার্থক! তার মানে কি এই দাঁড়াচ্ছে না যে $\{x_n\}_n$ যদি Cauchy sequence হয় আর f হয় continuous function, তাহলেই $\{f(x_n)\}_n$-ও একটা Cauchy sequence হতে বাধ্য? তাহলে উপরের অংকটায় খামোখা বাড়তি শর্তটা দিল কেন যে S হল compact? তার কারণ ওই যে তুমি বললে যেকোনো continuous function f-এর জন্যই $x_n \to \ell$ হলেই $f(x_n) \to f(\ell)$ হয় তাতে একটু গলদ আছে। এই কথাটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা করার চেষ্টা কর।

Exercise 32: এমন একটা continuous $f : S \to \mathbb{R}$ দাও যেখানে S-টা compact নয়, এবং S-এর মধ্যে এমন একটা Cauchy sequence $\{x_n\}_n$ আছে যাতে $\{f(x_n)\}_n$ মোটেই Cauchy sequence নয়। ■

Exercise 33: $S \subseteq \mathbb{R}$ এমন একটা set আছে, যার ভিতরে যাই Cauchy sequence নাও না কেন, তার continuous image-ও সব সময়ে Cauchy হবে। তার মানে কি S-কে compact হতেই হবে? ■

6.2 Maximum আর minimum

আমরা দুটো জিনিস শিখেছি, এক $A \subseteq \mathbb{R}$ যদি compact হয় এবং $f : A \to \mathbb{R}$ যদি continuous হয়, তবে $f(A)$ হবে compact. আর দুই হল, যে কোনো compact set-এরই maximum এবং minimum element থাকে। এই দুটো তথ্য মিলিয়ে দাঁড়ালো--

THEOREM

If $A \subseteq \mathbb{R}$ is compact and $f : A \to \mathbb{R}$ is continuous, then f attains its maximum and minimum in A.

এবার একটু বোঝা যাক যে, যদি A compact না হত তবে কী হত। ধর যদি $A = \mathbb{R}$ আর $f(x) = x$ হত তবে f-এর কোনো maximum বা minimum থাকত না।

Exercise 34: নীচের কয়েকটা $f : A \to \mathbb{R}$ দিলাম। কোন কোন ক্ষেত্রে f-এর maximum আছে? কোন কোন ক্ষেত্রে minimum আছে?

1. $A = (0, 1), \quad f(x) = x,$
2. $A = [0, 1), \quad f(x) = x,$
3. $A = (-1, 1), \quad f(x) = x^2,$
4. $A = (-1, 4), \quad f(x) = \cos x.$

■

Example 36: Let the function f be defined on the compact subset $[-1, 1]$ of $\mathbb{R}$ as follows:

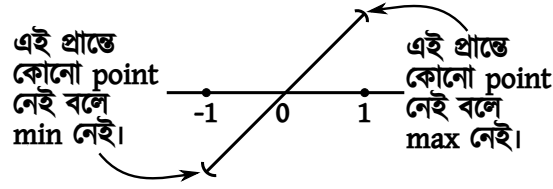



Fig 15

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{if } x = \pm 1 \end{cases}.$$

Does f attain maximum and minimum values on $[-1, 1]$? If your answer is 'yes', find the points at which f attains such values. If your answer is 'no', explain the reason for it.[3] **(2003.1a)**
SOLUTION: Fig 15 দেখলেই বুঝবে কেন $f(x)$-এর maximum বা minimum কোনোটাই নেই।

> No, f does not attain maximum and minimum values on $[-1, 1]$.
>
> ⟦ Because:
>
> Let $A = [-1, 1]$. Then $f(A) = (-1, 1) \cup \{0\} = (-1, 1)$.
> Now $\sup(-1, 1) = 1$ and $\inf(-1, 1) = -1$.
> But $1, -1 \notin (-1, 1)$.
>
> ⟧

এখানে সমস্যা হল A-টা যদিও দিব্যি compact ছিল, কিন্তু f মোটেই continuous নয়।

> We note that A is compact, but f is not continuous on A. It is discontinuous at ± 1.

■

6.3 Uniform continuity

এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে আমরা uniform continuity-র কথা শিখেছিলাম। আরও শিখেছিলাম যে $f(x)$ যদি কোনো closed, bounded set-এর উপর একটা continuous function হয়, তবে ওই set-এর উপর সেটা uniform continuous-ও হতে বাধ্য। সেই জিনিসই এখানে আবার করব, খালি এবার closed, bounded-এর বদলে compact শব্দটা ব্যবহার করে।

Example 37: If a real-valued function is continuous on a compact subset S of $\mathbb{R}$, prove that the function is uniformly continuous on S.[4] **(2008,2006,2004)**
SOLUTION:

> To show $f : S \to \mathbb{R}$ is uniformly continuous on S, ie,
>
> $$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in S \quad (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

Let, if possible, this be false. Then

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in S \quad (|x-y| < \delta \text{ but } |f(x)-f(y)| \geq \epsilon).$$

Keep such an $\epsilon > 0$ fixed. Taking $\delta = \frac{1}{n}$ for $n \in \mathbb{N}$ we have

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n, y_n \in S \quad (|x_n - y_n| < \tfrac{1}{n} \text{ but } |f(x)-f(y)| \geq \epsilon).$$

$\because S$ is compact,
$\therefore \exists \{x_{n_k}\}_k \subseteq \{x_n\}_n$ such that $x_{n_k} \to \ell$ for some $\ell \in S$.
$\because x_{n_k} - y_{n_k} \to 0$, $\therefore y_{n_k} \to \ell$ also.
$\because f$ is continuous, and $\ell \in S$, so

$$f(x_{n_k}) \to f(\ell) \text{ and } f(y_{n_k}) \to f(\ell).$$

Hence $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to 0 (\Rightarrow\Leftarrow$ since $\forall k \quad |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon)$.

■

Uniform continuity কিভাবে একটা function-এর domain-এর উপর নির্ভর করে তার একটা ভালো উদাহরণ রয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 38: Prove that x^2 is not uniformly continuous on $\mathbb{R}$, but it is uniformly continuous on any bounded set in $\mathbb{R}$. **(2003.2c)**

SOLUTION: এখানে আমরা $f(x) = x^2$ নিয়ে কাজ করব। প্রথমে domain নেব পুরো $\mathbb{R}$, তখন uniformly continuous হবে না, কিন্তু যেই domain নেব কোনো bounded set, অমনি দিব্যি uniformly continuous হয়ে যাবে! প্রথম ধাপে দেখাই যে পুরো $\mathbb{R}$-এর উপরে কেন uniformly continuous হচ্ছে না।

Step 1: Shall show that $f(x) = x^2$ is not uniformly continuous on $\mathbb{R}$.
By sequential criterion, enough to show two sequences $\{x_n\}_n$ and $\{y_n\}_n$ in $\mathbb{R}$ such that

$$x_n - y_n \to 0 \text{ but } f(x_n) - f(y_n) \not\to 0.$$

We take $x_n = n$ and $y_n = n + \frac{1}{n}$.
Then $x_n - y_n = -\frac{1}{n} \to 0$.
But

$$\begin{aligned} f(x_n) - f(y_n) &= n^2 - \left(n + \tfrac{1}{n}\right)^2 \\ &= n^2 - n^2 - 2 - \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 \\ &= -2 - \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 \\ &\to -2 \neq 0, \end{aligned}$$

as required.

এবার দেখাবো যে কোনো bounded set-এর উপরে কিভাবে uniformly continuous হচ্ছে।

> Step 2: Let $S \subseteq \mathbb{R}$ be any bounded set. Then $\exists M > 0$ such that $S \subseteq [-M, M]$.
> Since $[-M, M]$ is compact, so the continuous function $f(x)$ is uniformly continuous on $[-M, M]$.
> $\because S \subseteq [-M, M]$,
> $\therefore f(x)$ is uniformly continuous on S also, as required.

শেষের লাইনটা হল কারণ কোনো set-এর উপরে uniformly continuous হলে তার যে কোনো subset-এর উপরেও uniformly continuous হয়। ■

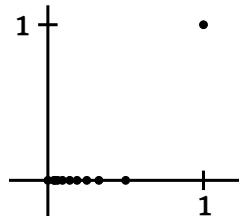
আরও একটা একইরকমের অংক।

Example 39: Let $D = \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ and $f(x) = [x]$,$x \in D$. Is f continuous on D? Is f uniformly continuous on D? Justify.[2+2] **(2012.2b)**

SOLUTION: Function-টাকে একটু গুছিয়ে লিখে নিই--

> The function is
>
> $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \{\frac{1}{n} \ : \ n \geq 2\} \cup \{0\} \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

দেখতে হবে এটা D-এর উপরে continuous কিনা। প্রথমে ছবি এঁকে আন্দাজ করে নিই (Fig 16). হঠাৎ গ্রাফটা দেখলে মনে হবে অনেকগুলো ছাড়া ছাড়া point দিয়ে তৈরী। তাই পেন না তুলে গ্রাফটা আঁকা অসম্ভব। হয়তো ভাবছ--তাহলে আর continuous হয় কী করে? কিন্তু মনে রেখো যে domain D-টা নিজেই আসলে প্রায় পুরোটাই একরাশ isolated point দিয়ে তৈরী। তাই পেন যে তুলতে হচ্ছে সেটা ঠিক f-এর দোষে নয়, সেটা আসলে D-এর দোষে। Continuity মানে হল x, y খুব কাছাকাছি এলে $f(x), f(y)$-ও খুব কাছাকাছি আসবে। তা, এখানে $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$ ইত্যাদি সবাই isolated হওয়ায় x, y-কে পরস্পরের খুব কাছাকাছি আসতে হলে $x = y$ হওয়া ভিন্ন পথ নেই। এবং তাহলে তো $f(x) = f(y)$ হবেই। এর একমাত্র ব্যতিক্রম আছে 0-তে, কারণ $\frac{1}{n}$-গুলো 0-র যতখুশী কাছে যেতে পারে। তাই দেখতে হবে $f\left(\frac{1}{n}\right) \to f(0)$ হচ্ছে কি না। সেটা না হলে f মোটেই D-এর উপর continuous হবে না। এখানে অবশ্য $n \geq 2$ হলেই $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ এবং $f(0) = 0$. তাই continuity-র পথে কোনো বাধা নেই।
এইবার পুরো ব্যাপারটাকে গুছিয়ে লিখি--

Fig 16

Step 1: Shall show that f is continuous on D, ie,

$$\forall a \in D \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a,\delta) \cap D \quad f(x) \in N(f(a),\epsilon).$$

Take any $\epsilon > 0$.

Choose $\delta = \frac{1}{2} > 0$.

Take any $x \in N(a,\delta) \cap D$.

If $a \neq 1$, then $x \neq 1$.
So $f(x) = f(a) = 0$, and hence $f(x) \in N(f(a),\epsilon)$, as required.

যদি $a = 1$ হয় তবে লক্ষ কর যে $N(a,\delta)$ মানে $N\left(1, \frac{1}{2}\right)$-এর মধ্যে D-এর খালি একটা point-ই থাকে, সে হল $a = 1$ স্বয়ং। তার মানে এক্ষেত্রে $x = a$ না হয়ে যায় না।

If $a = 1$, then $N(a,\delta) \cap D = \{a\}$, and so $x = a$. Hence $f(x) \in N(f(a),\delta)$, as required.

এবার uniform continuity দেখাব। তার জন্য খালি D-কে compact দেখালেই হবে।

Step 2: Shall show that f is uniformly continuous on D.
Since $\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ has only a single limit point 0 in $\mathbb{R}$.
So D is closed in $\mathbb{R}$.
Also $D \subseteq [0,1]$ is bounded.
Hence D is compact.
We know that any continuous function on a compact domain is uniformly continuous. So f is uniformly continuous.

■

Continuous function-রা যেকোনো compact set-এর উপর bounded-ও হয় আবার uniformly continuous-ও হয়। এদের মধ্যে কোনটা বেশী শক্তিশালী? উত্তর হল--uniformly continuous হওয়াটা। কারণ uniformly continuous হলেই bounded হতেও বাধ্য। বস্তুতঃ এর জন্য domain-টার compact হওয়ারও কোনো প্রয়োজন নেই, খালি bounded হলেই হবে। নীচের অংকে ঠিক এটাই দেখাতে বলেছে।

Example 40: Correct or justify: if a real-valued function f is uniformly continuous on a bounded set E in $\mathbb{R}$, then f must be bounded on E.[3] **(2010.1b)**

SOLUTION:

Shall show that f must be bounded on E.
Let, if possible, f be unbounded on E.
Then

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists a_n \in E \quad |f(a_n)| > n.$$

> Since $\{a_n\}_n \subseteq E$ is a bounded sequence,
> $\therefore$ By Bolzano-Weierstrass theorem, it has a convergent subsequence $\{a_{n_k}\}_k$.

এইবার আমরা একটা তথ্য ব্যবহার করব যেটা আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম--

> We know that the image of a Cauchy sequence under a uniformly continuous function is again Cauchy.
>
> So $\{f(a_{n_k})\}_k$ must be Cauchy, and hence convergent.
>
> But $|f(a_{n_k})| > n_k \to \infty (\Rightarrow\Leftarrow)$.

■

6.4 Inverse

আমরা অনেক সময়ে একটা function f-কে invert করে (অর্থাৎ উল্টে) আরেকটা function বানাই f^{-1}. যেমন $y = x^3$-কে উল্টে পাই $x = y^{1/3}$. তাই $f(x) = x^3$-এর inverse হল $f^{-1}(y) = y^{1/3}$. যেহেতু একটা function লেখার সময়ে variable-টার নাম গুরুত্বপূর্ণ নয় তাই আমরা inverse-টাকে $f^{-1}(x) = x^{1/3}$-ও লিখতে পারি। একইভাবে $f(x) = e^x$-এর inverse হল $f^{-1}(x) = \log_e x$.
f-এর গ্রাফ আর f^{-1}-এর গ্রাফের মধ্যে একটা মজার সম্পর্ক আছে, যেটা ব্যবহার করে f-এর গ্রাফ জানলেই তা থেকে তৎক্ষনাৎ f^{-1}-এর গ্রাফ এঁকে ফেলা যায়। কায়দাটা এইরকম--যেহেতু $y = f(x)$ থেকে $x = f^{-1}(y)$ পেয়েছি তাই $f(x)$-এর গ্রাফে x-axis আর y-axis-এর স্থানবিনিময় করে দিলেই f^{-1}-এর গ্রাফ পাওয়া যায়। এইটাকে ভাবা যায় যেন $y = x$ লাইন বরাবর reflection (প্রতিফলন)। Fig 17 আর Fig 18 দেখলে দুটো উদাহরণ পাবে। ঠিক যেন $y = x$ লাইন বরাবর একটা আয়না বসানো আছে, তার দু পিঠেই পারদ মাখানো। তাহলে x-axis-এর ছায়া পড়বে y-axis-এ, আর y-axis-এর ছায়া পড়বে x-axis-এ।
এবার একটা অদ্ভুত প্রশ্ন করি। এমনটা কি সম্ভব যে $f(x)$ হল continuous কিন্তু $f^{-1}(x)$ হল discontinuous? তুমি হয়তো ভাবছ সেটা কি করে সম্ভব-- f যদি continuous হয় তবে তার গ্রাফে কোনো ভাঙাচোরা নেই, তাহলে প্রতিফলনের পর কী করে ভাঙাচোরা আসতে পারে? মজার কথা হল $f(x)$ continuous হলেও কিন্তু $f^{-1}(x)$-টা discontinuous হতেই পারে! এ যেন একটা ভূতুড়ে আয়না, তার সামনে একটা কাঁচের গ্লাস রাখলে, গ্লাসটা আস্ত রইল কিন্তু আয়নায় তার প্রতিফলনটা ভেঙে চুরমার! অবশ্য অংকের জগতে ভূতুড়ে কিছু চলে না। ভৌতিক আয়না ছাড়াই এ ব্যাপারটা কী করে সম্ভব ভাবতে থাকো। ততক্ষণে আমরা নীচের অংকটা করে নিই, তারপরে ভূতের রহস্যের কিনারা করব।

Example 41: If $S(\subset \mathbb{R})$ is a compact set and $f : S \to \mathbb{R}$ is one-one and continuous on S. Prove that $f^{-1} : E \to S$ is continuous on E where $E = f(S)(\subset \mathbb{R})$.[4] **(2004.2c)**

Fig 17

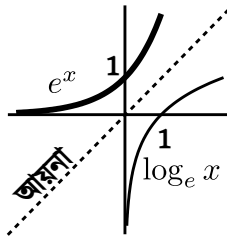
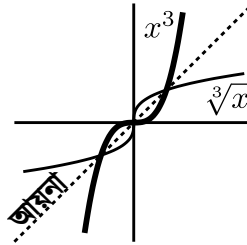



Fig 18

SOLUTION: এই অংকেও আমরা f^{-1}-এর continuity নিয়ে মাথা ঘামাব। দুটো শর্ত লক্ষ কর--এক, f-কে one-one বলেছে (নইলে f^{-1}-টা exist করতে না)। দুই, S-কে বলা আছে compact. এই শর্তটাই হল মোক্ষম, এটা আছে বলেই এখানে কোনো ভূতুড়ে ব্যাপার হবে না। আমরা প্রমাণ করার জন্য continuity-র sequential criterion লাগাব।

> Let $\{a_n\}_n \subseteq E$ be any sequence such that $a_n \to \ell \in E$.
> Shall show that $f^{-1}(a_n) \to f^{-1}(\ell)$.
> This will prove that f is continuous on E, by sequential criterion.

প্রথমে $f^{-1}(a_n)$-এর একটা নাম দিয়ে নিই--

> Let $b_n = f^{-1}(a_n)$.

দেখাতে হবে যে b_n-গুলোর limit হল $f^{-1}(\ell)$. সমস্যা হল এই যে b_n-গুলো যে আদৌ কোনো limit আছে কিনা সেটাই আমরা এখনো জানি না, limit-টা বার করা তো দূরের কথা। এইরকম জায়গায় $\limsup$ আর $\liminf$ নিয়ে কাজ করা সুবিধাজনক, কারণ ওদের অস্তিত্ব নিয়ে অন্ততঃ কোনো সন্দেহ নেই, ওরা সব সময়েই exist করে।

> Then $\{b_n\}_n \subseteq S$ is a bounded sequence.
> Let $\limsup b_n = b$. Shall show $b = f^{-1}(\ell)$.
> $\because S$ is closed, $\therefore b \in S$.
> We know that $\exists \{b_{n_k}\}_k \subseteq \{b_n\}_n$ such that $b_{n_k} \to b$.
> $\because f$ is continuous on S,
> $\therefore f(b_{n_k}) \to f(b)$, ie, $a_{n_k} \to f(b)$.
> But $a_n \to \ell$.
> $\therefore \ell = f(b)$, ie, $b = f^{-1}(\ell)$, as required.
> Similarly, $\liminf b_n = f^{-1}(\ell)$.
> So $\lim b_n$ exists, and equals $f^{-1}(\ell)$, as required.

■

এই বার আমরা সেই ভূতুড়ে ব্যাপারটা তলিয়ে দেখব। উপরের অংকটায় S যদি compact না হত তবে কী করে f^{-1}-এর পক্ষে discontinuous হওয়া সম্ভব, যেখানে f-এর মধ্যে কোনো discontinuity নেই? একটু গুছিয়ে ভাবি-- আমাদের দরকার f^{-1}-কে discontinuous করা, তার মানে f^{-1}-এর গ্রাফে ভাঙাচোরা আছে। সেটা হল f-এর গ্রাফের প্রতিফলন,

Fig 19

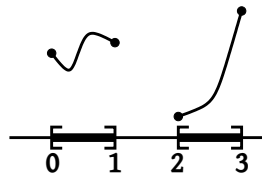
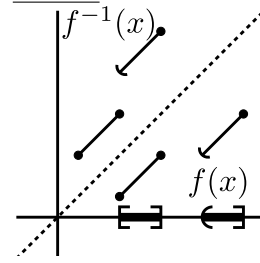



Fig 20

এবং আয়নাটা ভৌতিক নয়, সুতরাং f-এর গ্রাফেও ভাঙাচোরা থাকতে বাধ্য। এমন কী গ্রাফ আছে, যাকে ভাঙাচোরা থাকা সত্ত্বেও continuous বলা যায়? উত্তর হল--যদি ভাঙাচোরাটা হয় domain-এর মধ্যে ফাঁক থাকার জন্য। এই বইয়ের প্রথম খণ্ডেই আমরা শিখেছিলাম যে Fig 19-এর মত function আসলে continuous! সুতরাং যদি $f(x)$ নিই Fig 20-এর মত করে, তবেই f^{-1}-কে discontinuous করা যাবে! লক্ষ কর যে domain-টা মোটেই compact নয়।

Exercise 35: এই রকম একটা $f : S \to \mathbb{R}$-এর ফর্মুলা দিতে পারো? Fig 20-এর function-টা না হলেও চলবে, কিন্তু এমন হওয়া চাই যাতে f হয় one-one, continuous, কিন্তু $f^{-1}(x)$ মোটেই continuous না হয়। ■

বুঝতেই পারছ যে domain-এর মধ্যে ফাঁক থাকাটাই যত সমস্যার মূলে। সুতরাং যদি S-কে compact না বলে খালি একটা interval বলতাম তা হলেও এসব ভূতুড়ে ব্যাপার ঘটতে পারত না, কারণ interval-এর মধ্যে কোনো ফাঁক থাকে না। তাহলে নীচের অংকটা করে ফেলতে কোনো অসুবিধা হওয়া উচিত নয়।

Exercise 36: If $S(\subset \mathbb{R})$ is an interval and $f : S \to \mathbb{R}$ is one-one and continuous on S. Prove that $f^{-1} : E \to S$ is continuous on E where $E = f(S)(\subset \mathbb{R})$. ■

Answers

1. $\mathbb{N}, \{1,2,3\}, [0,1]$ আর $[0,\infty)$ হল closed. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, $\mathbb{Q}^c \cap [0,1], \{1,2,3\}$ আর $[0,1]$ হল bounded.
2. **(1)** হ্যাঁ **(2)** না **(3)** না **(4)** হ্যাঁ **(5)** হ্যাঁ **(6)** না **(7)** হ্যাঁ
3. না। **4.** Counterexample: For $f(x) = x$ the set is $(-\infty, 5]$, which is unbounded, and so not compact. **7.** না, কারণ তাহলে A এবং A^c দুজনেই bounded হতে হয়, সেক্ষেত্রে $\mathbb{R} = A \cup A^c$-ও bounded হয়ে যায়! **8.** $\mathbb{N}$ স্বয়ং, set of all prime numbers, $\{2n+1 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. **9.** $\left\{10 + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$.
11. না, হ্যাঁ, না, হ্যাঁ। **12.** হ্যাঁ। **13.** $\left\{\left(-2, -\frac{1}{n}\right) \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$. **14.** $\left\{\left(\frac{1}{n}, 2\right) \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$.
21. **(1)** নেই, **(2)** নেই, **(3)** আছে, 1, **(4)** নেই, **(5)** আছে, 1, **(6)** নেই।
23. $(0,1)$. **24.** যদি infinite হত তবে একটা limit point থাকত $\ell \in K$. তাহলে $K \setminus \{\ell\}$ অবশ্যই compact হত না। **27.** $U = (0,1), f(x) \equiv 5$. **28.** $V = [1,\infty), f(x) = \frac{1}{x}$. **29.** হ্যাঁ, $W = (0,1), f(x) = \frac{1}{x}$.
30. যদি A-টা unbounded হত তবে $f(x) = x$ একটা continuous function যেটা unbounded. যদি $c \notin A$ একটা limit point হয়, তবে $f(x) = 1/(x-c)$ নিয়ে দ্যাখো। **31.** হ্যাঁ।
32. $S = (0,1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_n = \frac{1}{n}$. লক্ষ কর $x_n \to 0$ হলেও $f(x_n) \to f(0)$ হচ্ছে না কিন্তু! **33.** না, যেকোনো closed set নিলেই চলবে। **34.** **(1)** max,min কোনোটাই নেই, **(2)** min আছে max নেই, **(3)** min আছে, max নেই, **(4)** max,min দুটোই আছে।
35. $f : [0,1) \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ যেখানে $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in [0,1) \\ x-1 & \text{if } x \in [2,3] \end{cases}$.

Chapter II
Riemann Integration (part 1)

DAY 7
গৌরচন্দ্রিকা

আমরা এইখানে Riemann integration শিখব। হায়ার সেকণ্ডারীতে প্রথম ক্যালকুলাস শেখার সময়ে যে integration-এর সঙ্গে পরিচয় হয়েছিল, মোটামুটিভাবে সেটাই হল Riemann integration. খালি তখন খানিকটা অন্ধের মত কয়েকটা সূত্র ব্যবহার করতাম, এবার সেগুলোর পিছনে কারণগুলো শেখার চেষ্টা করব।

আমরা কী করতে চলেছি বোঝার জন্য ধাপে ধাপে এগোব। ধরো তোমাকে Fig 1-এর rectangle-টার area বার করতে দিলাম। তুমি তৎক্ষণাৎ উত্তর দেবে $2 \times 3 = 6$.

এবার ধরো তোমাকে Fig 2(a)-র area-টা বার করতে বললাম। তাহলে তুমি এটাকে কয়েকটা rectangle-এ ভেঙে ফেলবে Fig 2(b)-এর মত করে, এবং ওদের area-গুলোকে যোগ করে দেবে।

কিন্তু যদি Fig 3-এর area বার করতে বলি তবে সেই কায়দাটা ব্যবহার করা মুস্কিল কারণ এখানে পুরো area-টাকে কয়েকটা rectangle-এ ভেঙে ফেলার কোনো সহজ পথ চোখে পড়ছে না। কিন্তু তাতে তুমি মোটেই পিছপা হবে না। এক্ষেত্রে তুমি ধাঁ করে integrate করে দেবে--

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{2^3-1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

এই integration করার ব্যাপারটা একটু ভালো করে বোঝা যাক। তুমি প্রথমে এমন একটা function ভেবে নিলে ($\frac{1}{3}x^3$) যার derivative হল x^2 এবং সেটাকে একবার $x=2$-তে এবং তারপর $x=1$-এ বার করে, একটা থেকে অন্যটা বিয়োগ করে দিলে। বেশ কথা! কিন্তু কী করে জানলে যে এর ফলে যে উত্তরটা বেরোলো সেটাই আমাদের প্রয়োজনীয় area-টা? সহজ বুদ্ধিতে তো area-র সঙ্গে derivative-এর কোনোই সম্পর্ক আছে বলে মনে হয় না!

এই অধ্যায়ে এবং পরবর্তী দুটো অধ্যায়ে আমরা এই ব্যাপারটাই তলিয়ে দেখব। এবং সেই সূত্রে আরও শিখব যে, integration by parts ইত্যাদি ফর্মুলা কেন (এবং কখন) কাজ করে।

Fig 3-র area-টাকে কয়েকটা rectangle-এ ভেঙে ফেলা যায় না বটে, কিন্তু তাও আমরা একই কায়দা এখানেও ব্যবহার করতে পারি, একটু ঘুরিয়ে। ধরো area-টার একটা নাম দিলাম A. আমরা এই A-এর value-ই বার করতে চাই। তার জন্য

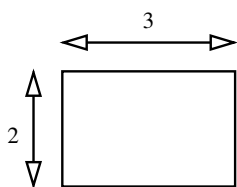
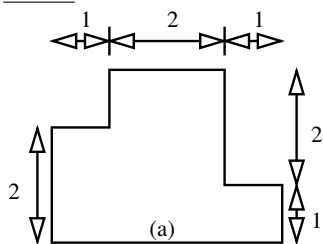
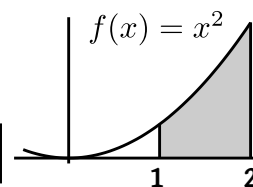
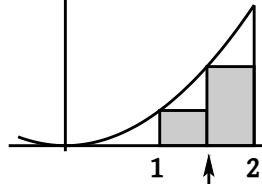



Fig 4

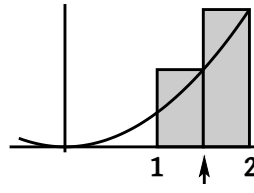



Fig 5

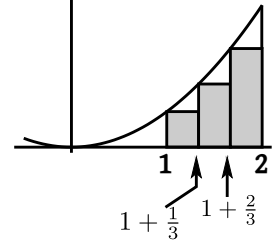



Fig 6

প্রথমে Fig 4-এর মত করে $[1,2]$-কে দুটো সমান ভাগে ভাগ করি, এবং প্রতিটি ভাগের উপরে একটা করে rectangle আঁকি, যার মাথাটা গ্রাফটাকে আলতো করে ছুঁয়ে থাকে। প্রস্থে দুজনেই $\frac{1}{2}$. দৈর্ঘ্যে প্রথমজন $1^2 = 1$ আর দ্বিতীয়জন $1.5^2 = 2.25$. তাহলে এদের মোট area হবে

$$\frac{1}{2} \times (1^2 + 1.5^2) = 1.625.$$

আমরা এখনও A কত জানি না, কিন্তু এটুকু অবশ্যই বলতে পারি যে

$$A \geq 1.625,$$

যেহেতু rectangle দুটোই গ্রাফের নীচে আছে। এবার ধরো আমরা rectangle-গুলো একটু অন্যভাবে আঁকলাম Fig 5 -এর মত করে। এখানে rectangle-গুলো সবাই গ্রাফটাকে উপর থেকে আলতো করে ছুঁয়ে আছে। এদের উচ্চতা হল 1.5^2 আর 2^2. প্রস্থ এবারও $\frac{1}{2}$ করেই আছে, তাই মোট area হল

$$\frac{1}{2} \times (1.5^2 + 2^2) = 3.125.$$

বুঝতেই পারছো যে $A \leq 3.125$ হবেই। তার মানে পেলাম

$$1.625 \leq A \leq 3.125.$$

এবার Fig 6-এর মত $[1,2]$-কে সমান তিনভাগে ভাগ করি, এবং প্রত্যেকটা ভাগের উপর একটা করে rectangle খাড়া করি। এর কেউই গ্রাফের উপরে মাথা তোলে নি, খালি গ্রাফটাকে নীচে থেকে আলতো করে ছুঁয়ে আছে।
এবার rectangle-গুলোর উচ্চতা হল--

$$1^2, \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \text{ আর } \left(1+\frac{2}{3}\right)^2.$$

যেহেতু সবারই প্রস্থ হল $\frac{1}{3}$, তাই মোট area হবে

$$\frac{1}{3} \times \left[1^2 + \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1+\frac{2}{3}\right)^2\right] = 1.8519.$$

তার মানে আমরা বলতে পারি--

$$A \geq 1.8519.$$

যদি Fig 7-এর মত করে করতাম তবে rectangle-গুলোর মোট area হত

$$\frac{1}{3} \times \left[\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1+\frac{2}{3}\right)^2 + 2^2\right] = 2.8519.$$

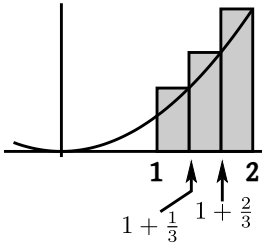
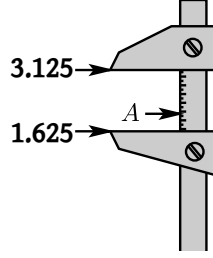
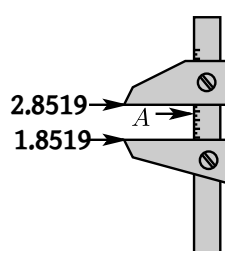
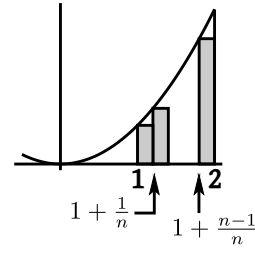



Fig 7 **Fig 8** **Fig 9** **Fig 10**

অতএব পেলাম

$$1.8519 \leq A \leq 2.8519.$$

লক্ষ কর কীভাবে আমরা A-কে উপর-নীচ থেকে সাঁড়াশির মত আরো বেশী চেপে ধরেছি (Fig 8 এবং Fig 9)। এভাবে যতই rectangle-এর সংখ্যা বাড়াব ততই A-র বেশী কাছে যেতে পারব--

ধরো n-খানা rectangle নিলাম। যদি তারা সবাই গ্রাফটাকে নীচের দিক থেকে ছুঁয়ে থাকে (Fig 10) তবে তাদের উচ্চতাগুলো হবে--

$$1^2, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^2, \quad \left(1+\frac{2}{n}\right)^2, \ldots, \left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

এতগুলো সংখ্যা নিয়ে কাজ করা মুস্কিল। তাই আমরা summation চিহ্ন ব্যবহার করব। লক্ষ কর যে সবারই প্রস্থ হল $\frac{1}{n}$ এবং i-th rectangle-টার উচ্চতা হল

$$\left(1+\frac{i-1}{n}\right)^2 \quad i=1,...,n.$$

তাই তার area হবে

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)^2.$$

এরকম n-খানা rectangle আছে $i=1,2,...,n$ পর্যন্ত। তাই মোট area হবে--

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)^2.$$

আমরা এটাকে আরেকটু সহজ করে লিখতে পারি। আশা করি মনে আছে যে,

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

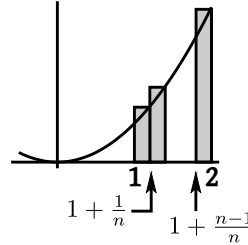
সুতরাং মোট area-টাকে যদি L_n বলি, তবে--

$$
\begin{aligned}
L_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i+n-1)^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2(n-1)\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}(n-1)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2(n-1)\frac{n(n+1)}{2} + n(n-1)^2\right] \\
&= \cdots \\
&= \tfrac{7}{3} - \tfrac{3}{2n} + \tfrac{1}{6n^2}.
\end{aligned}
$$

যদি আমরা rectangle-গুলোকে নিতাম গ্রাফের উপর দিক থেকে (Fig 11) তবে i-th rectangle-টার উচ্চতা হত $\left(1+\frac{i}{n}\right)^2$, এবং মোট area হত

$$
\begin{aligned}
U_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i+n)^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i^2+2ni+n^2) \\
&= \frac{1}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2n\sum_{i=1}^{n} i + n^3\right] \\
&= \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n \times \frac{n(n+1)}{2} + n^3\right] \\
&= \cdots \\
&= \frac{7}{3} + \frac{3}{2n} + \frac{1}{6n^2}.
\end{aligned}
$$

এত মারামারি করে আমরা কী পেলাম? আমরা এখনও A জানি না, কিন্তু এটুকু জানতে পেরেছি যে A এমন একটা আশ্চর্য

Fig 11

সংখ্যা যেটা যে কোনো $n \in \mathbb{N}$-এর জন্যই $L_n = \frac{7}{3} - \frac{3}{2n} + \frac{1}{6n^2}$ আর $U_n = \frac{7}{3} + \frac{3}{2n} + \frac{1}{6n^2}$-এর মাঝখানে পড়ে। অর্থাৎ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{7}{3} - \frac{3}{2n} + \frac{1}{6n^2} \leq A \leq \frac{7}{3} + \frac{3}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

হয়। এরকম আশ্চর্য সংখ্যা দুনিয়ায় কটা আছে? একটু চিন্তা করলেই দেখবে যে, এরকম সংখ্যা খালি একটাই আছে, সেটা হল $\frac{7}{3}$, কারণ n যতই বড় হচ্ছে (মানে $n \to \infty$ নিলে) $L_n \to \frac{7}{3}$ এবং $U_n \to \frac{7}{3}$ হচ্ছে। অর্থাৎ সাঁড়াশির দুই দিক ক্রমশঃ $\frac{7}{3}$-র দিকে চেপে আসছে, ফলে A-র পক্ষে $\frac{7}{3}$ হওয়া ছাড়া গত্যন্তর নেই। সুতরাং $A = \frac{7}{3}$, ঠিক যেটা আগে integrate করেও পেয়েছিলাম।

এই যে কাজটা করলাম এটাকেই বলে Riemann integration. অবশ্য Riemann যখন কাজটা প্রথম করেছিলেন, তখন ঠিক এইভাবেই এগোননি। তাঁর কায়দাটা ছিল বেশ কিছুটা খটমট। Darboux (ডার্বো) নামের একজন গণিতজ্ঞ পরে বার করেছিলেন যে আরো সহজ পথেও একই জিনিস করা যায়। আমরা যে উদাহরণটা করলাম সেটা Darboux-র কায়দা অনুযায়ী। এই কায়দাতে Riemann integration করাটাই বর্তমান রীতি। আমরা এই অধ্যায়ে পরে Riemann-এর খটমট কায়দাটাও দেখব।

কিন্তু আপাততঃ আমরা এগোব Darboux-র পথেই।

7.1 কী কী উপকরণ লাগবে

আমরা এখানে সবসময়েই একটা bounded function

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

নিয়ে কাজ করব। লক্ষ কর যে

- domain-টা নিয়েছি একটা closed এবং bounded interval.
- আমরা খালি সেই সব f নিয়েই কাজ করব যেগুলো bounded হবে।

এবার যা করব সেটাকে চারটে ধাপে ভেঙে লিখলে সুবিধা হবে--

1. প্রথম কাজ হল $[a, b]$-কে কয়েকটা ভাগে ভাগ করা। আমাদের উদাহরণে আমরা সব সময়ে সমান ভাগে ভাগ করছিলাম, কিন্তু সেটা না করলেও চলবে। Fig 12-এর মত হলেও আপত্তি নেই! এইটাকে বলব একটা partition:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

   লক্ষ কর যে এই partition-টায় n-খানা ভাগ আছে, যাদের বলব একেকটা subinterval. এর মধ্যে i-th subinterval-টা হল $[x_{i-1}, x_i]$, যেখানে $i = 1, 2, ..., n$. আমরা $[a, b]$-র যাবতীয় partition-এর set-কে $\mathbb{P}([a, b])$ নাম দেব। সুতরাং এর পর থেকে

   "P হল $[a, b]$-র একটা partition"

Fig 12

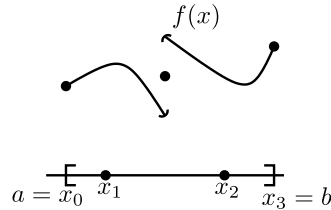
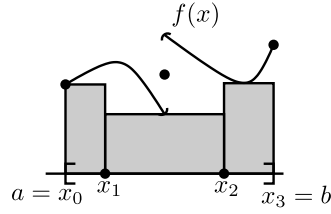



Fig 13

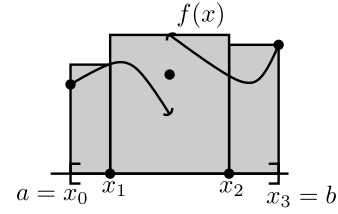



Fig 14

এই লম্বা কথাটা না লিখে খালি সংক্ষেপে লিখতে পারব

"$P \in \mathbb{P}([a,b])$."

2. দ্বিতীয় কাজ হল প্রতিটি subinterval-এর উপর দুখানা করে rectangle খাড়া করা। দুজনেই গ্রাফটাকে আলতো করে ছুঁয়ে থাকবে, একজন নীচের থেকে (Fig 13), অন্যজন উপর থেকে (Fig 14)। লক্ষ কর যে নীচের rectangle-টার উচ্চতা হল
$$m_i = \inf\big\{f(x) \;\;:\;\; x \in [x_{i-1}, x_i]\big\},$$
আর উপরেরটার উচ্চতা হল
$$M_i = \sup\big\{f(x) \;\;:\;\; x \in [x_{i-1}, x_i]\big\}.$$
এরা দুজনেই exist করে কারণ $f(x)$ হল bounded.

3. তৃতীয় কাজ হল যাবতীয় নীচের rectangle-গুলোর area যোগ করা। এই যোগফলটার একটা গালভরা নাম আছে--lower (Darboux) sum of f for partition P. লেখার সময়ে লিখি $L(P,f)$. তার মানে
$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$
একইভাবে upper (Darboux) sum of f for partition P হল উপরের rectangle-গুলোর মোট area–
$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$
অতএব মোট area-টাকে যদি A বলি তবে যে কোনো partition P-এর জন্যই
$$L(P,f) \le A \le U(P,f)$$
হতে বাধ্য।

4. চতুর্থ কাজ হল এ থেকে A বার করা। আমরা এমন সব partition P খুঁজব যাতে $L(P,f)$ খুব বড় আর $U(P,f)$ খুব ছোটো হয়, তবে A-কে উপর-নীচ থেকে সাঁড়াশির মত চেপে ধরতে সুবিধা হবে। যদি এইভাবে চেপে ধরতে ধরতে একটা point-এ এনে ফেলতে পারি, তবেই কেল্লা ফতে, কারণ A তাহলে সেই point-টাই হতে বাধ্য! তার মানে আমরা খুশী হব যদি
$$\sup\{L(P,f) : P \in \mathbb{P}([a,b])\} = \inf\{U(P,f) : P \in \mathbb{P}([a,b])\}$$
হয়। এত খুশী হব যে একটা নতুন নামই দিয়ে ফেলব--এক্ষেত্রে আমরা f-কে বলব Riemann integrable on $[a,b]$. যেহেতু এই কায়দাটা Darboux-র বার করা, তাই অনেকে একে Darboux integrable বলতে ভালোবাসে। তবে Riemann integrable কথাটাই বেশী প্রচলিত।

এই sup আর inf-টারও দুটো নতুন নাম আছে, sup-টাকে বলে lower (Darboux) integral of f on $[a,b]$. লেখার সময়ে লিখি

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P,f) : P \in \mathbb{P}([a,b])\}$$

আর inf-টাকে বলে upper (Darboux) integral of f on $[a,b]$–

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P,f) : P \in \mathbb{P}([a,b])\}.$$

যদি এরা দুজনে সমান হয় তবে তাকে বলি Riemann integral (বা কদাচিৎ Darboux integral) of f on $[a,b]$, এবং কীভাবে লিখি সে তো জানোই--

$$\int_a^b f(x)dx.$$

7.2 Area বনাম signed area

ধরো একটা function $f(x)$ আছে, এবং

$$m_i = \inf\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

যখন আমরা $[x_{i-1}, x_i]$-এর উপরে m_i উচ্চতার একটা rectangle খাড়া করে বলছি যে তার area হল $m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$, তখন আমাদের মনে যে ছবিটা ভাসছে সেটা হল Fig 15-এর মত। কিন্তু $f(x)$ যে সবসময়ে nonnegative হবে (মানে গ্রাফটা x-axis-এর উপরে থাকবে) এমন কোনো কথা নেই। ছবিটা Fig 16-এর মতও হতে পারত। সেক্ষেত্রে আমরা যেটাকে area বলছি সেটা কিন্তু negative হত--

$$m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) < 0.$$

তাই $m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$-কে area না বলে signed area বলা ভালো। আমাদের আগ্রহ এই signed area নিয়েই, area নিয়ে নয়। সেটা বোঝার জন্য Fig 17 দ্যাখো। এখানে

$$M_i = \sup\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

লক্ষ কর যে--

- Fig 17-এর rectangle-টা Fig 16-এর rectangle-এর চেয়ে ছোটো, মানে এখানে sup দিয়ে আঁকা rectangle-টা inf দিয়ে আঁকা rectangle-টার চেয়ে ছোটো!!
- কিন্তু signed area-র ক্ষেত্রে সে সমস্যা নেই। sup দিয়ে আঁকা rectangle-টার signed area সব সময়েই inf দিয়ে আঁকা rectangle-এর signed area-র চেয়ে বড় হবে, তা $f(x)$-এর গ্রাফ x-axis-এর উপরেই থাক আর নীচেই থাক।

Fig 15

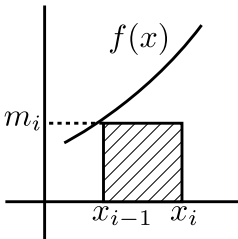



Fig 16

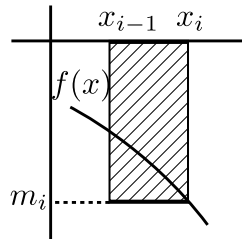
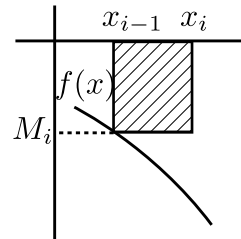



Fig 17

7.3 Partitions

এবার আমরা সব কিছু অংকের ভাষায় গুছিয়ে লেখা শুরু করব। প্রথমে partition-এর সংজ্ঞা দিয়ে শুরু করি।

> **DEFINITION: Partition**
>
> A **partition** of $[a, b]$ is a finite subset of $[a, b]$ containing the two end points a and b. The set of all partitions of $[a, b]$ is denoted by $\mathbb{P}([a, b])$.

এরপর লিখি lower sum আর upper sum-এর সংজ্ঞা--

Example 1: Define the lower sum $L(f, P)$ and the upper sum $U(f, P)$ of a bounded function f defined on $[a, b]$ corresponding to a partition P of $[a, b]$.[2] **(2006.4b (part 1))**

SOLUTION: Sum-দুটোকে এখানে $U(f, P)$ আর $L(f, P)$ লিখেছে, আমরা এতক্ষণ অবশ্য P-টাকে f-এর আগে বসিয়ে $U(P, f)$ আর $L(P, f)$ লিখছিলাম। এর কোনো ধরাবাঁধা নিয়ম নেই। আমরা এই বইয়ে সবসময়ে $U(P, f)$ আর $L(P, f)$-ই লিখব।

> **DEFINITION: Lower and upper sums**
>
> Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a bounded function. Let $P \in \mathbb{P}([a, b])$ be the partition
>
> $$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$
>
> Then the lower sum $L(P, f)$ and the upper sum $U(P, f)$ are defined as
>
> $$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot (x_i - x_{i-1})$$
> $$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot (x_i - x_{i-1}).$$
>
> The inf and the sup exist because f is bounded.

■

যদি $[a, b]$-র একটা partition দিই P, তবে P-কে তুমি ভাবতে পারো $[a, b]$-র একটা finite subset হিসেবে যার মধ্যে দুটো প্রান্ত a আর b থাকবেই। সুতরাং যদি এবার P-এর মধ্যে $[a, b]$-র আরো খানকয়েক point ঢুকিয়ে দাও, তবে নতুন set-টাও $[a, b]$-র একটা partition হবে। এই নতুন partition-টাকে বলব প্রথমটার একটা refinement. যেমন $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ হল $[0, 1]$-এর একটা partition. Fig 18 দ্যাখো। এর মধ্যে যদি $\frac{2}{3}$ এবং $\frac{1}{9}$ ঢুকিয়ে দিই তবে পাব এই নতুন partition-টা--$\{0, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$, যেটা আগের partition-টার একটা refinement (Fig 19)।

> **DEFINITION: Refinement**
>
> Let $P, Q \in \mathbb{P}([a, b])$. If $P \subseteq Q$ then we call Q a **refinement** of P.

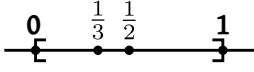
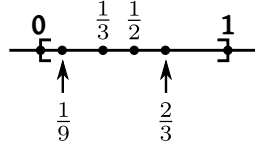
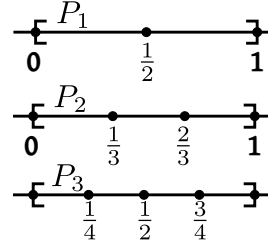



Fig 18 **Fig 19** **Fig 20**

কোনোকিছুকে refine করা মানে তাকে সূক্ষ্মতর করে তোলা। যেমন refined চিনির দানা সাধারণ চিনির দানার চেয়ে বেশী সূক্ষ্ম হয়। একটা partition-এ যদি নতুন নতুন point যোগ করা হয়, তবে partition-টা সূক্ষ্মতর হয়ে ওঠে, সেই অর্থে refinement কথাটা যুৎসই হয়েছে। কিন্তু তা বলে নীচের অংকটা করতে সাবধান!

Exercise 1: Fig 20-তে $[0,1]$-এর তিনটে partition দেওয়া আছে। P_2 কি P_1-এর একটা refinement? P_3 কি P_1-এর একটা refinement? ■

একটা partition P-কে যতই refined করবে, ততই $U(P,f)$ কমবে এবং $L(P,f)$ বাড়বে। এটা কেন হবে সেটা না বুঝলে নীচের অংকটা দ্যাখো।

Example 2: If Q is a refinement of a partition P of $[a,b]$ then show that

$$L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f,Q) \leq U(f,P).$$

Hence deduce that no lower sum can exceed any upper sum.[3+1] **(2006.4b (part 2))**

SOLUTION:

First part:

Step 1: Shall show $L(Q,f) \leq U(Q,f)$:

Let Q be $a = y_0 < \cdots < y_n = b$.

Let for $i = 1, ..., n$,

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) \;:\; x \in [y_{i-1}, y_i]\}, \\ M_i &= \sup\{f(x) \;:\; x \in [y_{i-1}, y_i]\}. \end{aligned}$$

Then $\forall i \quad m_i \leq M_i$.

$$\begin{aligned} \therefore L(Q,f) &= \sum_1^n m_i \cdot (y_i - y_{i-1}) \\ &\leq \sum_1^n M_i \cdot (y_i - y_{i-1}) \\ &= U(Q,f), \end{aligned}$$

as required.

এইবার আমরা $L(P,f)$ আর $L(Q,f)$-র মধ্যে তুলনা করব।

Step 2: Shall show that $L(P, f) \leq L(Q, f)$:
Given: $P \subseteq Q$.
Let P be $a = x_0 < \cdots < x_m = b$.
Let $t_1, ..., t_k$ be the new points in Q that were not in P.

যেমন ধরো P যদি হয় $0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$, আর Q হয় $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < 1$, তবে t_1, t_2 হল $\frac{1}{2}$ আর $\frac{3}{4}$. এই নতুন point-গুলোকে একে একে P-তে যোগ করব--

Define the partitions

$$\begin{aligned} P_0 &= P \\ P_1 &= P_0 \cup \{t_1\} \\ P_2 &= P_1 \cup \{t_2\} \\ &\vdots \\ P_k &= P_{k-1} \cup \{t_k\} = Q. \end{aligned}$$

Shall show $L(P_0, f) \leq L(P_1, f)$.

এটা দেখানোই যথেষ্ট কারণ এটা যদি হয় তবে তবে একই যুক্তিতে $L(P_1, f) \leq L(P_2, f)$, ইত্যাদিও হবে।

Let $t_1 \in [x_{i-1}, x_i]$.
Let

$$\begin{aligned} m_i' &= \inf\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, t_1]\}, \\ m_i'' &= \inf\{f(x) \ : \ x \in [t_1, x_i]\}. \end{aligned}$$

$\because [x_{i-1}, t_1], [t_1, x_i] \subseteq [x_{i-1}, x_i]$
$\therefore m_i', m_i'' \geq m_i$.

$$\begin{aligned} \therefore \quad & L(P_1, f) - L(P_0, f) \\ = \quad & m_i' \cdot (t_1 - x_{i-1}) + m_i'' \cdot (x_i - t_1) - m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ \geq \quad & m_i \cdot (t_1 - x_{i-1}) + m_i \cdot (x_i - t_1) - m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ = \quad & 0. \end{aligned}$$

So $L(P_0, f) \leq L(P_1, f)$.
Similarly,

$$L(P_0, f) \leq L(P_1, f) \leq \cdots \leq L(P_k, f) = L(Q, f).$$

Step 3: Similarly, considering supremum, $U(P, f) \geq U(Q, f)$. So combining we

get

$$L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f,Q) \leq U(f,P),$$

as required.

এবার দেখাব যে কোনো lower sum-ই কখনও কোনো upper sum-এর থেকে বড় হতে পারে না।

Second part: Shall show

$$\forall D_1, D_2 \in \mathbb{P}([a,b]) \quad L(D_1,f) \leq U(D_2,f).$$

$\forall D_1, D_2$ Take any $D_1, D_2 \in \mathbb{P}([a,b])$.

Taking D_1 and $D_1 \cup D_2$, respectively, in place of P and Q in the first part, we have

$$L(D_1,f) \leq L(D_1 \cup D_2,f) \leq U(D_1 \cup D_2,f).$$

But if we take D_2 and $D_1 \cup D_2$, respectively inn place of P and Q in the first part, then we get

$$U(D_1 \cup D_2,f). \leq U(D_2,f).$$

Combining we have

$$L(D_1,f) \leq U(D_2,f),$$

as required.

■

Example 3: Let f be bounded in the closed, bounded interval $[a,b]$. If D_1 and D_2 are any two partitions over $[a,b]$, then prove that

$$L(D_2,f) \leq U(D_1,f),$$

where $U(D_1,f)$ is the upper sum of f for D_1, and $L(D_2,f)$ is the lower sum of f for D_2.[4] **(2008.6a)**
SOLUTION: আগের অংকটাই করে যেতে হবে। ■

DAY 8
Definitions of integrability (part 1)

Integration-এর বিভিন্ন সংজ্ঞা বিভিন্ন গণিতজ্ঞ বিভিন্ন সময়ে দিয়েছেন। আমরা এখানে খালি Riemann integration নিয়ে আলোচনা করছি, যার সম্পূর্ণ সংজ্ঞা সর্বপ্রথমে Riemann দিয়েছিলেন। সেই সংজ্ঞাটা একটু খটমট ছিল। একই জিনিসের অপেক্ষাকৃত সহজ একটা সংজ্ঞা দিয়েছিলেন Darboux (ডার্বো)। সেটা দিয়েই আলোচনা শুরু করি।

8.1 Darboux কী সংজ্ঞা দিয়েছিলেন

আমরা এই অধ্যায়ের গোড়ায় যা আলোচনা করেছিলাম, সেটাকে গুছিয়ে লিখে দিলেই Darboux-র সংজ্ঞাটা পাওয়া যায়।

> **DEFINITION: Upper and lower (Darboux) integrals**
>
> Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be a bounded function. Its **upper (Darboux) integral** is defined as
> $$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\left\{U(P,f) \ : \ P\in\mathbb{P}\big([a,b]\big)\right\},$$
> and **lower (Darboux) integral** is defined as
> $$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\left\{L(P,f) \ : \ P\in\mathbb{P}\big([a,b]\big)\right\}.$$
> The sup and inf both exist because f is bounded.

নীচের সংজ্ঞাটা Riemann integration-এর, কিন্তু যেহেতু এই সংজ্ঞাটা Darboux-র তৈরী তাই কোনো কোনো বইতে এটাকে Darboux integration-ও বলে।

> **DEFINITION: Riemann integration (Darboux's defn)**
>
> Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be a bounded function. We call it **Riemann integrable** if
> $$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$
> In this case the **Riemann integral** of f over $[a,b]$ is defined as
> $$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx \left[= \underline{\int_a^b} f(x)dx\right].$$

Example 4: Let $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ be defined by

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x \text{ is rational}\\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational}\end{cases}.$$

Show that f is not Riemann integrable over $[0,1]$.

SOLUTION:

Step 1: Shall show

$$\forall P\in\mathbb{P}([0,1]) \quad U(P,f)=1 \text{ and } L(P,f)=0.$$

$\forall P$ Take any $P \in \mathbb{P}([0,1])$:

$$0 = x_0 < \cdots < x_n = 1.$$

By denseness of $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ we know that there is a rational number in each subinterval.

$\therefore \sup\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1$

Similarly, by denseness of $\mathbb{Q}^c$ in $\mathbb{R}$ we know that there is an irrational number in each subinterval.

$\therefore \inf\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0.$

So

$$U(P,f) = \sum_1^n 1 \times (x_i - x_{i-1}) = 1 - 0 = 1,$$
$$L(P,f) = \sum_1^n 0 \times (x_i - x_{i-1}) = 0.$$

Step 2: Hence

$$\underline{\int_0^1} f = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1} f.$$

So f is not Riemann integrable on $[0,1]$.

■

Example 5: Let

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{if } x = \frac{m}{n}, \quad m, n \text{ nonzero integers prime to each other} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Assuming Riemann integrability of f on $[0,1]$ determine $\int_0^1 f(x)dx$.[3] **(2013.4b)**

SOLUTION: এই function-টা একটা মজার function. এটা কেবল মাত্র x-এর irrational value-গুলোতেই continuous, আর যাবতীয় rational value-তে discontinuous. এই তথ্যটা অবশ্য এই অংকে কাজে লাগবে না, কারণ এখানে Riemann integrability-টা ধরে নিতে বলেছে। যদি সেটাও প্রমাণ করে দেখাতে বলত তবে এই continuity-র তথ্যটা কাজে দিত।

Here f is bounded on $[0,1]$, and so $\underline{\int_0^1} f$ and $\overline{\int_0^1} f$ both exist (finitely). We assume Riemann integrability of f on $[0,1]$. So $\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f = \int_0^1 f$.

So enough to find $\underline{\int_0^1} f$.

এইবার চট করে ভেবে নাও f-এর গ্রাফটা দেখতে কেমন। যাবতীয় irrational point-এ 0. যেটুকু nonzero value সবই rational point-গুলোতে। আমরা জানি যে irrational-রা হল $[0,1]$-এর মধ্যে dense, তাই যাই partition নিই না

কেন, প্রত্যেকটা interval-এই অন্ততঃ একটা করে irrational সংখ্যা থাকবেই, ফলে $L(P,f)$ কোনো দিনই 0-র উপরে মাথা তুলতে পারবে না।

> For any partition $P \in \mathbb{P}([0,1])$ we have at least one irrational point in each subinterval, since irrationals are dense in $[0,1]$.
>
> Since $f \geq 0$, so minimum of f over each subinterval is 0.
>
> $\therefore L(P,f) = 0$.
>
> Since this holds for all partitions $P \in \mathbb{P}([0,1])$, hence $\underline{\int_0^1} f = 0$.
>
> So $\int_0^1 f = 0$.

■

8.2 Cauchy criterion

এবার আমরা integrability-র একটা নতুন সংজ্ঞা শিখব, যাকে বলে Cauchy criterion. Darboux-এর সংজ্ঞা অনুযায়ী integrability মানে হল upper integral এবং lower integral সমান হওয়া। এখন upper integral হল যাবতীয় $U(P,f)$-এর set-এর infimum, এবং lower integral হল যাবতীয় $L(P,f)$-এর set-এর supremum. একটা set-এর infimum আরেকটা set-এর supremum-এর সমান হওয়ার ব্যাপারটা একটা সহজ উদাহরণ নিয়ে তলিয়ে দেখি। ধরো একটা set নিলাম $(0,1)$ আর অন্যটা নিলাম $(1,2)$. তাহলে প্রথমজনের sup হল দ্বিতীয়জনের inf-এর সমান (Fig 21)। এই দুটো set যেন দুটো পাশাপাশি ঘর মাঝখানে শুধু একটা পাৎলা দেওয়াল। তাই এমন $x \in (0,1)$ আর $y \in (1,2)$ পাবে যারা পরস্পরের খুব কাছে। যেমন যদি $|x-y| = \epsilon$ চাও তবে $x = 1 - \frac{\epsilon}{2}$ আর $y = 1 + \frac{\epsilon}{2}$ নিলেই চলবে। যদি set-দুটোর মধ্যে কিছুটা ফাঁক থাকত তবে কিন্তু সেই ফাঁকের চেয়ে বেশী কাছাকাছি আসা ওদের পক্ষে অসম্ভব। তাই দুটো set $A, B \subseteq \mathbb{R}$-র গায়-গায় লেগে থাকাকে আমরা এইভাবে বলতে পারি--এমন $x \in A$ আর $y \in B$ পাওয়া সম্ভব যারা পরস্পরের যত খুশী কাছে রয়েছে। অর্থাৎ

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad \exists y \in B \quad |x-y| < \epsilon.$$

ঠিক একই যুক্তিতে আমরা integrability-র সংজ্ঞা এইভাবে লিখতে পারি--

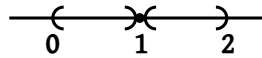
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P_1, P_2 \in \mathbb{P}([a,b]) \quad |U(P_1,f) - L(P_2,f)| < \epsilon.$$

এটাকে একটু সুন্দর করে লেখা যায়, প্রথম কথা upper sum-রা সব সময়েই lower sum-দের থেকে বড় হয়, তাই absolute value নেবার কোনো দরকার নেই। দ্বিতীয়তঃ যদি $P = P_1 \cup P_2$ নিই তবে $U(P_1,f)$-এর চেয়েও $U(P,f)$ আরও নীচে চেপে আসবে, এবং $L(P_2,f)$-এর চেয়ে $L(P,f)$ বেশী উপরে ঠেলে উঠবে, সুতরাং $U(P,f) - L(P,f) \leq U(P_1,f) - L(P_2,f) < \epsilon$ হবে। তাই দুটো partition P_1, P_2 নিয়ে কাজ না করে খালি একটা P দিয়েই আমরা লিখতে পারি--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([a,b]) \quad U(P,f) - L(P,f) < \epsilon.$$

এইটাই হল integrability-র আরেকটা নতুন সংজ্ঞা, যাকে বলে Cauchy criterion. সবটা আমরা এক্ষুণি গুছিয়ে অংকের ভাষায় লিখব, কিন্তু তার আগে বলে নিই যে একই জিনিসের আরেকটা নতুন সংজ্ঞা বানিয়ে কী বাড়তি সুবিধা হল।

Fig 21

0 1 2

Darboux-র সংজ্ঞাটা সরাসরি লাগাতে গেলে আমাদের upper এবং lower integral বার করে সমান দেখাতে হত। তার মানে integrability দেখানোর জন্য integral-টা একেবারে কষে ফেলতে হত। কিন্তু এমন অনেক উদাহরণ আছে যেখানে integral-টা বার করা ভীষণ কঠিন। সেইসব ক্ষেত্রে integrability দেখানোর জন্য Cauchy criterion হল আদর্শ। এখানে আমরা খালি $U(P,f)$ আর $L(P,f)$ নিয়ে কাজ করি, integral-টা বার করার কোনো দরকারই পড়ে না।
এবার প্রমাণ করব যে Cauchy criterion আসলে Darboux-র সংজ্ঞার সঙ্গে সমার্থক। মূল যুক্তিটা তো একটু আগেই বললাম, এবার খালি নীচের অংকের উত্তরে সেটাকে গুছিয়ে লিখে ফেলার অপেক্ষা।

Example 6: Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be a bounded function. Prove that f is Riemann integrable over $[a,b]$ if and only if corresponding to any given $\epsilon>0$, there exists a partition P over $[a,b]$ such that

$$U(P,f)-L(P,f)<\epsilon,$$

where the symbols have their usual meaning.[4] **(2007.5ai,2004.5a)**

SOLUTION:

Step 1: Given f is Riemann integrable on $[a,b]$.

Shall show

$$\forall\epsilon>0\quad\exists P\in\mathbb{P}([a,b])\quad U(P,f)-L(P,f)<\epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon>o$.

$$\because \sup\{L(P,f)\ :\ P\in\mathbb{P}([a,b])\}=\inf\{U(P,f)\ :\ P\in\mathbb{P}([a,b])\}=L,\ \text{say.}$$

$\therefore \exists P_1\in\mathbb{P}([a,b])\quad L(P_1,f)>L-\frac{\epsilon}{2}.$ and $\exists P_2\in\mathbb{P}([a,b])\quad U(P_2,f)<L+\frac{\epsilon}{2}.$

$\exists P$ Choose $P=P_1\cup P_2$.

Then

$$U(P,f)-L(P,f)\le U(P_2,f)-L(P_1,f)<\left(L+\tfrac{\epsilon}{2}\right)-\left(L-\tfrac{\epsilon}{2}\right)=\epsilon,$$

as required.

এবার উল্টো দিকটা।

Step 2: Given,

$$\forall\epsilon>0\quad\exists P\in\mathbb{P}([a,b])\quad U(P,f)-L(P,f)<\epsilon. \qquad (*)$$

Let, if possible,

$$\underline{\int_a^b} f<\overline{\int_a^b} f.$$

Define $\epsilon=\overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f>0$.

Then, by (*),

$$\exists P\in\mathbb{P}([a,b])\quad U(P,f)-L(P,f)<\epsilon.$$

But

$$U(P,f) \geq \overline{\int_a^b} f \text{ and } L(P,f) \leq \underline{\int_a^b} f.$$

So

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq U(P,f) - L(P,f) < \epsilon (\Rightarrow\Leftarrow).$$

■

Example 7: State an prove a necessary and sufficient condition for a real-valued bounded function f to be Riemann integrable over $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.[5] **(2010.6ai)**
SOLUTION: Cauchy criterion-টা বললেই চলবে। ■

Cauchy criterion-টাকে আরও একটু সহজ করে লেখা যায়। কী করে শোনো। আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম যে যদি $A \subseteq \mathbb{R}$ কোনো nonempty bounded set হয় তবে

$$\sup A - \inf A = \sup\{|x-y| \;:\; x,y \in A\}$$

হবে। এই জিনিসটা এইভাবে মনে রাখতে পারো। মনে করো এক পিঁপড়ে আর তার গিন্নী আছে, A হল তাদের বাড়ি। ওদের বেজায় ঝগড়া হয়েছে, দুজনে দুজনের চেয়ে যতটা পারে দূরে থাকতে চায়। মানে একজন যদি x বিন্দুতে থাকে, আর অন্যজন y বিন্দুতে তবে ওরা চায় $|x-y|$-কে যথা সম্ভব বড় রাখতে। বুঝতেই পারছো যে তার জন্য পিঁপড়ে থাকবে Aর একপ্রান্তে আর তার গিন্নী গিয়ে বসে থাকবে অন্য প্রান্তে। মানে একজন $\sup A$-তে থাকলে অন্যজন $\inf A$-তে।
আমাদের ক্ষেত্রে ব্যাপারটা দাঁড়াচ্ছে এইরকম--

$$\begin{aligned} & U(P,f) - L(P,f) \\ &= \sum \sup\left\{|f(x) - f(x')| \;:\; x,x' \in [x_{i-1},x_i]\right\}(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

যদি আমরা সরাসরি $U(P,f)$ আর $L(P,f)$ নিয়ে কাজ করতাম তবে একটা inf এবং একটা sup লাগত। কিন্তু $U(P,f) - L(P,f)$-কে চমৎকার একটা sup দিয়ে লিখে ফেলা গেল। এর ফলে অনেক অংক বেশী সহজে করা যাবে। এরকম উদাহরণ আমরা শীঘ্রই দেখব।
আমরা $U(P,f)$ আর $L(P,f)$-কে ছবি দিয়ে signed area হিসেবে ভাবতে শিখেছি। একইভাবে $U(P,f) - L(P,f)$-কেও ছবি দিয়ে ভাবা যায়। যেমন Fig 22-এ যে partition-টা রয়েছে সেটাকে যদি P বলি তবে $U(P,f) - L(P,f)$ হল shaded rectangle-গুলোর মোট area. এখানে কিন্তু আমাদের আর signed area নিয়ে কাজ করতে হচ্ছে না, কারণ

Fig 22

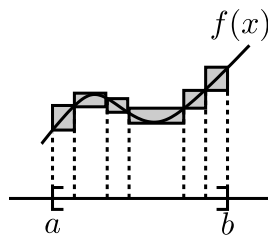



Fig 23

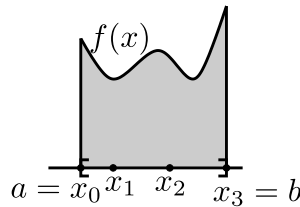
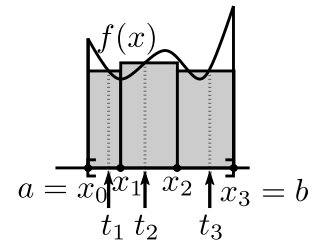



Fig 24

$U(P,f)-L(P,f)\geq 0$. ছবির rectangleগুলো যেন একটা চিনির দানার মালা, $f(x)$-এর গ্রাফটা তার মধ্যে দিয়ে সূতোর মত চলে গেছে। যদি f হয় Riemann integrable, তবে P যত সূক্ষ্ম হবে, ততই চিনির দানাগুলো ছোটো হবে, এবং ওদের মোট area যাবে 0-র দিকে।

Example 8: Let $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ be a partition of $[a,b]$, and $\int_{x_{r-1}}^{x_r} f(t)dt$ exist for $r=1,2,...,n$. Prove that $\int_a^b f(x)dx$ exists.[3] **(2014.4b)**

SOLUTION:

By Cauchy criterion it is enough to show

$$\forall\epsilon>0\quad \exists Q\in\mathbb{P}([a,b])\quad U(Q,f)-L(Q,f)<\epsilon.$$

শুরুটা যথারীতি--

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon>0$.

আমাদের বলা আছে যে--

$\because$ For each $r\in\{1,...,n\}$ we are given that f is integrable over $[x_{r-1},x_r]$,

সুতরাং প্রতিটা subinterval-এর জন্য এমন parition পাব যাতে upper আর lower sum দুটো খুব কাছাকাছি থাকে। পুরো $[a,b]$-র উপরে $U(Q,f)-L(Q,f)<\epsilon$ করতে হবে। যেহেতু মোট n-খানা subinterval আছে, তাই প্রত্যেকটার উপরে upper আর lower sum-র পার্থক্যটা ϵ/n-এর নীচে থাকলে সুবিধা হবে।

$\therefore \forall r\in\{1,...,n\}\quad \exists Q_r\in\mathbb{P}([x_{r-1},x_r])\quad U(Q_r,f)-L(Q_r,f)<\frac{\epsilon}{n}$.

$\boxed{\exists Q}$ Choose $Q=Q_1\cup\cdots\cup Q_n$.

এই union-এর জায়গাটা গোলমেলে ঠেকলে একটা উদাহরণ নিয়ে ভাবো--ধরো $[a,b]=[0,10]$, আর P হল $0<3<5<10$, মানে subinterval-এর সংখ্যা নিয়েছি $n=3$. প্রথম subinterval-টা হল $[0,3]$ এর একটা partition নিলাম ধরো $Q_1: 0<1<2<3$. একইভাবে পরের দুটো subinterval-এর বেলায় নিলাম $Q_2: 3<4<5$, আর $Q_3: 5<7<10$. তাহলে এদের সবাইকে মিলিয়ে Q হবে $0<1<2<3<4<5<7<10$.

Then $U(Q,f)=\sum_1^n U(Q_r,f)$ and $L(Q,f)=\sum_1^n L(Q_r,f)$.

$\therefore U(Q,f)-L(Q,f)=\sum_1^n(U(Q_r,f)-L(Q_r,f))<n\times\frac{\epsilon}{n}=\epsilon$, as required.

■

8.3 Riemann কী সংজ্ঞা দিয়েছিলেন

এবার দেখব Riemann কীভাবে integration-এর সংজ্ঞা দিয়েছিলেন। প্রথমে ছবি দিয়ে বোঝা যাক। Fig 23 দ্যাখো। এখানেও আমরা $[a,b]$-র যে কোনো একটা partition নিয়ে শুরু করেছি। এবার প্রতিটা subinterval-এর উপর খালি একটা করে rectangle খাড়া করব। সেটা গ্রাফটাকে উপর বা নীচ থেকে আল্‌তো করে ছুঁয়ে না থাকলেও চলবে। প্রত্যেকটা subinterval-এর মধ্যে একটা করে যা খুশী point নেব--$t_i\in[x_{i-1},x_i]$, এবং $[x_{i-1},x_i]$-এর উপর খাড়া করা rectangle-টার উচ্চতা নেব $f(t_i)$. Fig 24 দ্যাখো। এইভাবে কোনো partition-এর প্রতিটা subinterval-এর থেকে একটা করে point নেওয়ার একটা নাম আছে--একে বলে partition-টাকে tag করা। যে point-গুলোকে নেওয়া হল তাদের তালিকাটাকে বলে একটা tagging.

DEFINITION: Tagged partition

Let $P \in \mathbb{P}([a,b])$ be some partition

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

By a **tagging** of P we mean a list of n points

$$t_1, ..., t_n$$

such that $\forall i \quad t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. The pair (P,T) is called a **tagged partition** of $[a,b]$.

এবার rectangle-গুলোর মোট signed area নেব। একে বলে Riemann sum. লক্ষ কর যে Riemann sum-টা তিনটে জিনিসের উপর নির্ভর করে-- partition-টা কী, সেটাকে কীভাবে tag করা হয়েছে, এবং অবশ্যই f-এর উপর তো নির্ভর করেই। তাই আমরা Riemann sum-টাকে লিখব $R(P,T,f)$.

DEFINITION: Riemann sum

Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be any function. Let (P,T) be any tagged partition, where P

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b$$

and T is

$$t_1, ..., t_n.$$

Then the **Riemann sum** of f for (P,T) is defined as

$$R(P,T,f) = \sum_1^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

লক্ষ কর যে rectangle-গুলো মোট signed area-টা গ্রাফের নীচের মোট signed area-র চেয়ে কম হবে নাকি বেশী হবে নাকি সমান হবে সে বিষয়ে জোর দিয়ে কিছু বলা যায় না। কিন্তু যদি partition-টাকে সূক্ষ্ম থেকে সূক্ষ্মতর করি তবে অবশ্যই rectangle-গুলোর মোট signed area-টা গ্রাফের নীচের মোট signed area-র খুব কাছাকাছি যাওয়া উচিত। সুতরাং P-কে ক্রমশঃ সূক্ষ্ম করে $R(P,T,f)$-এর limit নিলেই গ্রাফের নীচের মোট signed area পাওয়া যাওয়া উচিত। এইটাই ছিল Riemann-এর পরিকল্পনা। সমস্যা খালি একটাই--কোনো partition P-কে ক্রমশঃ সূক্ষ্ম করা বলতে ঠিক কী বোঝায়। যদি partition-টায় খালি নতুন নতুন point যোগ করতে থাকি Fig 25-এর মত, তবে যে কাজ হবে না বুঝতেই পারছ। কারণ এতে খালি partition-এর একটা জায়গা সূক্ষ্ম হচ্ছে, সব জায়গা নয়। সুতরাং Darboux-র সংজ্ঞার মত এখানে refinement দিয়ে কাজ চলবে না। আমরা চাই যেন সবগুলো subinterval-এর দৈর্ঘ্যই শূন্যর দিকে যায়। বা ঘুরিয়ে বললে--আমরা চাই যেন সবচেয়ে লম্বা subinterval-এর দৈর্ঘ্যও যেন শূন্যর দিকে যায়। সবচেয়ে লম্বাটাই যদি ছোটো হয়, তবে বাকীগুলো নিয়ে তো চিন্তাই থাকে না, কারণ ওরা তো আরও ছোটো আছেই! সবচেয়ে লম্বা subinterval-এর দৈর্ঘ্যের একটা নাম আছে--norm.

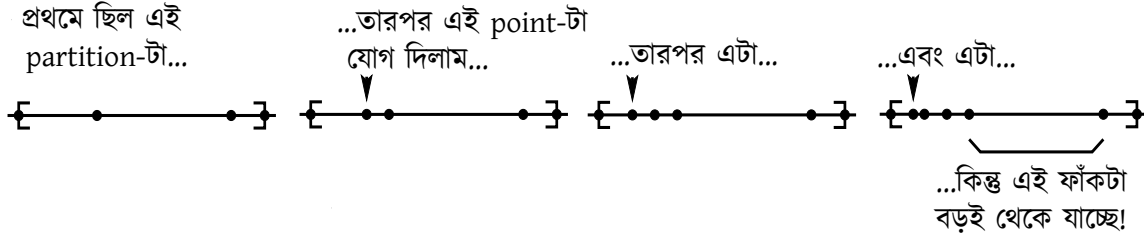



Fig 25

> **DEFINITION: Norm of a partition**
> Let $P \in \mathbb{P}([a,b])$ be
> $$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$
> Then the norm of P is defined as
> $$\|P\| = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}).$$

এবার আমাদের হাতে সব রকম হাতিয়ার এসে গেছে, সুতরাং Riemann-এর পরিকল্পনাটা বাস্তবায়িত করতে সমস্যা নেই। আমরা গ্রাফের নীচের মোট signed area-টাকে L বলব যদি

$$\lim_{\|P\| \to 0+} R(P,T,f) = L$$

হয়। যদি limit-টা একটা finite সংখ্যা না হয়? তবে বলব যে, f-টা $[a,b]$-র উপরে Riemann integrable নয়। এখানে অবশ্য একটা ব্যাপারে একটু খট্‌কা লাগতেই পারে। P-টাকে না হয় সূক্ষ্ম করলাম, কিন্তু limit বার করার সময়ে T-টাকে কী নেব? তাছাড়া P-কে তো নানাভাবে সূক্ষ্ম করা যায় যাতে $\|P\| \to 0$ হয়, তাদের মধ্যে কোনটা নেব? এই দুটো প্রশ্নেরই উত্তর একই-- $\|P\| \to 0$ বজায় রেখে যে ভাবেই তুমি P আর তার tagging T নাও না কেন limit-টা যেন একই আসে। যদি দেখা যায় যে T একভাবে নিলে limit-টা একরকম হচ্ছে, আর অন্যভাবে নিলে অন্যরকম, তবে চলবে না--সেক্ষেত্রেও আমরা বলব যে f-টা $[a,b]$-র উপরে Riemann integrable নয়। মাথা গুলিয়ে যাচ্ছে? তাহলে $\forall, \exists$ দিয়ে একেবারে গুছিয়ে লিখি, দেখতে একটু জটিল হবে, কিন্তু কোনো সন্দেহের অবকাশ থাকবে না।

> **DEFINITION: Riemann integration (Riemann's defn)**
>
> A function $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is called **Riemann integrable** on $[a,b]$ with **Riemann integral** L if
> $$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \text{ tagged partition } (P,T) \text{ of } [a,b]$$
> $$\big\{ \|P\| < \delta \implies |R(P,T,f) - L| < \epsilon \big\}.$$

লক্ষ কর এখানে f-কে আলাদা করে bounded function বলি নি। আসলে এই শর্তটা Riemann integrability-এর সংজ্ঞার মধ্যে ঢুকে আছে (সেটা আমরা কালকে প্রমাণ করব)।

আগেই বলেছি যে Riemann integration-এর সংজ্ঞাতে যে limit-টা নিয়েছি সেটা P বা T-এর উপর নির্ভর করলে চলবে না। নীচের অংকটা ঠিক এই ব্যাপারটা নিয়েই।

Example 9: Let $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ be defined by

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational}\end{cases}.$$

Using Riemann sum examine whether f is Riemann integrable over $[0,1]$ or not.[3] **(2011.5c)**
SOLUTION: আমরা দুইভাবে tagged partition নেব। দুইক্ষেত্রেই norm-টা 0-র দিকে যাবে, কিন্তু Riemann sum-এর limit দুইক্ষেত্রে আলাদা হবে।

> We shall take two sequences $\{(P_n,T_n)\}_n$ and $\{(P'_n,T'_n)\}_n$ of tagged partitions of $[0,1]$ such that $\|P_n\|\to 0+$ and $\|P'_n\|\to 0+$ and
>
> $$\lim_{n\to\infty} R(P_n,T_n,f)\neq \lim_{n\to\infty} R(P'_n,T'_n,f).$$
>
> This will show that
>
> $$\lim_{\|P\|\to 0+} R(P,T,f)$$
>
> does not exist.

প্রথমে P_n আর P'_n নিতে হবে। আমরা দুটোকেই একই partition নেব--

> For $n\in\mathbb{N}$ let P_n and P'_n both be the partition of $[0,1]$ into n equal parts:
>
> $$0=x_0<\cdots<x_n=1,$$
>
> where $x_i=\frac{i}{n}$.

এবার দুটো আলাদা tagging নেব। T_n-এর বেলায় প্রতিটি subinterval $[x_{i-1},x_i]$-এর ডানদিকের প্রান্তটা নেব। এরা সবাই rational সংখ্যা।

> Take T_n as $(x_1,...,x_n)$.

আর T'_n-এর বেলায় point-গুলোকে নেব irrational–

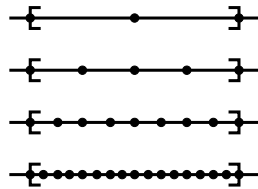
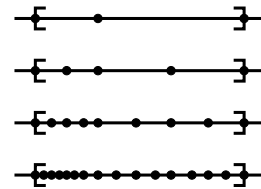



Fig 26 **Fig 27**

Again, by denseness of $\mathbb{Q}^c$ in $\mathbb{R}$ we have irrationals $y_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Let us take $T'_n = (y_1, ..., y_n)$.
Then

$$\begin{aligned} R(P_n, T_n, f) &= \sum_1^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_1^n x_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \tfrac{1}{n^2} \sum_1^n i = \tfrac{n(n+1)}{2n^2} \to \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

But

$$\begin{aligned} R(P'_n, T'_n, f) &= \sum_1^n f(y_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_1^n 0 \times (x_i - x_{i-1}) = 0 \neq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

as required.

■

DAY 9
Definitions of integrability (part 2)

Riemann এবং Darboux দুজনে কীভাবে integration-এর সংজ্ঞা দিয়েছেন দেখলে। আশা করি সন্দেহ নেই যে Darboux-র সংজ্ঞাটাই বেশী সহজ। Riemann যেভাবে এগিয়েছিলেন তাতে প্রধান সমস্যা হল limit-টা--

$$\lim_{\|P\| \to 0+} R(P, T, f),$$

অর্থাৎ যখন $\|P\|$ খুব ছোটো (মানে 0-র খুব কাছে) তখন $R(P, T, f)$ কোনদিকে এগোচ্ছে। কিন্তু মুস্কিল হল $\|P\| \to 0+$ জানা থাকলেই $R(P, T, f)$ বার করা যায় না, কারণ $\|P\|$-টা অসংখ্যরকমভাবে 0-র দিকে যেতে পারে। দুটো উদাহরণ দেখানো হয়েছে Fig 26 আর Fig 27-তে। এরকম অসংখ্য partition-এর প্রত্যেককে আবার অসংখ্যভাবে tag করা যায়। এইখানেই Riemann-এর সংজ্ঞার ঝামেলাটা--যেভাবেই তুমি P আর T নাও না কেন, $\|P\| \to 0+$ হলে যেন $R(P, T, f)$-এর limit-টা যেন একই আসে। কিন্তু বাস্তবে এরকম limit বার করব কী করে? যতরকম P আর T সম্ভব সবগুলো নিয়ে তো আর পরীক্ষা করে দেখতে পারি না। এই সমস্যার প্রতিকার করতে গিয়েই Darboux-এর সংজ্ঞাটার জন্ম। এর মধ্যে কোনো tagging বা norm-এর ঝামেলা নেই, বস্তুতঃ কোনো limit-ই নেই, পুরো কাজটাই দিব্যি sup আর inf দিয়ে সেরে ফেলা হয়েছে।
অবশ্য আমরা এখনও দেখাইনি যে Riemann আর Darboux-র সংজ্ঞাদুটো আসলে একই জিনিস বোঝায়। এবার আমরা সেইটা প্রমাণ করব।

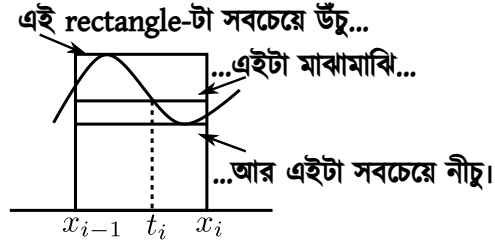



Fig 28

9.1 Darboux $\implies$ Riemann

আমরা দেখাব যে কোনো function যদি Darboux integrable হয়, তবে সেটা Riemann integrable-ও হবে, এবং সেক্ষেত্রে Riemann integral আর Darboux integral সমান হতে বাধ্য। Darboux integration-এর মূল হাতিয়ার হল $U(P,f)$ আর $L(P,f)$. ওদিকে Riemann integration-এর মূল হাতিয়ার হল $R(P,T,f)$ এবং $\|P\|$. এবার এই দুই প্রস্থ হাতিয়ারের মধ্যে এমন কিছু সম্পর্ক চাই যেটা বলে যে $U(P,f)$ আর $L(P,f)$ যদি ভদ্র আচরণ করে তবে $R(P,T,f)$ আর $\|P\|$-ও ভদ্র আচরণ করতে বাধ্য।

এরকম একটা তথ্য সহজেই পাওয়া যায়--যদি P যে কোনো একটা partition আর T তার যেকোনো একটা tagging হয় তবে

$$L(P,f) \leq R(P,T,f) \leq U(P,f)$$

হবেই। কারণ $R(P,T,f)$-এর প্রতিটা rectangle রয়েছে $U(P,f)$-এর rectangle-গুলোর নীচে এবং $L(P,f)$-এর rectangle-গুলোর উপরে (Fig 28)। সুতরাং যদি $U(P,f)$ আর $L(P,f)$ দুজনেই কোনো সংখ্যা L-এর দিকে এগোয় তবে যেভাবেই tagging করো না কেন, $R(P,T,f)$-এর পক্ষেও L-এর দিকে না এগিয়ে পথ নেই (sandwich law of limit). দ্বিতীয় একটা সম্পর্ক আমাদের কাজে লাগবে, তাকে বলে Darboux's theorem. এই বইয়ের দ্বিতীয় খণ্ডে আমরা differentiation-এর জন্য একটা Darboux's theorem করেছিলাম, সেটার সঙ্গে এটাকে গুলিয়ে ফেলো না যেন!

Darboux's theorem

Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be any bounded function. Then

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall P\in\mathbb{P}([a,b])$$
$$\left(\|P\|<\delta \implies \begin{cases} U(P,f) < \overline{\int_a^b} f+\epsilon \\ \text{and} \\ L(P,f) > \underline{\int_a^b} f-\epsilon \end{cases}\right)$$

এই theorem-টা দেখতে যতই খটমট লাগুক এটা কিন্তু আমাদের খুবই চেনা জিনিস। এই অধ্যায়ের গোড়াতেই আমরা সাঁড়াশির উপমা দিয়েছিলাম, মনে আছে? P যতই সূক্ষ্ম হচ্ছে ততই $U(P,f)$ আর $L(P,f)$ দুদিক থেকে সাঁড়াশির মত চেপে আসছে। $U(P,f)$ ক্রমশঃ নীচে নেমে আসছে $\overline{\int_a^b} f(x)dx$-এর দিকে, আর $L(P,f)$ ক্রমশঃ উপরে উঠে আসছে $\underline{\int_a^b} f(x)dx$-এর দিকে। ঠিক এই কথাটাই বলা হয়েছে Darboux's theorem-এ। যখন P যথেষ্ট সূক্ষ্ম হবে (মানে $\|P\|<\delta$) তখন $U(P,f)$ থাকবে $\overline{\int_a^b} f(x)dx$-এর উপরে যতখুশী কাছে, মানে

$$U(P,f) < \overline{\int_a^b} f+\epsilon.$$

একইরকম কথা খাটবে $L(P, f)$-এর বেলাতেও। অবশ্য ব্যাপারটা বুঝতে খুব কঠিন না হলেও, প্রমাণ করতে বেশ কিছুটা কাঠখড় পোড়াতে হবে। সে কাজে আমরা একটু পরে হাত দেব। আগে দেখি এই দুটো সম্পর্ক ব্যবহার করে কী ভাবে আমরা অতি সহজে Darboux-র সংজ্ঞা থেকে Riemann-এর সংজ্ঞায় পৌঁছতে পারি। ধরো f হল Darboux-র সংজ্ঞা অনুযায়ী integrable এবং integral-টা হল L. তার মানে

$$\underline{\int_a^b} f = L = \overline{\int_a^b} f.$$

আমরা দেখাব যে f-টা Riemann-এর সংজ্ঞা অনুযায়ীও integrable হবে এবং integral সেই L-ই হবে। তার জন্য আমরা সরাসরি Riemann-এর সংজ্ঞা ধরে এগোব। যেকোনো একটা $\epsilon > 0$ নাও। তবে Darboux's theorem-এর সুবাদে একটা $\delta > 0$ পাবে যাতে $\|P\| < \delta$ হলে $L(P, f)$ আর $U(P, f)$ দুটোই $(L - \epsilon, L + \epsilon)$-এর মধ্যে থাকে। এবার P-কে যেভাবেই tag করে tagged partition (P, T) বানাই না কেন, $R(P, T, f)$ সব সময়েই $L(P, f)$ আর $U(P, f)$-এর মধ্যে থাকতে বাধ্য। তার মানে $|R(P, T, f) - L| < \epsilon$ হচ্ছে। ব্যস্, সেটাই তো দেখানোর কথা ছিল!

9.1.1 Darboux's theorem-এর প্রমাণ

এবার আমরা Darboux-র theorem-এর $U(P, f)$-এর অংশটা দেখাব, একই ভাবে $L(P, f)$-এর অংশটাও দেখানো যাবে। আমরা জানি যে যদি একটা partition P-এর কোনো refinement P' নিই তবে

$$U(P, f) \geq U(P', f)$$

হয়, মানে $U(P', f)$-টা আরও নীচের দিকে চেপে আসে। Darboux's theorem-টা প্রমাণ করার জন্য আমাদের দেখতে হবে যে $U(P', f)$-টা $U(P, f)$-এর চেয়ে কতটা নীচে নামতে পারে।
ধরো P'-এ P-এর চেয়ে খালি একটাই point বেশী আছে। আশা করি এটা বুঝতে অসুবিধা হচ্ছে না যে যদি P-টা নিজেই খুব সূক্ষ্ম হয় তবে মোটে একটা point যোগ করে তার সূক্ষ্মতা আর খুব বেশী বাড়বে না। মানে $U(P, f) - U(P', f)$ কত বড় সেটা নির্ভর করবে P-এর norm-এর উপরে। ব্যাপারটা তলিয়ে দেখব নীচের অংকে।

Example 10: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a function such that $|f(x)| \leq k$ ($k > 0$ a constant) for all $x \in [a, b]$ and P be a partition of $[a, b]$ having norm $< \delta$. If Q is a refinement of P having exactly one more point of division, then prove that

$$0 \leq U(P, f) - U(Q, f) < 2k\delta.$$

[4] **(2011.5a)**
SOLUTION:

Let P be

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

এবার একটা নতুন point যোগ করব। ধর নতুন point-টা হল c, সেটা রয়েছে $[x_{i-1}, x_i]$-এ।

Fig 29

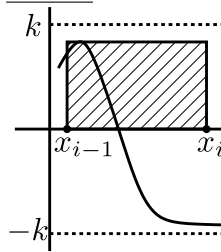
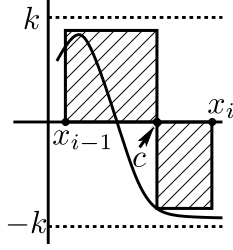



Fig 30

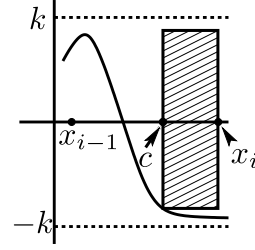



Fig 31

> Let $Q = P \cup \{c\}$, where $c \in [x_{i-1}, x_i]$.

এখন $U(P, f)$ আর $U(Q, f)$ দুটোই হল কিছু rectangle-এর area-র যোগফল। এদের মধ্যে প্রায় সবগুলো rectangle-ই P আর Q-এর ক্ষেত্রে একই, খালি P-এর বেলায় $[x_{i-1}, x_i]$-এর উপরে আঁকা rectangle-টা Q-এর বেলায় দুভাগ হয়ে গেছে, একটা $[x_{i-1}, c]$-এর উপরে, অন্যটা $[c, x_i]$-এর উপরে। Fig 29 আর Fig 30-তে এই ব্যাপারটা দেখানো হয়েছে। সুতরাং মোট signed area বাড়ছে Fig 31-এর rectangle-টার area-র পরিমাণ। এই কথাটা ভালো করে ছবি দিয়ে বুঝে নাও। বুঝতেই পারছ যে এর উচ্চতা $2k$-র চেয়ে বেশী নয়, এবং চওড়াও $x_i - x_{i-1}$-র চেয়ে কম। তাই area অবশ্যই $\leq 2k(x_i - x_{i-1})$ হবে। এবার এটাই অংকের ভাষায় লিখব। ধর--

$$\begin{aligned} M &= \sup\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M'_1 &= \sup\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, c]\} \\ M'_2 &= \sup\{f(x) \ : \ x \in [c, x_i]\} \end{aligned}$$

তাহলে

$$\begin{aligned} & U(P, f) - U(Q, f) \\ = \ & M \cdot (x_i - x_{i-1}) - [M'_1 \cdot (x_i - c) + M'_2 \cdot (c - x_{i-1})] \\ \leq \ & |M|(x_i - x_{i-1}) + |M'_1|(x_i - c) + |M'_2|(c - x_{i-1}) \quad \left[\text{by triangle inequality}\right] \\ \leq \ & k \cdot (x_i - x_{i-1}) + k \cdot (x_i - c) + k \cdot (c - x_{i-1}) \quad [\because |M|, |M'_1|, |M'_2| \leq k] \\ = \ & k \cdot (x_i - x_{i-1}) + k \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ = \ & 2k \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ \leq \ & 2k \cdot \|P\| < 2k\delta. \end{aligned}$$

■

একই যুক্তি খাটবে যদি আমরা আরো point যোগ করি। ধরো P-তে একটা নতুন point যোগ করে পেলাম P', এবং আরও একটা point যোগ করে পেলাম P''. তবে P থেকে P''-এ যাওয়ার জন্য upper sum-টা কতটা কমল? উত্তর হল--

$$\begin{aligned} & U(P, f) - U(P'', f) \\ = \ & U(P, f) - U(P', f) + U(P', f) - U(P'', f) \\ \leq \ & 2k\|P\| + 2k\|P'\| \\ \leq \ & 2k\|P\| + 2k\|P\| \quad [\because \|P'\| \leq \|P\|] \\ = \ & 4k\|P\|. \end{aligned}$$

এখানে $\|P'\| \le \|P\|$ হল কারণ P' হচ্ছে P-এর একটা refinement.
যদি মোট p-খানা নতুন point যোগ করি তবে lower sum-টা বাড়তে পারে সবচেয়ে বেশী $2kB\|P\|$ পরিমাণ। এই কথাটা আমাদের এক্ষুণি খুব কাজে আসবে।

Exercise 2: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a bounded function and M, m respectively be the lub and glb of f in $[a, b]$. Let P be a partition over $[a, b]$ with $\|P\| < \delta \quad (> 0)$ and Q be a refinement of P having k more points of division than that of P. Prove that

$$L(P, f) \le L(Q, f) < L(P, f) + (M - m)k\delta.$$

Hence prove that

$$\lim_{\|P\| \to 0} L(P, f) = \int_a^b f(x)dx.$$

[4+3] **(2013.4a)** ■

এবার আমরা নীচের অংকটা করার মত অবস্থায় এসেছি যেখানে Darboux's theorem-এর $U(P, f)$ অংশটার প্রমাণ চেয়েছে।

Example 11: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a bounded function. Prove that for every $\epsilon > 0$, there corresponds $\eta > 0$ such that

$$U(P, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$$

for all partitions P of $[a, b]$ with norm $< \eta$.[4] **(2011.5b,2003.5ai)**
SOLUTION: প্রথমে অংকের ভাষায় লিখে নিই--

To show

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall P \in \mathbb{P}([a, b]) \left(\|P\| < \eta \implies U(P, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon \right).$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because \overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P, f) \;:\; P \in \mathbb{P}([a, b])\}$,

$\therefore \exists Q \in \mathbb{P}([a, b]) \quad U(Q, f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2}$.

Let Q consist of n points.

Let k be a bound for f.

$\exists\eta$ Choose $\eta = \frac{\epsilon}{4nk} > 0$.

$\forall P$ Take any $P \in \mathbb{P}([a, b])$ with $\|P\| < \eta$.

Shall show that

$$U(P, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon.$$

Let $R = P \cup Q$.

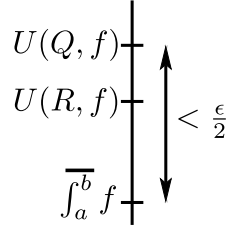



Fig 32

বল তো $U(P,f)$ আর $U(R,f)$-এর মধ্যে কে বড়? অবশ্যই $U(P,f) \geq U(R,f)$, কারণ $P \subseteq R$. এইবার এই তিনটে সংখ্যাকে দ্যাখো--

$$U(Q,f), U(R,f) \text{ আর } \overline{\int_a^b} f.$$

এখানে $\overline{\int_a^b} f$ এদের মধ্যে সবচেয়ে ছোটো (যেহেতু এটা আসলে infimum). আবার যেহেতু $Q \subseteq R$, তাই $U(Q,f) \geq U(R,f)$. সুতরাং ছবিটা দাঁড়ালো Fig 32-এর মত। এবার বলা আছে যে $U(Q,f)$ আর $\overline{\int_a^b} f$ খুব কাছাকাছি, তাই $U(R,f)$-কেও বাধ্য হয়েই $\overline{\int_a^b} f$-এর খুব কাছে থাকতে হবে।

> Then
> $$U(P,f) - \overline{\int_a^b} f = U(P,f) - U(R,f) + U(R,f) - \overline{\int_a^b} f \qquad (*)$$

এবার আমরা ডানদিকটাকে দুটো ভাগে ভেঙে নেব--$U(P,f) - U(R,f)$ আর $U(R,f) - \overline{\int_a^b} f$. দুটোকেই আলাদা করে $< \frac{\epsilon}{2}$ দেখাব। প্রথমটা $< \frac{\epsilon}{2}$ হবে কারণ P-টা এমনিতেই যথেষ্ট সূক্ষ্ম ছিল, আর সেখান থেকে R পেয়েছি মোটে বড় জোর n-খানা point যোগ করে। আসলে বড়জোর $n-2$-খানা, কারণ Q-এর মধ্যে যে n-খানা point আছে, তার মধ্যে দুই প্রান্ত a আর b তো P-এর মধ্যে ছিলই। তাই--

> $\because R$ is obtained from P by adding $< n$ points,
> $$\therefore U(P,f) - U(R,f) < 2nk\|P\| < 2nk\eta = \frac{\epsilon}{2}.$$

দ্বিতীয় অংশটা কেন $< \frac{\epsilon}{2}$ হবে সেটা তো Fig 32 থেকেই দেখেছি।

> Also, $\because Q \subseteq R$, $\therefore U(Q,f) \geq U(R,f)$, and so
> $$U(R,f) - \overline{\int_a^b} f \leq U(Q,f) - \overline{\int_a^b} f < \tfrac{\epsilon}{2}.$$
> Hence, from (*),
> $$U(P,f) - \overline{\int_a^b} f < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$
> as required.

■

এতক্ষণ আমরা upper sum নিয়ে কাজ করেছি। Lower sum-দের নিয়েও একই কাজ করা যেত। নীচের অংকে সেটাই করতে দিয়েছে।

Exercise 3: Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a bounded function. Prove that for every $\epsilon > 0$, there corresponds $\eta > 0$ such that

$$L(P,f) > \underline{\int_a^b} f - \epsilon$$

for all partitions P of $[a,b]$ with norm $< \eta$. ■

Exercise 4: If f is bounded on $[a,b]$ and $\{P_n\}_n$ is a sequence of paritions of $[a,b]$ with $\|P_n\| \to 0$ as $n \to \infty$, then show that

$$\lim_{n\to\infty} U(P_n,f) = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Hence determine $\overline{\int_0^1} f(x)dx$ where

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

[4+3] **(2014.4a)**

HINT:

প্রথম অংশ তো আগেই করেছি। দ্বিতীয় অংশের জন্য $\{P_n\}_n$ নেওয়া যায় এইভাবে--$[0,1]$-কে সমান n ভাগে ভাগ করা, মানে $P_1 : 0 < 1$, তারপর $P_1 : 0 < \frac{1}{2} < 1$, তারপর $P_3 : 0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$, এইরকম। বুঝতেই পারছ যে P_n-এর বেলায় subinterval-গুলো হবে $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$-এর মত দেখতে। একটু চিন্তা করলেই দেখবে যে এই subinterval-এর উপরে f-এর maximum value-টা আসবে একেবারে ডান প্রান্তে--$\frac{k}{n}$. সুতরাং $U(P_n,f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k}{n}$. বাকিটুকু তোমার নিজে নিজে করতে পারা উচিত। ■

9.2 Riemann $\implies$ Darboux

এবার দেখাব যে কোনো function যদি Riemann-এর সংজ্ঞা অনুযায়ী integrable হয়, তবে Darboux-র সংজ্ঞা অনুযায়ীও হবে, এবং integral-টা দুই ক্ষেত্রেই একই হবে।

এখানে বলা থাকবে যে $R(P,T,f)$-এর limit আছে, এবং সেখান থেকে দেখাতে হবে যে $U(P,f)$-এর infimum আর $L(P,f)$-এর supremum সমান হবে। কিন্তু তার $U(P,f)$ এবং $L(P,f)$ নিয়ে কথা বলার আগে দেখাতে হবে যে f একটা bounded function, কারণ $U(P,f)$ আর $L(P,f)$-এর সংজ্ঞার মধ্যেই sup আর inf লাগে। Darboux যে সংজ্ঞা দিয়েছিলেন তার মধ্যেই f-কে bounded বলা ছিল, কিন্তু Riemann-এর সংজ্ঞায় আলাদা করে সেটা বলা নেই। সুতরাং আগে দেখিয়ে নিতে হবে যে Riemann-এর সংজ্ঞা অনুযায়ী চললেও আসলে f-কে bounded হতেই হবে।

THEOREM

Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be Riemann integrable on $[a,b]$. Then f must be bounded on $[a,b]$.

Proof: প্রমাণটা দেখতে একটু লম্বা হলেও মূল কায়দাটা খুবই সহজ। আমরা contradiction ব্যবহার করব। ধরো f আসলে bounded নয়, তার মানে হয় unbounded above নয়তো unbounded below (বা হয় তো দুটোই)। আমরা প্রথমে unbounded above ধরে এগোই। একটা বেশ বড় দেখে সংখ্যা নাও, ধরো 1000. যেহেতু f-কে unbounded above নিয়েছি, তাই এমন x পাব যাতে $f(x) > 1000$ হয়। সুতরাং এই x-টাকে যদি আমাদের tagging-এর মধ্যে রাখি তবে একটা rectangle পাব যার উচ্চতা > 1000 হবে। বুঝতেই পারছ যে 1000-এর জায়গায় যত খুশী বড় সংখ্যা নিতে পারি, সুতরাং $R(P, T, f)$-এর পক্ষে কোথাও converge করা অসম্ভব।

> Let, if possible, f be unbounded above on $[a, b]$.
> $\because f$ is Riemann integrable on $[a, b]$,
>
> $$\exists \delta > 0 \quad \forall \text{ tagged partition } (P, T) \text{ of } [a, b]$$
> $$\{\|P\| < \delta \implies |R(P, T, f) - L| < 1\}.$$

এইটা পেলাম Riemann-এর সংজ্ঞা থেকে $\epsilon = 1$ নিয়ে। এবার একটা যে কোনো partition P ঠিক করে রাখি যাতে $\|P\| < \delta$ হয়। এরকম যে কোনো partition-এই কাজ চলবে (আমাদের প্যাঁচটা তো P নিয়ে নয়, প্যাঁচটা খেলব tagging-টা নিয়ে)। জীবন সহজ রাখার জন্য আমরা P বানাব $[a, b]$-কে সমান n ভাগে ভাগ করে। $\|P\| < \delta$ রাখার জন্য n-টাকে যথেষ্ট বড় নেব।

> We shall
>
> - take $n \in \mathbb{N}$ such that $\frac{b-a}{n} < \delta$,
> - and let P be the partition with n subintervals of equal length:
>
> $$a = x_0 < \cdots < x_n = b,$$
>
> where $x_i = a + i \times \frac{b-a}{n}$,
> - and take $T = (x_1, ..., x_n)$.

এইটা যেকোনো একটা tagging. এই tagging-টার point-গুলোকে এদিক ওদিক করেই আমরা $R(P, T, f)$-কে নিয়ন্ত্রণের বাইরে নিয়ে যাব। আপাততঃ $R(P, T, f)$ অবশ্যই নিয়ন্ত্রণের মধ্যে আছে--

> Then
> $$R(P, T, f) \in (L - 1, L + 1).$$

এবার আমরা T-কে পরিবর্তন করে $R(P, T, f)$-কে হাইজ্যাক করতে চলেছি, যাতে সেটা $(L - 1, L + 1)$-এর বাইরে চলে যায়।
প্রথমে কয়েকটা মাপ নিয়ে নিই--

> Let
>
> $$\begin{aligned} \eta &= \tfrac{b-a}{n} \\ M &= \max\{f(x_1), ..., f(x_n)\}, \end{aligned}$$

বুঝতেই পারছ η হল rectangle-গুলোর প্রস্থ আর M হল সবচেয়ে উঁচু rectangle-টার উচ্চতা (Fig 33)। এবার একটা rectangle বানাব যাতে সেটা M-এর চেয়েও বেশ অনেকটা উঁচু হয়, ধরো $M + h$. Fig 34 দ্যাখো। এখানে h কত

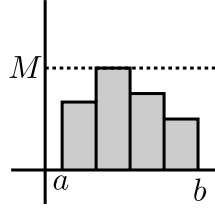



Fig 33

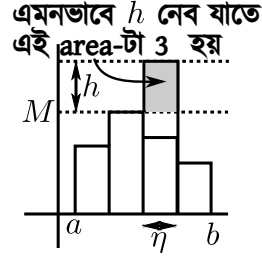



Fig 34

নেব? যাতে area-টা $(L-1, L+1)$-এর বাইরে বেরিয়ে যেতে বাধ্য হয়। যদি area-টাকে 3 বাড়িয়ে দিতে পারি তবেই কাজ হবে, কারণ $(L-1, L+1)$-এর মধ্যেকার যেকোনো সংখ্যার সাথে 3 যোগ করলে সেটা $(L-1, L+1)$-এর বাইরে বেরিয়ে যেতে বাধ্য। সুতরাং $h\eta = 3$ মানে $h = 3/\eta$ নিলেই হবে।

> $\because f$ is unbounded above on $[a, b]$,
> $\therefore \exists x_* \in [a, b] \quad f(x_*) > M + \frac{3}{\eta}$.
> Let k be such that $x_* \in [x_{k-1}, x_k]$.
> Let T' be same as T with x_* in place of x_k.
> Then we must have $R(P, T, f), R(P, T', f) \in (L-1, L+1)$.

অর্থাৎ নিয়ম মত $R(P, T, f)$ এবং $R(P, T', f)$ দুজনেরই নিয়ন্ত্রণের মধ্যে থাকা উচিত। সেটা যে আসলে নয় সেটা দেখিয়েই আমরা contradiction পাব--

> But
>
> $$\begin{aligned} R(P,T',f) &= R(P,T,f) - f(x_k)(x_k - x_{k-1}) + f(x_*)(x_k - x_{k-1}) \\ &= R(P,T,f) + \eta[f(x_*) - f(x_k)] \\ &> R(P,T,f) + \eta\left[M + \tfrac{3}{\eta} - f(x_k)\right] \\ &= R(P,T,f) + \eta\,[M - f(x_k)] + 3 \\ &\geq R(P,T,f) + 3 \\ &> L - 1 + 3 > L + 1 (\Rightarrow\Leftarrow). \end{aligned}$$
>
> So f cannot be unbounded above. Similarly we can show that f cannot be unbounded below.
> $\therefore f$ must be bounded, as required.

[Q.E.D]

Riemann-এর সংজ্ঞা থেকে Darboux-র সংজ্ঞায় পৌঁছবার জন্য এমন একটা তথ্য হাতে থাকলে ভালো হয় যা দিয়ে বলতে পারি যে, $R(P, T, f)$-এর আচরণ ভদ্র হলে $U(P, f)$ এবং $L(P, f)$-ও ভদ্র আচরণ করবে। এইরকম একটা তথ্য রয়েছে নীচের theorem-টায়।

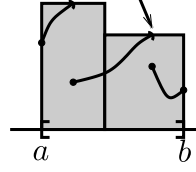



Fig 35

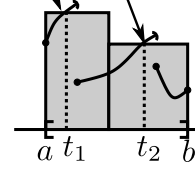



Fig 36

> THEOREM
>
> Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be any bounded function. Let P be any partition of $[a, b]$. Then
>
> $$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \text{ tagging } T \text{ of } P$$
> $$\text{so that } R(P, T, f) > U(P, f) - \epsilon.$$

Proof:
মূল কায়দাটা এখানেও আগের প্রমাণটার মতই। সেখানে আমরা tagging-টাকে এমনভাবে নিচ্ছিলাম যাতে rectangle-এর উচ্চতা যতখুশী বেড়ে যায়, এবার এমনভাবে নেব যেন উচ্চতাগুলো supremum-এর যত খুশী কাছে যায়। Fig 35 আর Fig 36 দেখলেই ব্যাপারটা স্পষ্ট হবে।

Let P be

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

To show

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists$ tagging T of P so that $R(P, T, f) > U(P, f) - \epsilon$.

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Let $M_i = \sup\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

$\exists t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ such that

$$f(t_i) > M_i - \frac{\epsilon}{n(x_i - x_{i-1})}.$$

$\exists T$ Choose $T = \{t_1, ..., t_n\}$.

Then

$$\begin{aligned} R(P, T, f) &= \sum f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &> \sum \left(M_i - \frac{\epsilon}{n(x_i - x_{i-1})} \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) - \epsilon \\ &= U(P, f) - \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

[Q.E.D]

একইরকম ব্যাপার হবে $L(P,f)$-এর জন্যও। নীচের অংকটা সেটা নিয়েই।

Exercise 5: Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be any bounded function. Let P be any partition on $[a,b]$. Then show that

$$\forall\epsilon>0\quad\exists \text{ tagging } T \text{ of } P \text{ so that } R(P,T,f)<L(P,f)+\epsilon.$$

■

এইবার আমরা অবশেষে প্রমাণ করব যে কোনো function যদি Riemann-এর সংজ্ঞা অনুযায়ী integrable হয়, তবে Darboux-র সংজ্ঞা অনুযায়ীও হবে, এবং integral-টা দুই ক্ষেত্রেই একই আসবে। প্রমাণটায় আমরা একটা কৌশল করব যেটা অনেক সময়েই কাজে আসে। ধরো তোমাকে a,b দুটো সংখ্যা দিয়ে দেখাতে বলল যে $a=b$. সেটা সরাসরি না দেখিয়ে যদি তুমি দেখাও যে

$$\forall\epsilon>0\quad b\in(a-\epsilon,a+\epsilon),$$

তবেও কিন্তু একই জিনিস হবে। এটা ভালো করে বুঝে নাও। মনে হতেই পারে যে খামোখা সহজ জিনিসটাকে কঠিন করে লাভ কী হল, কিন্তু অনেক অংকে এই কঠিন রূপটাতেই কাজটা সহজতর হয়ে ওঠে। যেমন হবে নীচের প্রমাণটায়।

THEOREM

Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be Riemann integrable on $[a,b]$. Then f must be Darboux integrable on $[a,b]$. Also the two integrals must be the same.

Proof:

Let L be the Riemann integral of f over $[a,b]$.

Shall show that $\overline{\int}_a^b f(x)dx=\underline{\int}_a^b f(x)dx=L$.

এইবার সেই কৌশলটা খাটাব-- দেখাব যে

$$\forall\epsilon>0\quad \overline{\int}_a^b f(x)dx,\ \underline{\int}_a^b f(x)dx\in(L-\epsilon,L+\epsilon)$$

এতে সুবিধাটা এখানে যে আমরা জানি lower integral-টা সবসময়েই upper integral-এর চেয়ে ছোটো বা সমান হয়। তাই দেখাতে হবে

$$\forall\epsilon>0\quad L-\epsilon<\underline{\int}_a^b f(x)dx\le\overline{\int}_a^b f(x)dx<L+\epsilon$$

এর মধ্যে মাঝের "$\le$"-টা তো আর নতুন করে দেখানোর কিছু নেই, সুতরাং--

Enough to show that

$$\forall \epsilon > 0 \quad L - \epsilon < \underline{\int_a^b} f(x)dx \text{ and } \overline{\int_a^b} f(x)dx < L + \epsilon.$$

এর মধ্যে যে কোনো একটা দেখালেই হবে, অন্যটা ঠিক একইভাবে হবে।

Shall show

$$\forall \epsilon > 0 \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx < L + \epsilon$$

The other inequality can be shown similarly.

এটাকেও সরাসরি দেখাব না, আরও একটু মালিশ করব--

$$\because \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{U(P, f) \ : \ P \in \mathbb{P}([a, b])\},$$

$\therefore$ Enough to show

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([a, b]) \quad U(P, f) < L + \epsilon.$$

এইবার দেখানো শুরু করি--

Take any $\epsilon > 0$.

$\because f$ is Riemann integrable on $[a, b]$,

$\therefore \exists P \in \mathbb{P}([a, b])$ such that for all possible taggings T of P,

$$R(P, T, f) \in \left(L - \tfrac{\epsilon}{2}, L + \tfrac{\epsilon}{2}\right).$$

Choose this P.

এইবার আগের theorem-টা লাগাব--এমন একটা tagging যাতে rectangle-গুলোর উচ্চতা supremum-গুলোর খুব কাছ দিয়ে যায়।

Now we can choose a tagging T of P so that

$$R(P, T, f) > U(P, f) - \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Then

$$\begin{aligned} U(P, f) &< R(P, T, f) + \tfrac{\epsilon}{2} \\ &< \left(L + \tfrac{\epsilon}{2}\right) + \tfrac{\epsilon}{2} = L + \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

[Q.E.D]

DAY 10
Basic facts (part 1)

আজকে আর কালকে আমরা Riemann integration-এর কয়েকটা গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম শিখব। এদের সবগুলোরই মূল চেহারা একই--একটা কি দুটো function দেওয়া থাকবে যারা কোনো একটা $[a, b]$-র উপরে Riemann integrable. তা থেকে দেখাতে হবে সেগুলো দিয়ে তৈরী অন্য কোনো একটা function-ও Riemann integrable হবে। যেমন f, g দুজনেই Riemann integrable হলে $f + g$-ও Riemann integrable হবে। কখনও আবার function-টা একই থাকবে, কিন্তু $[a, b]$-র জায়গায় অন্য কোনো interval দেওয়া হবে।
যে সব অংকে খালি integrability দেখাতে হবে, সেখানে আমরা সব সময়েই Cauchy criterion ব্যবহার করব। আর যে সব ক্ষেত্রে integral-টাও বার করতে দেবে সেখানে আমরা Darboux-র সংজ্ঞাটা লাগাব।

10.1 Subsets

একটা মোটামুটি সোজা জিনিস দিয়ে শুরু করি--f যদি $[a, b]$-র উপরে Riemann integrable হয়, আর $[c, d] \subseteq [a, b]$ হয়, তবে f নিশ্চয়ই $[c, d]$-র উপরেও Riemann integrable হবে। এটাই প্রমাণ করব নীচের অংকটায়।

Example 12: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be Riemann integrable on $[a, b]$. Show that f is Riemann integrable on every closed interval $[c, d] \subseteq [a, b]$.

SOLUTION:

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be Riemann integrable, and let $[c, d] \subseteq [a, b]$.

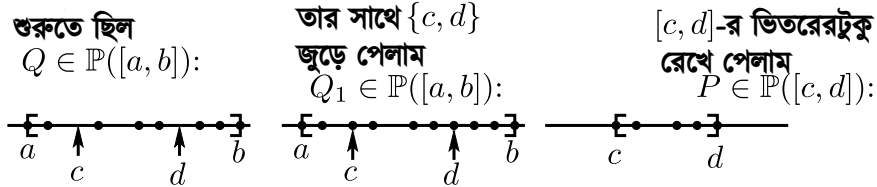
Shall show that f is Riemann integrable on $[c, d]$,

এখানে খালি integrability নিয়ে কাজ করছি, integral-টা বার করার কোনো প্রশ্ন নেই, তাই Cauchy criterion লাগাব।

ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([c, d]) \quad U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Fig 37

$\because f$ is Riemann integrable on $[a, b]$,

$$\therefore \exists Q \in \mathbb{P}([a, b]) \quad U(Q, f) - L(Q, f) < \epsilon.$$

Q হল $[a, b]$-র একটা partition, এর থেকে আমাদের বানাতে হবে $[c, d]$-র একটা partition. তার জন্য Q-এর সঙ্গে c আর d বিন্দুদুটোও জুড়ে দেব, আর $[c, d]$-র ভিতরে যে সব বিন্দু আছে খালি সেগুলোকেই রাখব। Fig 37 দ্যাখো।

Let $Q_1 = Q \cup \{c, d\}$.

$\boxed{\exists P}$ Choose $P = Q_1 \cap [c, d]$.

এখানে Q_1 ছিল $[a, b]$-র partition, আর P হল তার সেই অংশটুকু যেটা $[c, d]$-র মধ্যে পড়ে। সুতরাং $U(P, f) - L(P, f)$ যে $U(Q_1, f) - L(Q_1, f)$ হবে সেটা বোঝাই যাচ্ছে, কারণ $U(Q_1, f) - L(Q_1, f)$-এর থেকে দুদিকের কিছু rectangle বাদ দিয়ে $U(P, f) - L(P, f)$ পাচ্ছি।

Then $U(P, f) - L(P, f) \leq U(Q_1, f) - L(Q_1, f)$.

এই জায়গাটা একটু বুঝিয়ে দেওয়া যাক--

⟦ Because:

If $R_1 = Q_1 \cap [a, c]$ and $R_2 = Q_1 \cap [d, b]$, then
$U(Q_1, f) - L(Q_1, f) = \big[U(R_1, f) - L(R_2, f)\big] + \big[U(P, f) - L(P, f)\big] + \big[U(R_2, f) - L(R_2, f)\big] \geq U(P, f) - L(P, f)$.

⟧

এদিকে Q_1 হল Q-এর চেয়ে সূক্ষ্মতর, তাই--

$\because Q_1 \subseteq Q$

$\therefore U(Q_1, f) - L(Q_1, f) \leq U(Q, f) - L(Q, f) < \epsilon$.

সব মিলিয়ে--

So $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$, as required.

■

আমরা দেখলাম যে $[a, b]$-র উপর একটা function যদি Riemann integrable হয়, তবে যে কোনো $[c, d] \subseteq [a, b]$-এর উপরেও হবে। এর উল্টোটা অবশ্যই প্রত্যাশা করা যায় না। একখানা subset-এর উপর Riemann integrable হলেই অমনি পুরো $[a, b]$-র উপরে খামোখা কেন Riemann integrable হতে যাবে? $[a, b]$-র যে অংশটুকু $[c, d]$-র বাইরে সেখানে function-টার আচরণ তো কিছুই জানি না!
কিন্তু যদি বলে দিই যে শুধু একটা নয়, $[a, b]$-র যত subset আছে $[c, d]$ আকারের, যেখানে $a < c < d < b$, তাদের সবার উপরেই f-টা Riemann integrable তবে কি f-টা পুরো $[a, b]$-র উপরেও Riemann integrable হতে বাধ্য? দুঃখের কথা, এখানেও উত্তর হল--না।

Example 13: এই function-টা দ্যাখো--

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if } x \in (0,1] \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

দ্যাখাও যে $0 < c < d < 1$ হলেই $f(x)$-টা $[c,d]$-র উপরে Riemann integrable, কিন্তু তাও $f(x)$ মোটেই পুরো $[0,1]$-এর উপর Riemann integrable নয়!

SOLUTION: যদি $0 < c < d < 1$ হয় তবে $f(x)$-টা $[c,d]$-র উপরে continuous, আর তাই Riemann integrable. কিন্তু $[0,1]$-এর উপরে $f(x)$ হল unbounded, তাই Riemann integrable হবার প্রশ্নই ওঠে না। ■

এই অংকটায় সমস্যাটা এই যে f-টা unbounded ছিল। যদি f-টা পুরো $[a,b]$-র উপরে bounded হয় এবং যেকোনো $a < c < d < b$-র জন্যই $[c,d]$-র উপরে Riemann integrable হয়, তবে কি f-টা $[a,b]$-র উপরেও Riemann integrable হতে বাধ্য? এবার উত্তর হল--হ্যাঁ। সেটাই দেখাতে বলেছে নীচের অংকটায়।

Example 14: Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be bounded on the closed and bounded interval $[a,b]$ and be Riemann integrable on $[c,d]$ for every closed interval $[c,d]$ such that $a < c < d < b$. Prove that f is Riemann integrable on $[a,b]$.[4] **(2003.5aii)**

SOLUTION:

এখানেও আমাদের কাজ হল খালি integrability দেখানো, কোনো integral বার করা নয়। তাই Cauchy criterion লাগাব।

To show f is Riemann integrable on $[a,b]$, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([a,b]) \quad U(P,f) - L(P,f) < \epsilon.$$

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

ধরো $f(x)$-এর গ্রাফটা Fig 38-এর মত। দেওয়া আছে যে $f(x)$ হল যে কোনো $[c,d]$-র উপর integrable, যেখানে $a < c < d < b$. এবার পুরো $[a,b]$-র উপর integrable দেখানোর জন্য প্রথমেই এমন $[c,d]$ নেব যেন সেটা প্রায় পুরো $[a,b]$-টাই জুড়ে বসে, খালি দুই পাশে এক চিলতি করে জায়গা ছেড়ে (কারণ $a < c$ আর $b < d$ হতে হবে)। Fig 39 দেখে নাও। যেহেতু $[c,d]$-র উপরে integrable বলেই দিয়েছে তাই $[c,d]$-র এমন একটা partition Q পাব যাতে $U(Q,f) - L(Q,f)$ খুব ছোটো হয়। এটাকেই আমরা Fig 39-তে shade করে দেখিয়েছি। কিন্তু Q হল খালি $[c,d]$-র partition, আমাদের দরকার পুরো $[a,b]$-র একটা partition. তার জন্য Q-এর দুপাশে ওই চিলতি জায়গা দুটো জুড়ে দেব। এর ফলে $[a,b]$-র যে partition-টা পেলাম তাকে যদি P বলি তবে $U(P,f) - L(P,f)$ হবে $U(Q,f) - L(Q,f)$-এর

Fig 38

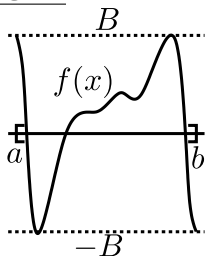



Fig 39

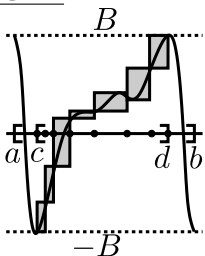
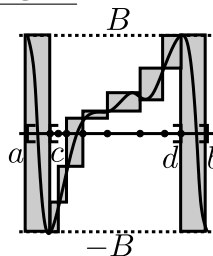



Fig 40

চেয়ে সামান্যই বেশী, কারণ বাড়তি বলতে তো খালি ওই অতি সামান্য চিলতি অংশদুটো (Fig 40)। সুতরাং এইভাবে এগোব--

$$U(P,f)-L(P,f)=\begin{cases}\text{বাঁদিকের চিলতি rectangle}\\ +\\ U(Q,f)-L(Q,f)\\ +\\ \text{ডানদিকের চিলতি rectangle.}\end{cases}$$

আমরা এই তিনটে term-কেই $\frac{\epsilon}{3}$-এর চেয়ে ছোটো রাখব। মাঝের term-টাকে ছোটো রাখা নিয়ে চিন্তা নেই, কারণ $[c,d]$-এর উপর integrability দেওয়া আছে। যদি f-এর একটা bound হয় B, তবে বাঁদিকের চিলতি rectangle-টার প্রস্থ হল $c-a$, এবং উচ্চতা $\leq 2B$, কারণ sup-টা বড়জোর B অব্দি উঠতে পারে, আর inf-টা $-B$ অব্দি নামতে পারে। সুতরাং ওটার area-কে $<\frac{\epsilon}{3}$ রাখার জন্য

$$(c-a)\times 2B\leq\tfrac{\epsilon}{3}\implies c-a\leq\tfrac{\epsilon}{6B}$$

নিলেই হবে। একইভাবে $b-d\leq\frac{\epsilon}{6B}$ নিলেই ডানদিকের চিলতিটাও $\frac{\epsilon}{3}$-এর চেয়ে বড় হতে পারবে না।

$\because f$ is bounded on $[a,b]$,
$\therefore \exists B>0 \quad \forall x\in[a,b] \quad |f(x)|\leq B.$
Let $\delta=\min\left\{\frac{b-a}{3},\frac{\epsilon}{6B}\right\}>0.$
Let $c=a+\delta$ and $d=b-\delta.$

এখানে আবার ওই $\frac{b-a}{3}$-টা কোথা থেকে এল? ওটা রেখেছি যাতে c-টা আবার d-এর ডানদিকে না চলে যায়!

Then $a<c<d<b,$ and so f is Riemann integrable on $[c,d]$.

$$\therefore \exists Q\in\mathbb{P}([c,d]) \quad U(Q,f)-L(Q,f)<\tfrac{\epsilon}{3}.$$

$\boxed{\exists P}$ Choose $P=Q\cup\{a,b\}\in\mathbb{P}([a,b])$.

Then

$$\begin{aligned}U(P,f)-L(P,f) &= U(Q,f)-L(Q,f)+\\ &\quad \sup\{|f(x)-f(y)| \ : \ x,y\in[a,c]\}(c-a)+\\ &\quad \sup\{|f(x)-f(y)| \ : \ x,y\in[d,b]\}(b-d)\\ &\leq U(Q,f)-L(Q,f)+2B(c-a)+2B(b-d)\\ &= U(Q,f)-L(Q,f)+2B\delta+2B\delta\\ &< \tfrac{\epsilon}{3}+\tfrac{\epsilon}{3}+\tfrac{\epsilon}{3}=\epsilon,\end{aligned}$$

as required.

■

Exercise 6: ধরো $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ একটা function, যেটা $[a,b]$-র উপর integrable. এবার যেকোনো একটা $c\in[a,b]$ নাও। তাহলে এক্ষুণি যা শিখলাম তা থেকে বলতে পারি যে f-টা $[a,c]$ এবং $[c,b]$-এর উপরেও integrable

হবে। এখন $\int_a^b f,\ \int_a^c f$ আর $\int_c^b f$-এর মধ্যে কী সম্পর্ক হবে সেটা তো হায়ার সেকণ্ডারী থেকেই শুনে আসছি--

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \qquad (*)$$

এটা প্রমাণ করতে পারো? ■

এই অংকে c-কে নিয়েছিলাম a আর b-র মাঝখানে কোথাও। কিন্তু তা না হলেও একইভাবে কাজ করা যেত, খালি তখন $\int_a^c f$ আর $\int_c^b f$ মানে কী সেটা নতুন করে বলে নিতে হবে, কারণ আমরা এতক্ষণ integral-এর যা সংজ্ঞা দিয়েছি, তাতে নীচের প্রান্তটা সবসময়ে উপরের প্রান্তের থেকে ছোটো হয়। কিন্তু যদি $c<a<b$ হয়, তবে সেই সংজ্ঞাটা $\int_a^c f$-র বেলায় খাটে না। একইভাবে $a<b<c$ হলে $\int_c^b f$-এর বেলায় সমস্যা হবে। আমরা এই ক্ষেত্রে এমন একটা সংজ্ঞা খাড়া করতে চাই যাতে সব ক্ষেত্রেই (*)-টা খাটে। হয়। এর কায়দাটা হল এইরকম--

DEFINITION:

If f is integrable over $[p,q]$ for some $p<q$ then we define

$$\int_q^p f = -\int_p^q f.$$

এই সংজ্ঞা ব্যবহার করলেই নীচের theorem-টা পেয়ে যাবে আগের অংকটা থেকে--

THEOREM

Let f be integrable over $[\alpha,\beta]$ for some $\alpha<\beta\in\mathbb{R}$. If $a,b,c\in[\alpha,\beta]$, then

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

10.2 Inequality

যদি দুটো integrable function নিই $f(x)$ আর $g(x)$ যাতে $\forall x\in[a,b]\quad f(x)\geq g(x)$ হয়, তবে আন্দাজ করতে পারছ যে

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

হবে। প্রমাণ করা খুবই সোজা। প্রথম কথা $a\leq b$ চাই। যে কোনো একটা partition $P\in\mathbb{P}([a,b])$ নাও। তবে

$$L(P,f)\geq L(P,g)$$

হবে। তাই দুই দিকের যদি sup নিই P-এর উপরে তবে পাব

$$\underline{\int_a^b} f \geq \underline{\int_a^b} g.$$

যেহেতু f আর g দুজনেই $[a,b]$-র উপরে integrable, তাই $\underline{\int_a^b}$ না লিখে খালি $\int_a^b$ লিখলেই হবে--

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g,$$

ঠিক যেটা আন্দাজ করা গিয়েছিল।
এবার এইটা ব্যবহার করে একটা ছোট্টো অংক।

Example 15: True or false with justification: If a sequence $\{a_n\}_n$ is defined by

$$a_n = \int_1^2 \frac{e^{-nt}}{t} dt,$$

then $a_n \to 0$ as $n \to \infty$.[3] **(2006.1b)**
SOLUTION:

> For $t \in [1,2]$ we have
> $$0 \leq \frac{e^{-nt}}{t} \leq e^{-nt}.$$
> Both sides are continuous over $[1,2]$, and so Riemann integrable. Integrating
> $$\int_1^2 0\, dt \leq \int_1^2 \frac{e^{-nt}}{t} dt \leq \int_1^2 e^{-nt} dt,$$
> or
> $$0 \leq a_n \leq \frac{e^{-n} - e^{-2n}}{n} \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$
> So, by sandwich law of limit, $a_n \to 0$, as required.

■

একই রকম আরেকটা অংক--

Exercise 7: A sequence $\{a_n\}_n$ is defined by

$$a_n = \int_0^3 \sin^2 t e^{-nt} dt,$$

then show that $a_n \to 0$ as $n \to \infty$. ■

10.2.1 Strict inequality

যদি $a \leq b$ হয় এবং $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ দুজনেই Riemann integrable হয় তবে $f \leq g$ হলে $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ হয়, দেখলাম। এবার জানতে চাই যে f, g-র উপরে আর কী বাড়তি শর্ত চাপালে

$$\int_a^b f < \int_a^b g$$

বলা যাবে। মানে $\leq$-র বদলে $<$ বলা যাবে। প্রথমেই যে কথাটা মনে আসে সেটা হল--

> যদি $\forall x \in [a, b] \quad f(x) < g(x)$ হয় তবে কি
>
> $$\int_a^b f < \int_a^b g$$
>
> হতে বাধ্য?

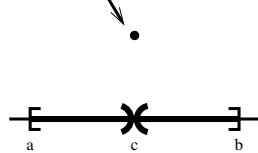
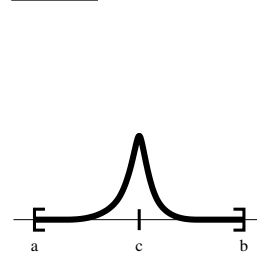
উত্তর হল--হ্যাঁ, f, g দুজনেই Riemann integrable হলে এমনটা হতে বাধ্য। কিন্তু আশ্চর্যের কথা এই যে এর প্রমাণটা মোটেই সহজ নয়! এটা আমরা প্রমাণ করব চতুর্থ অধ্যায়ে গিয়ে। তার আগে আমরা এটা ব্যবহারও করব না।
এখানে আমরা একটা অন্য শর্ত আলোচনা করব, যেটার ক্ষেত্রে প্রমাণটা সহজ--যদি $f \geq g$ দুজনেই continuous হয় এবং অন্ততঃ কোনো একটা $c \in [a, b]$-তে $f(c) > g(c)$ হয় তবে

$$\int_a^b f > \int_a^b g$$

হবেই। কারণটা বোঝা কঠিন নয়--যদি $h(x) = f(x) - g(x)$ নিই তবে $h(x) \geq 0$ হবে এবং $h(c) > 0$. যেহেতু $h(x)$ হল continuous তাই খালি c-তে বিচ্ছিন্নভাবে তো আর positive হতে পারবে না (Fig 41), ওর আগে পরে খানিকটা জায়গা জুড়ে positive হবে (Fig 42)। এটাই হল continuous function-দের sign-preserving property, যেটা আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম। তার মানে c-কে ঘিরে একটা ঢিপি থাকবে। সেই ঢিপির area-টাই তো > 0 হতে বাধ্য। সুতরাং $\int_a^b h(x)dx > 0$ হবেই।
ব্যাপারটাকে অন্যভাবেও ভাবা যায়, যদি $h(x)$ একটা nonnegative, continuous function হয়, এবং $\int_a^b h(x)dx = 0$ হয় তবে নিশ্চয়ই $h(x) \equiv 0$ হবে। নীচের অংকে এটাই প্রমাণ করতে বলেছে।

Example 16: If f is a non-negative continuous function on $[a, b]$ and

$$\int_a^b f(x)dx = 0,$$

show that $f(x) = 0$ for all $x \in [a, b]$.[3] **(2010.5b)**
SOLUTION:

> To show $\forall x \in [a,b] \quad f(x)=0$.
> Let, if possible, $\exists c \in [a,b] \quad f(c) \neq 0$.
> $\because f$ is non-negative,
> $\therefore f(c) > 0$.

এবার sign-preserving property লাগাব--

> $\because f$ is continuous,
> $\therefore$ By sign-preserving property of continuous functions,
>
> $$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(c,\delta) \cap [a,b] \quad f(x) \geq \tfrac{f(c)}{2} > 0.$$
>
> Let $[p,q] \subseteq N(c,\delta) \cap [a,b]$ with $p < q$.

এইখানে আবার $[p,q]$ আমদানি করলাম কেন? তার কারণ Riemann integration-এর জন্য আমরা সব সময়ে closed bounded interval নিয়ে কাজ করি, কিন্তু $N(c,\delta) \cap [a,b]$-টা closed নাও হতে পারে, যেহেতু $N(c,\delta)$-টা closed নয়। তাই আমরা $N(c,\delta) \cap [a,b]$-এর ভিতরে যে কোনো একটা closed bounded interval নিয়েছি, সেটারই নাম দিয়েছি $[p,q]$.

> Then
>
> $$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^p f(x)dx + \int_p^q f(x)dx + \int_q^b f(x)dx \\ &\geq \int_p^q f(x)dx \quad [\because f \geq 0] \\ &\geq \tfrac{f(c)}{2} \int_p^q dx \quad \left[\because \forall x \in [p,q] \quad f(x) \geq \tfrac{f(c)}{2}\right] \\ &= \tfrac{f(c)}{2} \cdot (q-p) > 0 (\Rightarrow\Leftarrow). \end{aligned}$$

■

Exercise 8: A real valued continuous function f on $[a,b]$ is such that

$$\int_a^b |f(x)|dx = 0.$$

Prove that $f(x)=0$ for all $x \in [a,b]$.[2] **(2013.1biii)**
HINT:
এটা আসলে আগের অংকটারই রকমফের। যেহেতু f হল continuous, তাই $|f|$-ও continuous. আর আমরা জানি যে $|f| \geq 0$ হয়। এবার আগের অংকের f-এর জায়গায় এই অংকের $|f|$ বসালেই হয়ে যাবে। ■

Example 17: Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be Riemann integrable on $[a,b]$ and $f(x) \geq 0$ for all $x \in [a,b]$.

Let there be a point c, $a < c < b$, such that f is continuous at c and $f(c) > 0$. Prove that

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

[3] **(2004.5b)**
SOLUTION: আগের অংকটাই। খালি এখানে বাড়তি একটা শর্ত দিয়েছে "$a < c < b$", যেটা অনাবশ্যক। ■

Example 18: If f is a continuous function on the closed and bounded interval $[a, b]$ and if $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ for every continuous function function g on $[a, b]$ then show that $f(x) = 0$ for all $x \in [a, b]$.[4] **(2003.5b)**
SOLUTION: এইটা আবার আগের অংকটারই রূপভেদ। এখানে তুমি প্রথমে $g(x) = f(x)$ নাও। তাহলে পাবে

$$\int_a^b (f(x))^2 dx = 0.$$

যেহেতু $(f(x))^2$ একটা nonnegative, continuous function, তাই আগের অংকের যুক্তিতে দেখাতে পারবে যে $(f(x))^2 \equiv 0$ হবে। ব্যস্, তাহলেই তো দেখানো হয়ে গেল যে $f(x) \equiv 0$. ■

নীচের অংকটাকে এই জিনিসটারই একটা প্রয়োগ বলা যেতে পারে।

Example 19: Show that

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x dx < \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

for all $n \in \mathbb{N}$.[3] **(2012.5c)**
SOLUTION:

> Let
> $$f(x) = \sin^n x - \sin^{n+1} x, \quad x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right].$$
> For $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ we have
> $$0 \le \sin x \le 1,$$
> and so $\sin^n x \ge \sin^{n+1} x$.
> Also, $\sin^n \frac{\pi}{4} > \sin^{n+1} \frac{\pi}{4}$.
> So $f(x)$ is nonnegative and continous on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, and $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$.

ব্যস্, আগের অংক কটার কায়দাতেই বলে দিতে পারি যে integral-টা > 0 হবে। তবে লেখার সময়ে "আগের অংকের" দোহাই দেওয়াটা ভালো দেখায় না, তাই ধাপগুলো নতুন করে লিখেই দিলাম--

> Also, $\because$ continuous $\therefore$ Riemann integrable on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
> Let $\epsilon = \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} > 0$.

> Then, by continuity,
>
> $$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in N\left(\tfrac{\pi}{4}, \delta\right) \quad f(x) > \epsilon.$$

কিন্তু Riemann integration-এর জন্য closed interval চাই। তাই $N(\frac{\pi}{4}, \delta)$-র বদলে $[\frac{\pi}{4} - \delta, \frac{\pi}{4} + \delta]$ নিয়ে কাজ করব।

> $\because f$ is continuous,
>
> $$\therefore \forall x \in [\frac{\pi}{4} - \delta, \frac{\pi}{4} + \delta] \quad f(x) \geq \epsilon. \qquad (*)$$
>
> So
>
> $$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx &\geq \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} f(x)dx \quad [\because f \geq 0] \\ &\geq \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}+\delta} \epsilon dx \quad [\text{ by } (*)] \\ &= 2\delta\epsilon > 0, \end{aligned}$$
>
> as required.

■

DAY 11
Basic facts (part 2)

11.1 Triangle inequality

আমরা এক ধরণের triangle inequality-র কথা জানি--যে কোনো দুটো সংখ্যা $a, b \in \mathbb{R}$ দেওয়া থাকলে

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

হয়। যে কোনো finitely many সংখ্যার জন্যই একই কথা প্রযোজ্য--

$$\left|\sum_1^n a_i\right| \leq \sum_1^n |a_i|.$$

ব্যাপারটাকে এইভাবে ভাবতে পারো--absolute value-টাকে sum-এর ভিতরে ঢুকিয়ে দিলে জিনিসটা বেড়ে যায় (বা সমান থাকে)। যেহেতু integration ব্যাপারটা sum-এরই limit, তাই আন্দাজ করা যায় যে integral-দের বেলাতেও একটা triangle inequality থাকবে। সেটা হল এইরকম--

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|.$$

অবশ্য এর জন্য কয়েকটা শর্ত দরকার, যেমন f আর $|f|$ দুজনকেই integrable হতে হবে। আরেকটা শর্ত হল $a \leq b$ হতে হবে। কারণ $a > b$ হয়ে গেলে ডানদিকটা < 0 হয়ে যেতে পারে, কিন্তু বাঁদিকটা ≥ 0. সুতরাং মনে হচ্ছে যেন তিনটে শর্ত লাগছে--

1. $a \leq b$
2. f-কে $[a,b]$-র উপরে Riemann integrable হতে হবে,
3. $|f|$-কেও $[a,b]$-র উপরে Riemann integrable হতে হবে।

মজা হচ্ছে, এদের মধ্যে দুই নম্বরটা হলেই তিন নম্বরটাও হতে বাধ্য, মানে f যদি integrable হয়, তবে $|f|$-ও integrable হবেই! সুতরাং সব মিলিয়ে triangle inequality-টা দাঁড়ালো এরকম--

Triangle inequality

If $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is an integrable function, then $|f|$ is also integrable on $[a,b]$, and

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

প্রমাণটা চেয়েছে নীচের অংকে--

Example 20: Let f be bounded and Riemann integrable on $[a,b]$. Show that the function $|f|$ is also Riemann integrable on $[a,b]$, and

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

(2010.6aii)

SOLUTION: প্রথমে দেখাব যে $|f|$ হল Riemann integrable. এখানে আমরা integral-টা কত হবে তা নিয়ে মাথা ঘামাব না, তাই Cauchy criterion দিয়েই কাজ চলে যাবে।

First part: To show

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([a,b]) \quad U(P,|f|) - L(P,|f|) < \epsilon.$$

Take any $\epsilon > 0$.

$\because f$ is integrable on $[a,b]$ so

$$\exists P \in \mathbb{P}([a,b]) \quad U(P,f) - L(P,f) < \epsilon.$$

Choose this P.

Let

$$H_i = \sup\{\big||f(x)| - |f(y)|\big| \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$F_i = \sup\{|f(x) - f(y)| \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

লক্ষ কর যে

$$
\begin{aligned}
U(P,f) - L(P,f) &= \sum_1^n F_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
U(P,|f|) - L(P,|f|) &= \sum_1^n H_i \cdot (x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}
$$

সুতরাং H_i এবং F_i-এর মধ্যে একটা সম্পর্ক পেলে সুবিধা হবে--

Since by triangle inequality,

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leq |f(x) - f(y)|,$$

So

$$H_i \leq F_i.$$

So

$$
\begin{aligned}
U(P,|f|) - L(P,|f|) &= \sum (x_i - x_{i-1}) H_i \\
&\leq \sum (x_i - x_{i-1}) F_i \\
&= U(P,f) - L(P,f) < \epsilon,
\end{aligned}
$$

as required.

দ্বিতীয় অংশে আমরা Darboux-র সংজ্ঞা লাগাব। আমরা খালি দেখাব যে $|\overline{\int}_a^b f| \leq \overline{\int}_a^b |f|$. যেহেতু Riemann integrability আগেই দেখিয়েছি তাই এতেই প্রমাণ হয়ে যাবে যে $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Second part: Shall show that

$$\forall P \in \mathbb{P}([a,b]) \quad U(P,f) \leq U(P,|f|)$$

$\forall P$ Take any $P \in \mathbb{P}([a,b])$:

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

Let

$$
\begin{aligned}
M_i &= \sup\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\
N_i &= \sup\{|f(x)| \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}.
\end{aligned}
$$

We know $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq |f(x)|$.

$\therefore \forall i \quad M_i \leq N_i$.

$$\begin{aligned}\therefore U(P,f) &= \sum M_i\cdot(x_i-x_{i-1})\\ &\le \sum N_i\cdot(x_i-x_{i-1})\\ &= U(P,|f|).\end{aligned}$$

Taking inf over $P\in\mathbb{P}([a,b])$, we have

$$\overline{\int}_a^b f(x)dx \le \overline{\int}_a^b |f(x)|dx.$$

$\because f$ and $|f|$ are both Riemann integrable on $[a,b]$,

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (*)$$

Now, taking $-f$ in pace of f, we get

$$\int_a^b (-f(x))dx \le \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (**)$$

Combining (*) and (**) we get

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|,$$

as required.

■

Example 21: If f is integrable over $[a,b]$, show that $|f|$ is integrable over $[a,b]$, and

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

When does the equality hold?[3+1] **(2014.5a)**
SOLUTION: প্রথম অংশটা তো আগের অংকটাই। দ্বিতীয় অংশটা কিন্তু বেশ কঠিন। সেটার উত্তর আমরা শিখব চতুর্থ অধ্যায়ে গিয়ে। ■

যদি f হয় Riemann integrable, তবে $|f|$-ও Riemann integrable হতে বাধ্য। কিন্তু এর উল্টোটা ঠিক নয়। এমন হতেই পারে যে f মোটেই Riemann integrable নয়, অথচ $|f|$ দিব্যি Riemann integrable হয়ে বসে আছে। এরকম একটা উদাহরণ চেয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 22: Prove or disprove: If $|f|$ is Riemann integrable over a closed and bounded interval

I, then f is also Riemann integrable over I.[3] **(2009.1d,2005.1h)**

SOLUTION:

If $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is such that $|f|$ is Riemann integrable on $[a,b]$, then f need not be Riemann integrable on $[a,b]$.

Counterexample: Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be defined as

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then $|f(x)| \equiv 1$. Thus, $|f|$ is a constant function, and hence Riemann integrable on $[0,1]$.

Shall show:

$$\forall P \in \mathbb{P}([0,1]) \quad L(P,f) = -1 \text{ and } U(P,f) = 1.$$

$\forall P$ Take any $P \in \mathbb{P}([0,1])$:

$$0 = x_0 < \cdots < x_n = 1.$$

By denseness of $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{Q}^c$ in $\mathbb{R}$,

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \quad \exists r, s \in [x_{i-1}, x_i] \quad r \in \mathbb{Q}, \quad s \in \mathbb{Q}^c.$$

Hence $\forall i \in \{1, ..., n\}$

$$\begin{aligned} \sup\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} &= 1, \\ \inf\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} &= -1. \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} U(P,f) &= \sum_1^n \sup\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_1^n (x_i - x_{i-1}) = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned} L(P,f) &= \sum_1^n \inf\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}(x_i - x_{i-1}) \\ &= -\sum_1^n (x_i - x_{i-1}) = -1. \end{aligned}$$

Taking sup and inf over $P \in \mathbb{P}([0,1])$, we have

$$\underline{\int_0^1} f = -1 \neq \overline{\int_0^1} f = 1.$$

$\therefore f$ is not Riemann integrable on $[0,1]$.

■

একই প্রশ্ন সামান্য অন্য সুরে।

Exercise 9: Define Riemann integrability of a function on a closed and bounded interval $[a,b]$ as a limit of a sum. Prove or disprove: If $|f|$ is Riemann integrable on $[a,b]$, then f is Riemann integrable on $[a,b]$.[2+2] **(2012.5a,2006.4ai)** ■

11.2 Sum, difference

Example 23: Let $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ be Riemann integrable on $[a,b]$. We define $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ for all $x \in [a,b]$. Show that $f+g$ is Riemann integrable in $[a,b]$.[3] **(2008.5c)**

SOLUTION: এই অংকটায় খালি এটুকু দেখাতে বলেছে যে $f+g$-টা integrable হবে। আমরা এর থেকেও বেশী কিছু বলতে পারি--$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$ হবে, অর্থাৎ শুধুমাত্র integral-টার অস্তিত্বই নয়, integral-টা কী হবে সেটাও বলে দিতে পারি। আমরা প্রমাণটাও সেইভাবেই করব। যদি খালি integrability দেখিয়েই ছেড়ে দিতাম তবে Cauchy criterion দিয়েই কাজ হয়ে যেত। কিন্তু এখানে যেহেতু integral-টাও বার করব, তাই Darboux-র সংজ্ঞা লাগাতে হবে।
প্রথমে দেখাব যে কোনো partition P-এর জন্যই

$$U(P, f+g) \leq U(P,f) + U(P,g).$$

Let $P \in \mathbb{P}([a,b])$ be any partition.
Let

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(x)+g(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ N_i &= \sup\{f(x) \ : \ x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ K_i &= \sup\{g(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

Then $M_i \leq N_i + K_i$.

$$\begin{aligned} \therefore U(P, f+g) &= \sum M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum N_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum K_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= U(P,f) + U(P,g). \end{aligned}$$

এবার যাবতীয় $P \in \mathbb{P}([a,b])$-র উপরে sup নেব--

$\therefore$ Taking sup over all $P \in \mathbb{P}([a,b])$,

$$\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

Similarly, considering inf,

$$\underline{\int_a^b}(f+g) \geq \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g.$$

$\because f$ and g are Riemann integrable,

$$\therefore \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f \text{ and } \underline{\int_a^b} g = \overline{\int_a^b} g = \int_a^b g.$$

So

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \underline{\int_a^b} f+g \leq \overline{\int_a^b} f+g \leq \int_a^b f + \int_a^b g,$$

Thus,

$$\underline{\int_a^b} f+g = \overline{\int_a^b} f+g,$$

proving that $f+g$ is Riemann integrable. Also we see that

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

■

নীচের অংকটাও একইভাবে হবে।

Exercise 10: যদি $f(x), g(x)$ দুজনেই $[a,b]$-র উপর Riemann integrable হয়, তবে দেখাও যে $f(x)-g(x)$-ও তাই হবে, এবং

$$\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

হবে। ■

আরও একটা একই রকম অংক--

Exercise 11: ধরো $f(x)$ বলা আছে $[a,b]$-র উপর Riemann integrable, আর $\alpha \in \mathbb{R}$ হল যে কোনো সংখ্যা। তবে দেখাও যে $\alpha f(x)$-ও $[a,b]$-র উপর Riemann integrable হবে, এবং

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

হবে। ■

Example 24: Prove or disprove: If $f+g$ is Riemann integrable on $[a,b]$ then f and g are also Riemann integrable on $[a,b]$.[3] **(2012.1f)**

SOLUTION:

Let $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ be defined as

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

and $g(x)=-f(x)$.

$\because \mathbb{Q}$ and $\mathbb{Q}^c$ are dense in $\mathbb{R}$,

$$\therefore \forall P\in\mathbb{P}([0,1])\quad L(P,f)=0 \text{ and } U(P,f)=1.$$

Hence

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx=0\neq 1=\overline{\int_0^1} f(x)dx.$$

So f is not Riemann integrable on $[0,1]$.

$\because f(x)=-g(x)$

$\therefore g(x)$ is also not Riemann integrable on $[0,1]$.

But $f(x)+g(x)\equiv 0$ is Riemann integrable on $[0,1]$.

■

DAY 12
Basic facts (part 3)

যদি $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ দুজনেই $[a,b]$-র উপরে Riemann integrable হয় তবে ওদের product (গুণফল) $f(x)g(x)$-ও হবে Riemann integrable. একই কথা বলা যায় $f(x)/g(x)$-এর ক্ষেত্রেও, খালি বুঝতেই পারছ $g(x)$-টা শূন্যর কাছে চলে গেলেই মুস্কিল, তাই $|g(x)|>\alpha$ হতে হবে, যেখানে $\alpha>0$ কোনো একটা সংখ্যা। এর পর আমরা প্রমাণ করব যে দুটো function যদি Riemann integrable হয় তবে ওদের একটাকে অন্যজনের পেটের মধ্যে ঢোকালেও Riemann integrable থাকে। অর্থাৎ $F(x)$ আর $G(x)$ দুজনেই Riemann integrable হলে $F(G(x))$-ও Riemann integrable হবে। মনে আছে নিশ্চয়ই যে একটা function-কে এভাবে আরেকটার পেটের মধ্যে ঢোকানোকে বলে functionএর composition, আর লেখে $F\circ G$, অর্থাৎ

$$(F\circ G)(x)=F(G(x)).$$

যদি F-কে ঢোকাতাম G-এর পেটে তবে হত

$$(G\circ F)(x)=G(F(x)).$$

এই সবই আমরা প্রমাণ করব। কিন্তু তার আগে এদের ব্যবহার করে একটা সহজ অংক কষা যাক।

Example 25: If f, g are integrable over $[a, b]$, prove that

$$\int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 2\int_a^b |f(x)g(x)|dx.$$

[2] **(2014.1biii)**

SOLUTION: এইটা খুবই সহজ অংক, বেশ কয়েকটা পরিচিত জিনিস জুড়ে জুড়ে তৈরী। প্রথমেই বলে রাখি যে, এখানে $f^2(x)$ আর $g^2(x)$ বলতে $(f(x))^2$ আর $(g(x))^2$ বোঝানো হয়েছে। যেহেতু f, g বলা আছে integrable, তাই f^2, g^2, fg এবং $|fg|$-ও integrable.

> Since f, g are integrable over $[a, b]$,
> hence so are $|f|, |g|, f^2, g^2, |fg|$ and $(|f| - |g|)^2$.
> Also $(|f| - |g|)^2 \geq 0$. So $\int_a^b (|f| - |g|)^2 \geq 0$.
> Thus $\int_a^b (f^2 + g^2 - 2|fg|) \geq 0$.
> $\therefore \int_a^b (f^2 + g^2) \geq 2\int_a^b |fg|$,
> or $\int_a^b f^2 + \int_a^b g^2 \geq 2\int_a^b |fg|$, as required.

■

এবার তাহলে প্রমাণগুলোয় হাত দেওয়া যাক। আমরা দেখাব যে দুটো function যদি Riemann integrable হয় তবে তাদের গুণফল, ভাগফল এবং composition-রাও Riemann integrable হয় (ভাগের বেলায় সামান্য কিছু বাড়তি শর্ত লাগে, denominator-টাকে শূন্যর থেকে দূরে রাখতে)। প্রমাণগুলো সবই হবে Cauchy criterion ব্যবহার করে। সবগুলো প্রমাণই খানিকটা লম্বা হবে, বিশেষ করে composition-এর প্রমাণটা। চতুর্থ অধ্যায়ে আমরা একটা জবরদস্ত theorem প্রমাণ করব--Riemann-Lebesgue theorem. সেটা লাগালে আজকের theorem-গুলোর প্রমাণ সব দু'তিন লাইনে সেরে ফেলা যাবে!

প্রতিটা প্রমাণেরই মূল কাঠামো একই--আমাদের হাতে তিনটে function থাকবে, f, g আর ওদের মিলিয়ে যে নতুন function-টা বানানো হয়েছে সেটা, $f(x)g(x)$ বা $f(x)/g(x)$ বা $f(g(x))$. যদি আমরা নতুন function-টাকে $h(x)$ বলি তবে Cauchy criterion লাগানো মানে হল--

- দেওয়া আছে যে, $U(P, f) - L(P, f)$ আর $U(P, g) - L(P, g)$-কে যে কোনো $\epsilon > 0$-র চেয়ে ছোটো করা যায়,
- দেখাতে হবে যে, $U(P, h) - L(P, h)$-কেও যে কোনো $\epsilon > 0$-র চেয়ে ছোটো করা যাবে।

যদি একটা partition P নিই

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b$$

তবে আমরা কাজ করব এই তিনটে জিনিস নিয়ে

$$\begin{aligned}
U(P, f) - L(P, f) &= \sum_1^n \sup\{|f(x) - f(y)| \ : \ x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}(x_i - x_{i-1}), \\
U(P, g) - L(P, g) &= \sum_1^n \sup\{|g(x) - g(y)| \ : \ x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}(x_i - x_{i-1}), \\
U(P, h) - L(P, h) &= \sum_1^n \sup\{|h(x) - h(y)| \ : \ x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}(x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

সুতরাং আমাদের উদ্দেশ্য হবে এটা দেখানো যে $|f(x)-f(y)|$ আর $|g(x)-g(y)|$ দুজনেই ছোটো হলে $|h(x)-h(y)|$-ও ছোটো হতে বাধ্য। এই কাজটা বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্নভাবে হবে, কিন্তু প্রমাণগুলোর বাকি সবই একই থাকবে।

12.1 Multiplication

Example 26: Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ and $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ be both Riemann integrable on $[a,b]$. Prove

that the function fg defined by $(fg)(x)=f(x)g(x)$ for all $x\in[a,b]$ is Riemann integrable on $[a,b]$.[3] **(2007.5c)**

SOLUTION:

Let $h(x)=f(x)g(x)$.

To show:

$$\forall\epsilon>0\quad \exists P\in\mathbb{P}([a,b])\quad U(P,fg)-L(P,fg)<\epsilon.$$

Take any $\epsilon>0$.

এইবার আমাদের একটা যুৎসই $P\in\mathbb{P}([a,b])$ পেতে হবে। তার জন্য এক্ষুণি যে কথাটা বললাম সেটা কাজে লাগবে-- $|f(x)-f(y)|$ আর $|g(x)-g(y)|$ দুজনেই ছোটো হলে $|h(x)-h(y)|$-ও ছোটো হবে। এখানে $h(x)=f(x)g(x)$-এর জন্য এটা এভাবে করা যায়--

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(y)g(y)| &= |f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)|\\ &\leq |f(x)|\cdot|g(x)-g(y)|+|g(y)|\cdot|f(x)-f(y)|\\ &\leq B\big(|g(x)-g(y)|+|f(x)-f(y)|\big),\end{aligned}$$

যেখানে $B>0$ হল f আর g-এর কোনো bound. যেহেতু ওরা দুজনেই Riemann integrable, তাই bounded-ও বটে। সুতরাং দুজনেরই একটা করে bound আছে, এদের মধ্যে যে bound-টা বেশী বড় সেটাকেই B বলেছি।
দেখতেই পারছ যে $|h(x)-h(y)|<\epsilon$ রাখতে হলে $|f(x)-f(y)|$ আর $|g(x)-g(y)|$ দুজনকেই $<\frac{\epsilon}{2B}$ রাখলেই হবে। ব্যস্, পুরো প্রমাণটার মধ্যে এটুকুই খালি বুদ্ধি খাটাবার জায়গা ছিল, বাকিটা পুরো ছকে বাঁধা।

Given f,g are Riemann integrable (hence bounded).

Let $B>0$ be any bound for f and g.

Also, $\exists P_1\in\mathbb{P}([a,b])\quad U(P_1,f)-L(P_1,f)<\frac{\epsilon}{2B}$.

and

$\therefore\exists P_2\in\mathbb{P}([a,b])\quad U(P_2,g)-L(P_2,g)<\frac{\epsilon}{2B}$.

$\exists P$ Choose $P=P_1\cup P_2$.

এবার রাফটা গুছিয়ে লিখে দেওয়ার অপেক্ষা--

Let

$$\begin{aligned}H_i &= \sup\{|f(x)g(x)-f(y)g(y)|\ :\ x,y\in[x_{i-1},x_i]\},\\ F_i &= \sup\{|f(x)-f(y)|\ :\ x,y\in[x_{i-1},x_i]\},\\ G_i &= \sup\{|g(x)-g(y)|\ :\ x,y\in[x_{i-1},x_i]\}.\end{aligned}$$

Since $\forall x, y$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &\leq B\big(|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|\big). \end{aligned}$$

Taking supremum of both sides for $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$H_i \leq B \cdot (F_i + G_i).$$

$$\begin{aligned} & U(P, fg) - L(P, fg) \\ = \; & \sum (x_i - x_{i-1}) H_i \\ \leq \; & B \sum (x_i - x_{i-1})(F_i + G_i) \\ \leq \; & B \Big[\sum (x_i - x_{i-1}) F_i + \sum (x_i - x_{i-1}) G_i\Big] \\ \leq \; & B\big[U(P, f) - L(P, f) + U(P, g) - L(P, g)\big] \\ \leq \; & B\big[U(P_1, f) - L(P_1, f) + U(P_2, g) - L(P_2, g)\big] \\ < \; & B\big[\tfrac{\epsilon}{2B} + \tfrac{\epsilon}{2B}\big] = \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

■

Example 27: Without assuming that the product of two Riemann integrable functions defined over an interval I is Riemann integrable on I, prove that if f is Riemann integrable function on the closed and bounded interval $[a, b]$, then f^2 is also Riemann integrable on $[a, b]$.[4] **(2003.6ai)**
SOLUTION: এই অংকটা বলতে গেলে আগের অংকটাই, খালি এখানে f আর g দুটো function-কে গুণ না করে f-এর সাথে f-কেই গুণ করে দিয়েছে। সুতরাং যদি আগের অংকটাই করে যাও যাবতীয় g-এর জায়গায় f বসিয়ে তবেই এই অংকটা হয়ে যাবে। সেটা করতে গেলেই দেখবে বেশ কিছু জিনিস কাটাকুটি হয়ে সহজ হয়ে যাচ্ছে। মূল ধারণাটা দিচ্ছি, বাকিটা ছকে বাঁধা। এখানে $h(x) = \big(f(x)\big)^2$ নেব। দেখাতে হবে $|f(x) - f(y)|$ যদি ছোটো হয় তবে $|h(x) - h(y)|$-ও ছোটো হতে বাধ্য। সেটা এইভাবে--

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |f(x)^2 - f(y)^2| \\ &= |f(x) + f(y)| \times |f(x) - f(y)| \\ &\leq \big(|f(x)| + |f(y)|\big) \times |f(x) - f(y)| \\ &\leq 2B \times |f(x) - f(y)|, \end{aligned}$$

যেখানে হল $B > 0$ হল $f(x)$-এর একটা bound. সুতরাং দেখতেই পারছ যে $|h(x) - h(y)| < \epsilon$ চাইলে $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2B}$ নিলেই চলবে। ■

Exercise 12: Give examples of two non-Riemann integrable functions $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ such that the product $f \cdot g$ is Riemann integrable on $[a, b]$.[3] **(2013.5b)**
HINT: একটু ধরিয়ে দিচ্ছি। এখানে $f(x)$ নেওয়া যেতে পারে এইভাবে--

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ rational} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

এবার ভাবো এর দোসর একটা g কীভাবে পারে যাতে g-ও non-integrable হয়, অথচ fg-টা দিব্যি integrable হয়ে যায়! নানাভাবে g নেওয়া যায়, একটা কায়দা হল f-টাকেই একটু এদিক-ওদিক করে দেওয়া। আগেই উত্তর দেখে নিলে শেষে নিজেরই লজ্জা করবে বলে দিচ্ছি! অংকটার উত্তর গুছিয়ে লেখার সময়ে কিন্তু বলে দিও f, g কেন non-integrable আর fg-ই বা কেন integrable.
■

12.2 Division

এবার দেখাব ভাগের ক্ষেত্রে। যেহেতু $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$, তাই $\frac{1}{g}$-কে Riemann integrable দেখাতে পারলেই হবে। তবে এর জন্য কিছু শর্ত লাগবে। একটা শর্ত তো বুঝতেই পারছ $g(x) \neq 0$ হতে হবে। কিন্তু সেটাই যথেষ্ট নয়। যেমন যদি

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in (0, 1] \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

নিই, তবে

$$\frac{1}{g(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if } x \in (0, 1] \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

হবে। কিন্তু যেহেতু $g(x)$-টা শূন্যর একেবারে কাছাকাছি যেতে পারে, তাই $\frac{1}{g(x)}$-টা unbounded হয়ে পড়েছে, ফলে Riemann integrable হতে পারছে না। সেই কারণে এমন একটা শর্ত চাই যে $g(x)$-টা সব সময়ে 0-র থেকে একটু দূরে থাকবে, মানে

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall x \quad |g(x)| \geq \alpha.$$

এরকম ক্ষেত্রে আমরা বলি $g(x)$ হল "bounded away from 0".

Example 28: Let $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ be Riemann integrable on $[a, b]$. Also $\forall x \in [a, b] \quad |g(x)| > \alpha$ for some $\alpha > 0$. Prove that the function $\frac{1}{g}$ is Riemann integrable on $[a, b]$.
SOLUTION: এটাও সেই একইরকম ছকে বাঁধা অংক। এখানে নতুন function-টা হল $h(x) = \frac{1}{g(x)}$.

Shall show that

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([a, b]) \quad U\left(P, \frac{1}{g}\right) - L\left(P, \frac{1}{g}\right) < \epsilon.$$

Take any $\epsilon > 0$.

এইবার একটু রাফ করব যুৎসই একটা $P \in \mathbb{P}([a, b])$ বার করতে। উদ্দেশ্য হল এটা দেখানো যে $|g(x) - g(y)|$-কে ছোটো করা গেলে $|h(x) - h(y)|$-কেও ছোটো করা যাবে--

$$|h(x) - h(y)| = \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)| \cdot |g(y)|} \leq \frac{1}{\alpha^2}|g(x) - g(y)|.$$

সুতরাং $|h(x) - h(y)| < \epsilon$ করতে হলে $|g(x) - g(y)| < \epsilon\alpha^2$ করলেই চলবে।

$\because g$ is integrable on $[0,1]$,

$$\therefore \exists P \in \mathbb{P}([a,b]) \quad U(P,g) - L(P,g) < \epsilon\alpha^2.$$

$\boxed{\exists P}$ Choose this P.

Let

$$\begin{aligned} H_i &= \sup\left\{\left|\tfrac{1}{g(x)} - \tfrac{1}{g(y)}\right| \ : \ x,y \in [x_{i-1},x_i]\right\}, \\ G_i &= \sup\{|g(x)-g(y)| \ : \ x,y \in [x_{i-1},x_i]\}. \end{aligned}$$

Now

$$\left|\tfrac{1}{g(x)} - \tfrac{1}{g(y)}\right| = \tfrac{|g(x)-g(y)|}{|g(x)|\cdot|g(y)|} \le \tfrac{1}{\alpha^2}|g(x)-g(y)|.$$

Taking supremum of both sides for $x,y \in [x_{i-1},x_i]$,

$$H_i \le \tfrac{1}{\alpha^2} G_i.$$

$$\begin{aligned} \therefore U\left(P,\tfrac{1}{g}\right) - L\left(P,\tfrac{1}{g}\right) &= \sum_{i=1}^{n} H_i(x_i - x_{i-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \tfrac{G_i}{\alpha^2}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \tfrac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n} G_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \tfrac{1}{\alpha^2}\big(U(P,g) - L(P,g)\big) \\ &< \tfrac{1}{\alpha^2}\epsilon\alpha^2 = \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

■

Example 29: Prove or disprove: Given that $f:[0,1] \to [0,1]$ is Riemann integrable on $[0,1]$, the function g defined on $[0,1]$ by

$$g(x) = \frac{1}{f(x)-2}$$

is bounded and Riemann integrable on $[0,1]$.[3] **(2010.1d)**

SOLUTION: যেহেতু $f(x)$-টা $[0,1]$-এর উপর Riemann integrable, তাই $f(x)-2$-ও তাই (কেন বল তো?)। এদিকে $f(x)$ সব সময়ে $[0,1]$-এর মধ্যে আছে, তাই $f(x)-2$ আছে $[-2,-1]$-এর মধ্যে। সুতরাং শূন্যর খুব কাছে যেতে পারছে না--bounded away from 0. অতএব $\frac{1}{f(x)-2}$ অবশ্যই Riemann integrable হবে। এবার এটা গুছিয়ে লিখে ফ্যালো দেখি! ■

12.3 Maximum, minimum

এটাও একই ছকের আরেকটা অংক। এখানে কাজ করব

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

নিয়ে। এখানেও যথারীতি উদ্দেশ্য হল এটা দেখানো যে $|f(x) - f(y)|$ আর $|g(x) - g(y)|$ দুজনেই যথেষ্ট ছোটো হলে $|h(x) - h(y)|$-কেও যত খুশী ছোটো বানানো যাবে। এ ক্ষেত্রে $|h(x) - h(y)|$-এর সঙ্গে $|f(x) - f(y)|$ আর $|g(x) - g(y)|$-এর সম্পর্কটা এরকম--

$$|h(x) - h(y)| \le \max\{|f(x) - f(y)|, |g(x) - g(y)|\}.$$

প্রমাণ করাটা খুব কঠিন নয়। আমরা জানি $h(y) \ge f(y)$ এবং $h(y) \ge g(y)$. এবার ধরো $h(x)$ আর $h(y)$-এর মধ্যে $h(x)$-টা বড়। তাহলে $|h(x) - h(y)| = h(x) - h(y)$ হবে। এখন হয় $h(x) = f(x)$ আর নয়তো $h(x) = g(x)$. যদি $h(x) = f(x)$ হয় তবে বলতে পারি--

$$|h(x) - h(y)| = h(x) - h(y) = f(x) - h(y) \le f(x) - f(y) \le |f(x) - f(y)|.$$

একইভাবে যদি $h(x) = g(x)$ হয় তবে পাব--

$$|h(x) - h(y)| \le |g(x) - g(y)|.$$

সুতরাং দুই ক্ষেত্রেই $|h(x) - h(y)|$-টা থাকছে $\max\{|f(x) - f(y)|, |g(x) - g(y)|\}$-এর নীচে।

Example 30: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ and $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ be Riemann integrable functions on $[a, b]$. State, with reasons, whether $\max(f, g)$ is Riemann integrable on $[a, b]$.[3] **(2004.1d)**

SOLUTION:

We shall show that $h = \max(f, g)$ is Riemann integrable on $[a, b]$, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([a, b]) \quad U(P, h) - L(P, h) < \epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because f, g$ are Riemann integrable on $[a, b]$,

$$\therefore \exists P_1, P_2 \in \mathbb{P}([a, b]) \quad \begin{cases} U(P_1, f) - L(P_1, f) < \epsilon \\ U(P_2, g) - L(P_2, g) < \epsilon \end{cases}$$

$\exists P$ Choose $P = P_1 \cup P_2$.

Then

$$\begin{aligned} U(P, f) - L(P, f) &\le U(P_1, f) - L(P_1, f) < \epsilon, \\ U(P, g) - L(P, g) &\le U(P_2, g) - L(P_2, g) < \epsilon. \end{aligned}$$

Let

$$\begin{aligned} H_i &= \sup\{|h(x)-h(y)| \;:\; x,y\in[x_{i-1},x_i]\},\\ F_i &= \sup\{|f(x)-f(y)| \;:\; x,y\in[x_{i-1},x_i]\},\\ G_i &= \sup\{|g(x)-g(y)| \;:\; x,y\in[x_{i-1},x_i]\}. \end{aligned}$$

এইবার সেই জিনিসটা--

We have

$$\forall x,y\in[a,b] \quad |h(x)-h(y)| \le \max\{|f(x)-f(y)|, |g(x)-g(y)|\}.$$

⟦ Because:

$\forall x,y$ Take any $x,y\in[a,b]$.

W.l.g., let $h(x)\ge h(y)$.

If $h(x)=f(x)$ then

$$\begin{aligned} |h(x)-h(y)| &= h(x)-h(y)\\ &= f(x)-h(y)\\ &\le f(x)-f(y) \quad [\because h(y)\ge f(y)]\\ &\le |f(x)-f(y)|\\ &\le \max\{|f(x)-f(y)|, |g(x)-g(y)|\}, \end{aligned}$$

as required. Similarly if $h(x)=g(x)$.

⟧

Now taking sup over $x\in[x_{i-1},x_i]$ we get

$$H_i \le \max\{F_i, G_i\}.$$

ব্যস্‌, এরপর থেকে সহজ--

$$\begin{aligned} \therefore\;& U(P,h)-L(P,h)\\ =\;& \sum H_i\cdot(x_i-x_{i-1})\\ \le\;& \sum \max(F_i,G_i)\cdot(x_i-x_{i-1})\\ =\;& \max\left\{\sum F_i\cdot(x_i-x_{i-1}), \sum G_i\cdot(x_i-x_{i-1})\right\}\\ =\;& \max\left\{U(P,f)-L(P,f), U(P,g)-L(P,g)\right\} < \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

■

12.4 Composition

এইবার আরও একটা একইরকম ছকের অংক করব, কিন্তু এবার একটা function-কে আরেকটার পেটে ঢোকাব, মানে composition করব। ধরো একটা function হল $f(x)$, সেটাকে কোনো একটা $\phi(x)$-এর পেটে ঢোকালে হবে

$$(\phi \circ f)(x) = \phi(f(x)).$$

অবশ্য এরকম ভাবে যাকে তাকে যার তার পেটে ঢুকিয়ে দেওয়া যায় না। যেমন $f(x)$ যদি negative value নিতে পারে, তবে তাকে তুমি মোটেই log বা square root-এর পেটে ঢুকিয়ে দিতে পারো না, কারণ ওরা negative সংখ্যা মোটেই হজম করতে পারে না! তাই যদি $f : I \to \mathbb{R}$ এবং $\phi : J \to \mathbb{R}$ হয়, তবে হজমের গোলমাল এড়াবার জন্য অবশ্যই $f(I) \subseteq J$ হতে হবে!

ধরো সেভাবেই f আর ϕ নিলাম। যদি বলি f আর ϕ প্রত্যেকেই Riemann integrable তাহলে কি $\phi \circ f$-ও Riemann integrable হবেই? উত্তর হল--না, এমন কোনো স্থিরতা নেই। কিন্তু যদি f হয় Riemann integrable আর ϕ হয় continuous, তবে $\phi \circ f$-এর Riemann integrable হওয়া কেউ ঠেকাতে পারে না।

নীচের অংকে এটাই দেখাতে বলেছে। আমরা এখানে আমাদের ছক অনুযায়ী এগোব। তাতে অংকটা বিচ্ছিরিরকমের লম্বা হবে। চতুর্থ অধ্যায়ে আমরা একই জিনিসের অনেক সংক্ষিপ্ত প্রমাণ শিখব। সুতরাং চাইলে নীচের অংকের সমাধানটা বাদ দিয়ে যেতে পারো।

Example 31: Let $I = [a, b]$ and $J = [c, d]$ and suppose that $f : I \to \mathbb{R}$ is integrable on I and $\phi : J \to \mathbb{R}$ is continuous and $f(I) \subseteq J$. Prove that the composite function $\phi \circ f : I \to \mathbb{R}$ is integrable on I.[4] **(2007.5aii)**

SOLUTION:

To show

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([a, b]) \quad U(P, \phi \circ f) - L(P, \phi \circ f) < \epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এইবার ছকটা লাগাবার জন্য রাফ করতে হবে। আমরা $h(x) = \phi(f(x))$ নেব। দেখাব যে $|f(x) - f(y)|$ যথেষ্ট ছোটো হলে $|h(x) - h(y)|$-ও যত খুশী ছোটো হবে, এবং এই কাজে $\phi(x)$-এর continuity-টা কোনোভাবে কাজে আসবে। এখানে ϕ-এর domain হল closed, bounded. তাই ϕ শুধু continuous-ই নয়, uniformly continuous-ও বটে! এখন যদি $|f(x) - f(y)|$ খুব ছোটো হয়, মানে $f(x)$ আর $f(y)$ খুব কাছাকাছি থাকে, তবে ϕ-টা uniformly continuous হওয়ার সুবাদে $\phi(f(x))$ আর $\phi(f(y))$-ও খুব কাছাকাছি থাকবে। এটা সেই ϵ-δ-র পুরোনো গল্প--তুমি যাই $\epsilon_1 > 0$ দাও না কেন এমন $\delta > 0$ পাব যাতে $|f(x) - f(y)| < \delta$ হলে $|h(x) - h(y)| < \epsilon_1$ হবে।

কিন্তু আগের অংকগুলোতে যেমন বেশ একটা inequality পেয়েছিলাম, এখানে সেরকমটা হচ্ছে না। তাই প্রশ্ন থেকেই যাচ্ছে যে, $|f(x) - f(y)| \geq \delta$ হলে $|h(x) - h(y)|$-এর বিষয়ে কী বলা যায়? তার উত্তর এই--যেহেতু ϕ একটা closed, bounded set-এর উপর continuous function, তাই bounded-ও বটে। যদি $B > 0$ একটা bound হয় তবে

$$|h(x) - h(y)| = |\phi(f(x)) - \phi(f(y)| \leq |\phi(f(x))| + |\phi(f(y)| \leq 2B$$

হবে। সুতরাং জানা গেল যে $|f(x) - f(y)|$ খুব ছোটো হলে $|h(x) - h(y)|$-ও খুব ছোটো হবে, আর $|f(x) - f(y)|$ যদি নেহাত ছোটো নাও হয়, তাও $|h(x) - h(y)|$ একেবারে ছাদ ফুঁড়ে বেরিয়ে যাবে না।

এবার কী করব সেটা বুঝে নিই। প্রথমে একটা P নেব যাতে $U(P, f) - L(P, f)$ বেশ ছোটো হয় (কত ছোটো সেটা এক্ষুণি বলছি)। ধরো P হল $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. কিন্তু তার মানেই এই নয় যে এর প্রতিটি subinterval-এর মধ্যেই $|f(x) - f(y)|$-রা সব সময়ে ভদ্রলোকের মত $< \delta$ হবে। যদি হত, তবে ল্যাঠা চুকেই যেত। কিন্তু তার কোনো নিশ্চয়তা নেই। তাই আমরা P যাবতীয় subinterval-দেরকে দুই দলে ভাগ করব--ভদ্র আর অভদ্র। ভদ্র হল তারা যাদের বেলায় $|f(x) - f(y)| < \delta$ হবে, আর বাকিরা অভদ্র। ভদ্রদের set-টাকে বলব A. সুতরাং

$$U(P, h) - L(P, h) = \sum_{i \in A} H_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \notin A} H_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

যেখানে $H_i = \sup\{|h(x)-h(y)| \;:\; x,y\in[x_{i-1},x_i]\}$. এবার আমরা ভদ্র অভদ্র দুটো term-কেই $< \frac{\epsilon}{2}$ করে ছাড়ব। ভদ্রদের বেলায় কাজটা সহজ যেহেতু প্রতিটা ভদ্র H_i-ই $< \epsilon_1$. তাই--

$$\sum_{i\in A} H_i\cdot(x_i-x_{i-1}) < \epsilon_1\cdot(b-a).$$

সুতরাং $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ নিলেই হবে। অভদ্রদের বেলায় এই সুবিধাটা নেই, কিন্তু সুখের কথা যে অভদ্ররা বেশী জায়গা জুড়ে থাকতে পারে না, কারণ যদি $F_i = \sup\{|f(x)-f(y)| \;:\; x,y\in[x_{i-1},x_i]\}$ নিই, তবে $\notin A \implies F_i \geq \delta$. সুতরাং--

$$\sum_{i\notin A} F_i\cdot(x_i-x_{i-1}) \geq \delta\sum_{i\notin A}(x_i-x_{i-1}).$$

যেহেতু $\sum_{i\notin A} F_i\cdot(x_i-x_{i-1}) \leq U(P,f)-L(P,f)$ তাই

$$\delta\sum_{i\notin A}(x_i-x_{i-1}) \leq U(P,f)-L(P,f)$$

হবে। এদিকে আমরা P এমনভাবে নিয়েছিলাম যাতে $U(P,f)-L(P,f)$ "বেশ ছোটো" হয়, সুতরাং $\sum_{i\notin A}(x_i-x_{i-1})$-কেও "যথেষ্ট ছোটো" হতে হবে। কিন্তু এরকম "বেশ ছোটো" আর "যথেষ্ট ছোটো" বলে তো আর অংক হয় না। তার জন্য দস্তুরমত লিখে ফেলা দরকার যে ঠিক কত ছোটো চাই। যদি $U(P,f)-L(P,f) < \epsilon_2$ হয় তবে

$$\sum_{i\notin A}(x_i-x_{i-1}) \leq \frac{\epsilon_2}{\delta}$$

হচ্ছে। যেহেতু $H_i \leq 2B$ আছেই, সুতরাং

$$\sum_{i\notin A} H_i\cdot(x_i-x_{i-1}) < \frac{2B\epsilon_2}{\delta}$$

হবে। আমাদের উদ্দেশ্য হল অভদ্রদেরকে $\frac{\epsilon}{2}$-এর নীচে রাখা। তাই $\frac{2B\epsilon_2}{\delta} = \frac{\epsilon}{2}$ হলেই চলবে, মানে $\epsilon_2 = \frac{\epsilon\delta}{4B}$ নিলেই হবে। সব মিলিয়ে তবে দাঁড়ালোটা কী? প্রথমে $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ নিচ্ছি, তারপর সেটা থেকে ϕ-এর uniform continuity লাগিয়ে δ বার করছি। সবশেষে $\epsilon_2 = \frac{\epsilon\delta}{4B}$ নিচ্ছি।

Define $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

$\because \phi$ is continuous on closed, bounded J,

$\therefore \phi$ is bounded and uniformly continuous on J.

$\therefore \exists\delta > 0$ such that

$$\forall x,y\in J \quad (|x-y|<\delta \implies |\phi(x)-\phi(y)|<\epsilon_1)\,.$$

Let $B > 0$ be a bound of ϕ.

Define $\epsilon_2 = \frac{\epsilon\delta}{4B}$.

$\because f$ is Riemann integrable on I,

$\therefore \exists P\in\mathbb{P}([a,b]) \quad U(P,f)-L(P,f) < \epsilon_2$.

$\exists P$ Choose this P.

Let

$$\begin{aligned} H_i &= \sup\{|\phi(f(x)) - \phi(f(y))| \ : \ x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ F_i &= \sup\{|f(x) - f(y)| \ : \ x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}, \end{aligned}$$

Now $\forall x, y$

$$|\phi(f(x)) - \phi(f(y))| \leq |\phi(f(x))| + |\phi(f(y))| = B + B = 2B.$$

So $H_i \leq 2B$.
Also if $|f(x) - f(y)| < \delta$ then $|\phi(f(x)) - \phi(f(y))| < \epsilon_1$.
So taking supremum

$$F_i < \delta \implies H_i < \epsilon_1.$$

Then

$$\begin{aligned} & U(P, \phi \circ f) - L(P, \phi \circ f) \\ = & \sum_i (x_i - x_{i-1}) H_i \\ = & \sum_{i \in A} (x_i - x_{i-1}) H_i + \sum_{i \notin A} (x_i - x_{i-1}) H_i, \end{aligned}$$

where $A = \{i \ : \ F_i < \delta\}$.

এবার ব্যাপারটা দুইভাগ হয়ে গেল। প্রথমে দেখি $i \in A$ হলে কী হয়--

Now if $i \in A$ then $H_i < \epsilon_1$.

$$\begin{aligned} \therefore \ & \sum_{i \in A} (x_i - x_{i-1}) H_i \\ < \ & \epsilon_1 \sum_{i \in A} (x_i - x_{i-1}) \\ \leq \ & \epsilon_1 \sum (x_i - x_{i-1}) \\ \leq \ & \epsilon_1 (b - a) = \tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

এবার দেখি $i \notin A$ হলেই বা কী হয়--

Now

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon_2.$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad & \sum (x_i - x_{i-1}) F_i < \epsilon_2, \\
\text{or} \quad & \sum_{i \notin A} (x_i - x_{i-1}) F_i < \epsilon_2, \\
\text{or} \quad & \delta \sum_{i \notin A} (x_i - x_{i-1}) < \epsilon_2, \\
\text{or} \quad & \sum_{i \notin A} (x_i - x_{i-1}) < \tfrac{\epsilon_2}{\delta} = \frac{\epsilon}{4B}.
\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \notin A} (x_i - x_{i-1}) H_i \\
\leq \quad & 2B \sum_{i \notin A} (x_i - x_{i-1}) \\
< \quad & \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

So

$$U(P, \phi \circ f) - L(P, \phi \circ f) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

as required.

■

Answers

1. P_3 একটা refinement, কিন্তু P_2 নয়, কারণ $P_1 \not\subseteq P_2$. **4.** $\overline{\int}_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

12. $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ rational} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$ তাহলে $fg \equiv 0$, যেটা constant function, তাই integrable.

Chapter II
Riemann Integration (part 2)

DAY 13
Sufficient conditions (part 1)

একটা function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ যদি দেওয়া থাকে তবে কী দেখে চট্ করে বুঝব সেটা $[a, b]$-র উপর Riemann integrable কি না? একটা শর্ত তো অবশ্যই এই যে f-কে bounded হতে হবে। কিন্তু সেটা হল একটা necessary condition, আমরা চাইছি sufficient condition, মানে এমন কোনো শর্ত যেটা থাকলেই জোর দিয়ে বলতে পারব যে f-টা $[a, b]$-র উপরে Riemann integrable হবেই। সরাসরি সংজ্ঞা (বা Cauchy criterion) লাগিয়ে দেখা যায়, কিন্তু সেটা সব সময়ে সহজ হয় না। এর জন্য কিছু সহজ sufficient condition থাকলে সুবিধা হত। এরকম নানা রকম sufficient condition লোকে বার করেছে, যেমন একটা এইরকম-- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ যদি monotone হয়, তবে Riemann integrable হবেই। আরেকটা sufficient condition হল-- f যদি continuous হয় তবেও Riemann integrable হবে। এরকম বিভিন্ন sufficient condition নিয়ে এবার আলোচনা করব। এখানে আমরা কোথাও integral বার করা নিয়ে মাথা ঘামাব না, খালি integrability প্রমাণ করব, অতএব Cauchy criterion-টা বার বার কাজে লাগবে।

13.1 Monotone

Example 1: Show that if a function f is monotonic on $[a, b]$ then it is Riemann integrable on $[a, b]$.[3] **(2005.5a)**

SOLUTION: Monotone function-রা দুই রকমের হয়-- increasing আর decreasing. দুই ক্ষেত্রেই প্রমাণটা একই রকম, তাই খালি increasing-এর জন্য করে বাকিটা "similarly" বলে ছেড়ে দেব।

> Let f be monotone increasing on $[a, b]$.

দেখাতে হবে যে $[a, b]$-র উপরে f-টা Riemann integrable হবে। আমরা Cauchy criterion লাগাব, কিন্তু এখনই ধাঁ করে যেন Cauchy criterion-টা লিখে বোসো না। আমরা এখনও জানি না f-টা bounded কিনা। যতক্ষণ না সেটা জানছি ততক্ষণ sup বা inf নেওয়া যাবে না, তাই Cauchy criterion-এর জন্য প্রয়োজনীয় $U(P, f)$ আর $L(P, f)$-ও লিখতে পারব না। সুতরাং প্রথম কর্তব্য হল $f(x)$-কে bounded দেখানো--

> $\because f$ is monotone increasing on $[a, b]$,
>
> $$\therefore \forall x \in [a, b] \quad f(a) \le f(x) \le f(b).$$
>
> Thus, f is bounded on $[a, b]$.

এইবার Cauchy criterion লাগানো যেতে পারে--

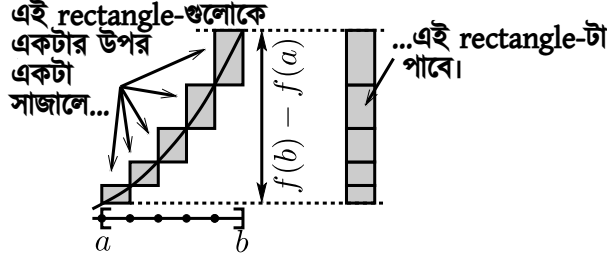
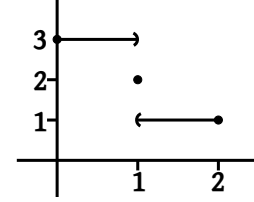



Fig 1 **Fig 2**

Shall show that f is Riemann integrable on $[a, b]$, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([a, b]) \quad U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

Take any $\epsilon > 0$.

এবার একটা যুৎসই partition P খুঁজে বার করতে হবে। Partition অজস্র আছে, তাদের মধ্যে পাগলের মত হাতড়ে না বেরিয়ে আমরা প্রথমে সহজ partition-দের মধ্যে খুঁজি, যেমন যেই সব partition-এ $[a, b]$-কে সমান কয়েকটা ভাগে ভাগ করা হয়েছে, ধরো n-খানা ভাগ। তাহলে $U(P, f) - L(P, f)$ হবে Fig 1-এর rectangle-গুলোর মত। যেহেতু $f(x)$ হল increasing, তাই rectangle-গুলো ক্রমশঃই উঠছে। সেই কারণে যদি ওদের একটার উপর একটা সাজিয়ে দাও তবে একটা লম্বা rectangle পাবে যার উচ্চতা হল $f(b) - f(a)$, আর প্রস্থ $\frac{b-a}{n}$. সুতরাং

$$U(P, f) - L(P, f) = \frac{b-a}{n} \times (f(b) - f(a)).$$

এইটাকে $< \epsilon$ রাখার জন্য $n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\epsilon}$ নিলেই চলবে।

Let $n \in \mathbb{N}$ be such that $n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a)}{\epsilon}$.

Choose $P \in \mathbb{P}([a, b])$ as the partition that divides $[a, b]$ into n subintervals of equal lengths.

এটা কী করে করলাম? ধরো $a = 2, b = 3$ আর $\delta = 0.23$ তাহলে প্রথমে $\frac{b-a}{\delta} = 1/0.23$ বার করব। এর থেকে বড় যেকোনো একটা n নেব, ধরো $n = 5$ নিলাম। তাহলে যদি $[2, 3]$-কে সমান 5 ভাগে ভাগ করি তবে প্রত্যেকটা subinterval-এর দৈর্ঘ্যই $< \delta$ হবে।

Let P be

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

$\because f$ is increasing,

$$\therefore \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i) \text{ and}$$
$$\inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1}).$$

$$\begin{aligned} U(P,f) - L(P,f) &= \sum f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}) \\ &= \tfrac{b-a}{n} \sum [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \tfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} < \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

সবশেষে $f(x)$-টা decreasing হলেও যে প্রমাণটা একইভাবে করা যায় সেটা এক লাইনে লিখে দিই।

Similarly we can prove for monotone decreasing f.

■

একটা ছোট্টো প্রয়োগ দেখি। এই অংকটা আরও নানাভাবেও করা যায়, সেগুলো পরে দেখব। আপাততঃ monotone function দিয়ে করি।

Example 2: Let

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n + 3}{x^n + 1}, \quad 0 \le x \le 2.$$

State, with reasons, whether f is Riemann-integrable on $[0,2]$.[3] **(2003.1c)**

SOLUTION:

We know that

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [0,1) \\ 1 & \text{if } x = 1 \\ \infty & \text{if } x \in (1,2] \end{cases}$$

So

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n + 3}{x^n + 1} = \begin{cases} \frac{0+3}{0+1} = 3 & \text{if } x \in [0,1) \\ \frac{1+3}{1+1} = 2 & \text{if } x = 1 \\ 1 & \text{if } x \in (1,2] \end{cases}$$

গ্রাফটা এঁকেছি Fig 2-এ। দেখতেই পাচ্ছ কিভাবে গ্রাফটা ধাপে ধাপে নেমে আসছে। অতএব monotone, এবং তাই Riemann integrable.

Since $1 < 2 < 3$, so f is a monotone function on $[0,2]$, and hence is Riemann-integrable on $[0,2]$.

■

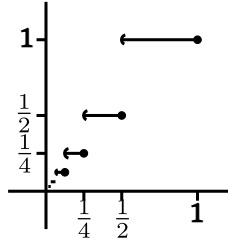



Fig 3

Example 3: A function $f : [0, 1] \to [0, 1]$ is defined as follows:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{if } \frac{1}{2^{n+1}} < x \le \frac{1}{2^n} \quad (n = 0, 1, 2, ...) \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Show that f is Riemann integrable over $[0, 1]$.[3] **(2010.6c)**
SOLUTION: $f(x)$-এর গ্রাফটা রয়েছে Fig 3-এ।

Here $f(x)$ is a non-decreasing function on $[0, 1]$.

⟦ Because:

We know that $\therefore \frac{1}{2^n}$ strictly decreases to 0.

$$\therefore (0, 1] = \bigcup_{0}^{\infty} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2^{n+1}}, \tfrac{1}{2^n}\right]}_{I_n}$$

Let $x < y \in [0, 1]$.
Then $\exists m, n \in \{0, 1, 2, ...\} \quad x \in I_m, \quad y \in I_n$.
Clearly, $n \le m$, since otherwise

$$y \le \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{2^{m+1}} < x (\Rightarrow\Leftarrow \because x < y).$$

$\because n \le m$,

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \frac{1}{2^m} \\ &\le \frac{1}{2^n} \quad [\ \because n \le m] \\ &= f(y), \end{aligned}$$

as required.

⟧

We know that monotone functions defined on closed, bounded intervals are Riemann integrable. So the given function is Riemann integrable on

> $[0, 1]$.

■

13.2 Continuous

Continuous function-রা সব সময়ে Riemann integrable হয়। এটা আমরা গত অধ্যায়েই উল্লেখ করেছি। এবার প্রমাণ করব। যথারীতি Cauchy criterion লাগাব। লেখাটাকে সহজ রাখার জন্য আমরা notation-টা সামান্য পরিবর্তন করে নিলে সুবিধা হবে। এতক্ষণ লিখছিলাম

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{1}^{n} \sup\{|f(x) - f(y)| \ : \ x, y \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot (x_i - x_{i-1}). \qquad (\mathbf{1})$$

বেশ লম্বা একটা লাইন! আমরা যদি i-th subinterval-টার নাম দিই I_i, মানে

$$I_i = [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, ..., n,$$

তবে লিখতে পারি

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{1}^{n} \sup\{|f(x) - f(y)| \ : \ x, y \in I_i\} \cdot |I_i|. \qquad (\mathbf{2})$$

এখানে $|I_i|$ হল I_i-এর দৈর্ঘ্য, অর্থাৎ

$$|I_i| = x_i - x_{i-1}.$$

বুঝতেই পারছ যে ($\mathbf{1}$) আর ($\mathbf{2}$)-এর অর্থ একই হলেও ($\mathbf{2}$)-টা লিখতে কম জায়গা লাগে।

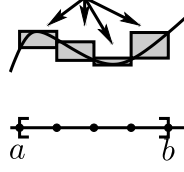
Example 4: Prove that every continuous function defined on the closed interval $[a, b]$ is Riemann integrable over $[a, b]$.[3] **(2010.5ai,2008.5a)**

SOLUTION: এখানেও আমরা Cauchy criterion লাগাতে চাই, কিন্তু যেহেতু বলে দেয় নি যে f-টা bounded হবে, তাই boundedness-টা আমাদেরই আগে প্রমাণ করে নিতে হবে।

> Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Since f is continuous on compact $[a, b]$ so it is bounded. Hence for any $P \in \mathbb{P}([a, b])$ the sums $L(P, f)$ and $U(P, f)$ are well-defined.

এইবার নিশ্চিন্তে Cauchy criterion লাগাব--

> To show: f is Riemann integrable on $[a, b]$, *i.e.*,
>
> ◎
>
>
> $\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.
>
> $\because f$ is continuous on a closed, bounded set,

যেহেতু সবগুলো rectangle-এর উচ্চতাই $< \frac{\epsilon}{b-a}, \cdots$

...তাই ওদের পাশাপাশি সাজালে একটা $\frac{\epsilon}{b-a} \times (b-a)$ সাইজের rectangle-এর মধ্যে এঁটে যাবে।

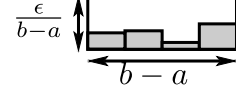



Fig 4

$\therefore f$ is uniformly continuous there.

$$\therefore \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in [a,b]$$
$$\left(|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \tfrac{\epsilon}{b-a} \right).$$

এইবার এমন একটা partition নেব যার প্রত্যেকটা subinterval-ই দৈর্ঘ্যে এই δ-এর চেয়ে কম। একটা পথ হল $[a,b]$ অনেকগুলো সমানভাগে ভাগ করা। যদি n ভাগে ভাগ করি তবে প্রত্যেকটা subinterval-এর দৈর্ঘ্য হবে $\frac{b-a}{n}$. আমরা n এত বড় নেব যাতে এটা $< \delta$ হয়--

Let $n \in \mathbb{N}$ be such that $\frac{b-a}{n} < \delta$

$\exists P$ Choose $P \in \mathbb{P}([a,b])$ as the partition that divides $[a,b]$ into n equal subintervals $I_1, ..., I_n$.

Let
$$F_i = \sup\{|f(x) - f(y)| \ : \ x, y \in I_i\}.$$
$\because \forall i \quad |I_i| < \delta, \therefore F_i < \frac{\epsilon}{b-a}$.

এইবার যা করব সেটা ছবি এঁকে বোঝানো আছে Fig 4-এ।

So
$$\begin{aligned} U(P,f) - L(P,f) &= \sum_1^n F_i \cdot |I_i| \\ &< \tfrac{\epsilon}{b-a} \sum_1^n |I_i| \\ &= \tfrac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon, \end{aligned}$$
as required.

■

DAY 14
Sufficient conditions (part 2)

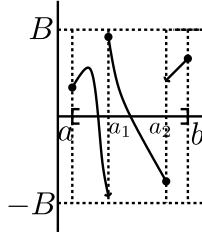



Fig 5

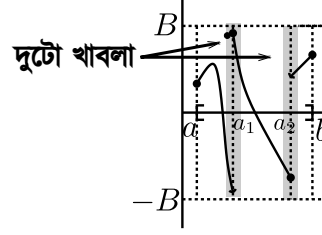



Fig 6

14.1 Finitely many discontinuities

Continuous হলেই Riemann integrable হয়, কিন্তু continuous না হলেও Riemann integrable হওয়া সম্ভব, অর্থাৎ continuity হল Riemann integrability-এর একটা sufficient condition, কিন্তু necessary condition নয়। এবার আমরা দেখাব যে অল্প-সল্প discontinuity থাকলেও Riemann integrability-তে অসুবিধা হয় না। যেমন যদি খালি finite-সংখ্যক discontinuity থাকে তবে অসুবিধা নেই। এটাই প্রমাণ করতে দিয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 5: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a bounded function such that f is continuous on $[a, b]$ except at finitely many points in (a, b). Prove that f is Riemann integrable over $[a, b]$.[4] **(2011.6a,2007.5b)**

SOLUTION: মনে করো তুমি এক থালা ভাত নিয়ে খেতে বসেছ। হঠাৎ একটা মাছি এসে ভাতের একজায়গায় বসেই উড়ে গেল। মাছির পায় অনেক ময়লা থাকে, সেগুলো পেটে যাওয়া ভালো নয়, কিন্তু তা বলে কি তুমি পুরো এক থালা ভাত ফেলে দেবে? না, তুমি খালি ওই মাছি-বসার জায়গাটাকে ঘিরে এক খাব্‌লা ভাত ফেলে দেবে। ঠিক এই কাজটাই আমরা এই অংকে করব। finite-সংখ্যক discontinuity-গুলোর প্রত্যেকটাকে ঘিরে অল্প একটু জায়গা খাব্‌লা মেরে বাদ দিয়ে দেব। ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বুঝতে খুবই সহজ, কিন্তু লিখতে গেলে একটু জবরজং লাগবে।

Let the points of discontinuity be

$$a_1 < \cdots < a_n \in (a, b).$$

Fig 5-এ খালি দুটো discontinuity নিয়েছি, a_1 আর a_2.

To show: f is Riemann integrable on $[a, b]$, *i.e.*,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([a, b]) \quad U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার খাব্‌লা মারার ব্যাপারটা করব। Fig 6 দ্যাখো। খাব্‌লা মানে হল a_1 আর a_2-কে ঘিরে দুটো ছোটো ছোটো closed interval নেওয়া, ধরো এদের প্রস্থ নেব $\delta > 0$. মানে interval-দুটো হবে $\left[a_1 - \frac{\delta}{2}, a_1 + \frac{\delta}{2}\right]$ আর $\left[a_2 - \frac{\delta}{2}, a_2 + \frac{\delta}{2}\right]$. অবশ্যই δ-টাকে বেশ ছোটো নিতে হবে যাতে--

1. এরা গিয়ে একে অপরের গায় না পড়ে,
2. $[a, b]$-র বাইরে না চলে যায়।
3. এদের উপরে আঁকা rectangle-গুলোর মোট area যেন খুব ছোটো হয়।

প্রথম দুটো শর্ত পালনের জন্য দেখতে হবে a_i-গুলোর নিজেদের মধ্যে এবং দুই প্রান্ত a, b থেকে কতটা দূরত্ব আছে। সবচেয়ে ছোটো দূরত্বটার চেয়েও যদি δ-কে ছোটো নিই তবেই প্রথম দুটো শর্ত পালিত হবে। আর

> Let
> $$\eta = \min\{a_1 - a, a_2 - a_1, ..., a_n - a_{n-1}, b - a_n\}.$$

এইটাই হল সবচেয়ে ছোটো দূরত্ব। আমরা δ-কে এর চেয়ে বেশী হতে দেব না। এবার rectangle-এর area-গুলোকে ছোটো রাখার চেষ্টা করি। বলে দিয়েছে যে f হল bounded–

> Let $B > 0$ be a bound on f.

সুতরাং প্রতিটা খাব্‌লার মধ্যেই f-টা সবচেয়ে কম $-B$ আর সবচেয়ে বেশী $+B$ হতে পারে। তার মানে প্রতিটি rectangle-এর উচ্চতা সবচেয়ে বেশী হতে পারে $2B$. তাই area হতে পারে সর্বাধিক $2B\delta$. এরকম n-খানা rectangle আছে, সুতরাং মোট area সর্বাধিক $2nB\delta$ হতে পারে। আমরা এইটাকে রাখতে চাই $\leq \frac{\epsilon}{2}$. বাকী $\frac{\epsilon}{2}$ আসবে খাব্‌লার বাইরে যে continuous অংশগুলো আছে সেটা থেকে। তার মানে আমরা চাই যেন $2nB\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$ হয়, বা $\delta < \frac{\epsilon}{4nB}$ হয়। সুতরাং সব মিলিয়ে হল--

> Let $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{4nB}, \eta\right\} > 0$.

এইবার খাব্‌লা বসাব। বার বার $\frac{\delta}{2}$ লিখতে লিখতে হাত ব্যথা হয়ে যাবে, তাই প্রতিটা খাব্‌লার দুই প্রান্তের ভদ্র নাম দিয়ে নিই--

> Define $\ell_i = a_i - \frac{\delta}{2}$ and $u_i = a_i + \frac{\delta}{2}$.

আমাদের হাতে এখন আছে n-খানা খাব্‌লা--

> Let
> $$J_1 = [\ell_1, u_1], ..., J_n = [\ell_n, u_n].$$

আর খাব্‌লাগুলো বাদ দিলে বাকি যে অংশগুলো পড়ে থাকে--

> and
> $$I_0 = [a, \ell_1], \quad I_1 = [u_1, \ell_2], \quad ..., \quad I_n = [u_n, b].$$

Fig 7-এ I_k-দের দেখানো হয়েছে। Discontinuity-ঘটিত যা কিছু সমস্যা সব J-দের মধ্যেই সীমাবদ্ধ, I-দের উপরে function-টা চমৎকার continuous.

> Then f is continuous (and hence integrable) over the subintervals I_k's.

Fig 7

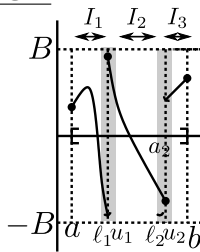



Fig 8

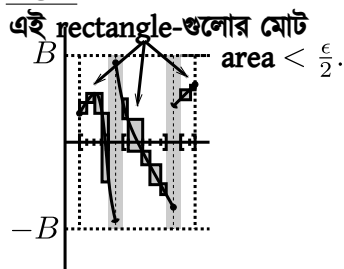
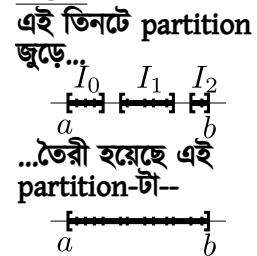



Fig 9

So for each $k = 0, ..., n$

$$\exists P_k \in \mathbb{P}(I_k) \quad U(P_k, f) - L(P_k, f) < \tfrac{\epsilon}{2(n+1)}.$$

এটা কী করলাম? প্রতিটা I_k-এর এমন একটা করে partition নিলাম যাতে ওদের মোট $U(P_k, f) - L(P_k, f)$ হয় $< \frac{\epsilon}{2}$. Fig 8 দ্যাখো। এবার এদের সবাইকে মিলিয়ে পুরো $[a, b]$-র একটা partition বানাব। মনে রেখো যে partition-রা আসলে কিছু finite subset মাত্র, যার মধ্যে দুটো প্রান্তই আছে। সুতরাং এখানে partition-গুলোকে জোড়ার জন্য খালি union নিলেই হবে। এই জায়গাটায় অনেক ছাত্রের গোল বেঁধে যায়। খালি I_k-এর partition-দের জুড়ে কী করে পুরো $[a, b]$-র partition হয়? তাহলে J_k-গুলো কোথায় গেল? Fig 9 দেখলে এটা স্পষ্ট হবে। লক্ষ কর যে P_1-এর শেষ বিন্দু থেকে শুরু করে P_2-র প্রথম বিন্দু পর্যন্ত যে subinterval-টা সেটাও কিন্তু নতুন partition-টার মধ্যে চলে এসেছে।

$\boxed{\exists P}$ Choose $P = P_0 \cup \cdots \cup P_n$.

Then

$$\begin{aligned} & U(P, f) - L(P, f) \\ = \; & \sum_{k=0}^{n} [U(P_k, f) - L(P_k, f)] + \\ & \quad \sum_{k=1}^{n} \sup\{|f(x) - f(y)| \;:\; x, y \in J_k\} \cdot |J_k| \\ < \; & \sum_{k=0}^{n} \tfrac{\epsilon}{2(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} 2B\delta \\ = \; & (n+1) \times \tfrac{\epsilon}{2(n+1)} + n \times 2B\delta \\ \leq \; & \tfrac{\epsilon}{2} + 2nB \times \tfrac{\epsilon}{4nB} = \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

■

এই যে অংকটা করলাম সেখানে বলা ছিল যে finite-সংখ্যক discontinuity-গুলো সবই আছে (a, b)-র মধ্যে, অর্থাৎ দুই প্রান্ত a আর b-তে কোনো discontinuity নেই। যদি তা থাকত তবে কি Riemann integrable হত না? না, সেক্ষেত্রেও হত, এবং প্রমাণটাও ঠিক একইভাবে হত। খালি খাব্‌লাগুলো আরেকটু সতর্ক হয়ে মারতে হত। এখানে যেমন a_i-কে ঘিরে $\left[a_2 - \frac{\delta}{2}, a_2 + \frac{\delta}{2}\right]$ নিয়েছিলাম, এবার আর তা করা যাবে না। কারণ a_i যদি একদম প্রান্তে থাকে তবে $\delta > 0$ যতই ছোটো নিই না কেন, খাব্‌লার অর্ধেকটা $[a, b]$-র বাইরে বেরিয়ে যাবে। সুতরাং প্রান্তে কোনো discontinuity থাকলে ওদের ক্ষেত্রে খাব্‌লাগুলো একপেশে করে নিতে হবে। তাতে মূল প্রমাণ কিছুই বদলাবে না, খালি লেখাটা সামান্য জটিল হবে। জটিলতা কমাবার একটা কায়দা এইরকম। আমরা খাব্‌লা মারার সময়ে সব সময়েই a আর b-তেও দুটো খাব্‌লা মারব, ওখানে discontinuity থাক আর নাই থাক। সুতরাং আমরা এগোব এইভাবে--

Let the discontinuity points in (a, b) be

$$a_1 < \cdots < a_n.$$

η নেব আগেরই মতন। এবার যেহেতু $(n + 2)$-খানা খাব্‌লা মারব তাই rectangle-গুলোর মোট area হতে পারে সর্বাধিক $2(n + 2)B\delta$. এটাকে $\leq \frac{\epsilon}{2}$ রাখতে চাই, তাই

Let $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{4(n+2)B}, \eta\right\} > 0.$

বাকী প্রমাণ আগের মতই খালি বাড়তি খাব্‌লাদুটোর কথা যোগ করতে হবে। তাই $\ell_1, ..., \ell_n$ এবং $u_1, ..., u_n$-এর সঙ্গে সঙ্গে লাগবে--

$\ell_0 = a,\ u_0 = a + \frac{\delta}{2},\ \ell_{n+1} = b - \frac{\delta}{2},\ u_{n+1} = b.$

Example 6: Prove or disprove: A bounded real-valued function defined on the interval $[-100, 100]$, which is discontinuous only at the integral points, is Riemann integrable on the interval. [3] **(2009.1f)**

SOLUTION: Integral points মানে $-100, -99, ..., -1, 0, 1, ..., 99$ আর 100 এই point-গুলোতে function-টা discontinuous. যেহেতু মোট discontinuity-র সংখ্যা finite, তাই Riemann integrable হবে। গুছিয়ে লেখা একেবারেই সহজ। চেষ্টা করে দ্যাখো। ■

নীচের অংকটা আমরা আগেই একবার করেছি monotonicity ব্যবহার করে। এবার discontinuity ব্যবহার করে করব।

Example 7: Let

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n + 3}{x^n + 1}, \quad 0 \le x \le 2.$$

State, with reasons, whether f is Riemann-integrable on $[0, 2]$.[3] **(2003.1c)**

SOLUTION:

We know that

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{if } x = 1 \\ \infty & \text{if } x \in (1, 2] \end{cases}$$

So

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n + 3}{x^n + 1} = \begin{cases} \frac{0+3}{0+1} = 3 & \text{if } x \in [0, 1) \\ \frac{1+3}{1+1} = 2 & \text{if } x = 1 \\ 1 & \text{if } x \in (1, 2] \end{cases}$$

Since f is a bounded step function on $[0, 2]$, and has finitely many discontinuities, hence f is Riemann-integrable on $[0, 2]$.

■

যেভাবে আমরা finite-সংখ্যক discontinuity-গুলোকে খাব্‌লা মেরে ফেলে দিতে পারলাম, তাতে একটা কথা স্পষ্ট--একটা function যদি Riemann integrable হয় তবে finite-সংখ্যক জায়গায় function-টাকে যেভাবেই বদলে দাও না কেন, সেটা Riemann integrable-ই থাকবে। কারণ ওই জায়গাগুলোকে খাব্‌লা মেরে ফেলে দিলেই হবে। এইটাই হল নীচের অংকটার বক্তব্য।

Example 8: Let f be Riemann integrable on $[a, b]$. If g is a bounded function defined on $[a, b]$ such that $f = g$ except for at most a finite number of points, then g is also Riemann integrable on $[a, b]$. **(2006.1e)**

SOLUTION: এই অংকটা পুরো করে দেব না, কারণ একেবারেই finite-সংখ্যক discontinuity-র অংকটার মত। যে সব point-এ $f(x) \neq g(x)$ হবে সেগুলোকে ঘিরে খাব্‌লা বসাব। আর দুটো খাব্‌লা বসিয়ে রাখব দুই প্রান্ত a আর b-তেও। নতুন অংশটুকু এইরকম--

> Let the points in (a,b) where $f(x) \neq g(x)$ be
>
> $$a_1 < \cdots < a_n.$$

η নেব আগেরই মতন। আমরা $(n+2)$-খানা খাব্‌লা মারব তাই rectangle-গুলোর মোট area হতে পারে সর্বাধিক $2(n+2)B\delta$. এটাকে $\leq \frac{\epsilon}{2}$ রাখতে চাই, তাই

> Let $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{4(n+2)B}, \eta\right\} > 0.$

তার পরে আগেরই মত। লিখে ফেলার চেষ্টা কর। ■

এই অংকটা করার পর এটাও বুঝবে যে finite-সংখ্যক point-এ function-টাকে বদলালে তার integral বদলায় না। এইকথাটা বেশ গুরুত্বপূর্ণ, একটা theorem হিসেবে লিখে রাখি--

THEOREM
Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a Riemann integrable function. Let $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a function that differs from f at only finitely many points. Then g is also Riemann integrable on $[a,b]$ and $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

এই theorem-এরই একটা প্রয়োগ হল নীচের অংকটা।

Example 9: Let

$$f(x) = \begin{cases} a_{n+1} & \text{if } x \in [0,2014] \cap \mathbb{Z} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $\{a_n\}_n$ is a real sequence. Is f integrable on $[0,2014]$? If so, find $\int_0^{2014} f(x)dx$.[3] **(2014.1aiii)**

SOLUTION:

> Let $\phi(x) \equiv 0$ for $x \in [0,2014]$.
>
> Then ϕ is a constant function, and hence Riemann integrable on $[0,2014]$.
>
> Also f differs from ϕ only at the finitely many points $1, ..., 2014$.
>
> So, by standard result, f is also Riemann integrable on $[0,2014]$, and
>
> $$\int_0^{2014} f(x)dx = \int_0^{2014} \phi(x)dx = 0.$$

■

14.2 Infinitely many discontinuities

আমরা দেখেছি যে খালি finite-সংখ্যক discontinuity থাকলে একটা bounded function অবশ্যই Riemann integrable হবে। এটাও কিন্তু একটা sufficient condition, মোটেই necessary নয়, অর্থাৎ এমন bounded function আছে যাদের infinite-সংখ্যক discontinuity আছে কিন্তু তা সত্ত্বেও দিব্যি Riemann integrable. এমনটা হবে যদি discontinuity-গুলো খুব বেশী জায়গা জুড়ে ছড়িয়ে না থাকে। নীচের অংকে ঠিক এমন একটা শর্তই দিয়েছে--যাবতীয় discontinuity-র set-টাকে যদি D বলি, তবে D-এর যদি খালি finite-সংখ্যক limit point থাকে, তবেও একটা bounded function অবশ্যই Riemann integrable হবে। প্রমাণটা একটু পরে করব, আগে একটা উদাহরণ দেখে ব্যাপারটা কী হচ্ছে বুঝে নিই।

Example 10: Give examples of a monotonic and non-monotonic function on $[0,1]$ with infinitely many points of discontinuity such that the functions are bounded and Riemann integrable on $[0,1]$.[3] **(2009.5b)**

SOLUTION: আমরা প্রথমে একটা infinite set ভাবি যার খালি finite-সংখ্যক limit point আছে। এরকম প্রচুর set সম্ভব, একটা সহজ উদাহরণ হল $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n\in\mathbb{N}\right\}$, যার একটাই limit point, 0. আমরা এবার এমন একটা monotone function বানাব $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ যেটা ঠিক $\frac{1}{n}$-গুলোতেই discontinuous.

> Let
> $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{if } x\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}], \quad n\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$$

গ্রাফটা দেখে নাও Fig 10-এ।

> This is a step function with the set of discontinuity points being $\{\frac{1}{n} \ : \ n\geq 2\}$. Since its derived set is $\{0\}$, which is finite, so the function is Riemann integrable. Also this function is nondecreasing, and so monotonic.

এইখানে অবশ্য finite-সংখ্যক limit point থাকাটা খুব গুরুত্বপূর্ণ ছিল না, কারণ যে কোনো monotone function-ই আমরা জানি যে Riemann integrable হয়। সেই জন্যই এবার আরেকটা function বানাতে বলেছে যেটা monotone নয়। খুবই সহজ কাজ, খালি step function-এর step-গুলোকে একটু উপর-নীচ করে দিলেই হবে--

> Let
> $$g(x) = \begin{cases} (-1)^n & \text{if } x\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}], \quad n\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$$

গ্রাফটা আছে Fig 11-এ।

Fig 10

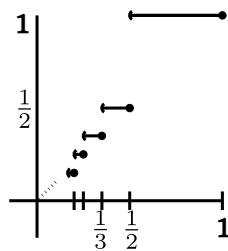
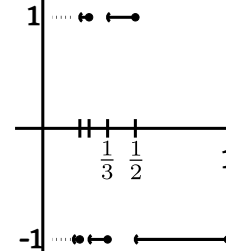



Fig 11

> This function has the same set of discontinuity points. Since the derived set of this set is finite, so $g(x)$ is Riemann integrable on $[0,1]$.

■

এবার আমরা প্রমাণ করব যে একটা bounded function $f:[a,b]\to\mathbb{R}$-এর discontinuity set-এর যদি খালি finite-সংখ্যক limit point থাকে তবে function-টা Riemann integrable হয়।

Example 11: Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be a bounded function such that the set D of points of discontinuity of f in $[a,b]$ is an infinite set. If the derived set of D is a finite subset of (a,b), prove that f is Riemann integrable over $[a,b]$.[4] **(2012.6b,2009.5a)**

SOLUTION: যথারীতি Cauchy criterion ব্যবহার করব।

> Shall show
>
> $$\forall\epsilon>0 \quad \exists P\in\mathbb{P}([a,b]) \quad U(P,f)-L(P,f)<\epsilon.$$
>
> $\forall\epsilon$ Take any $\epsilon>0$.

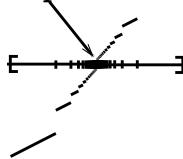
এখানেও সেই একই খাব্‌লার কায়দাই চলবে। প্রথমে limit point-গুলোর নাম দিয়ে নিই--

> Let $\{a_1,...,a_n\}\in(a,b)$ be the derived set of all discontinuities of $f(x)$ where
>
> $$a<a_1<\cdots<a_n<b.$$

Fig 12 দ্যাখো। এই উদাহরণে খালি একটাই limit point নিয়েছি। যদি সেটাকে ঘিরে যে কোনো $\left[a_1-\frac{\delta}{2},a_1+\frac{\delta}{2}\right]$ নিই, তবে ওর মধ্যেই প্রায় সবগুলো discontinuity point-ই ঢুকে যাবে, বাইরে থাকবে খালি finite-সংখ্যক discontinuity point. আমরা আগেই দেখেছি যে খালি finite-সংখ্যক discontinuity-তে Riemann integrability আটকায় না। সুতরাং প্রমাণের বাকী অংশ একেবারেই আগের মত--

> Let $B>0$ be a bound of $f(x)$ on $[a,b]$.
>
> Let
>
> $$\begin{aligned}\eta &= \min\{a_1-a,a_2-a_1,...,a_n-a_{n-1},b-a_n\},\\ \delta &= \min\left\{\frac{\epsilon}{4nB},\eta\right\}.\end{aligned}$$
>
> Define $\ell_i=a_i-\frac{\delta}{2}$ and $u_i=a_i+\frac{\delta}{2}$.

Fig 12

এই ভীড়ের কেন্দ্রটা discontinuity point-দের limit point.

Let

$$I_0 = [a, \ell_1], \quad I_1 = [u_1, \ell_2], \quad ..., \quad I_n = [u_n, b].$$

and

$$J_1 = [\ell_1, u_1], ..., J_n = [\ell_n, u_n].$$

Then f has only finitely many discontinuities (and hence is integrable) over the subintervals I_k's.
So for each $k = 0, ..., n$

$$\exists P_k \in \mathbb{P}(I_k) \quad U(P_k, f) - L(P_k, f) < \tfrac{\epsilon}{2(n+1)}.$$

$\boxed{\exists P}$ Choose $P = P_0 \cup \cdots \cup P_n$.

Then

$$\begin{aligned} & U(P,f) - L(P,f) \\ = \; & \sum_{k=0}^{n} [U(P_k, f) - L(P_k, f)] \\ & \quad + \sum_{k=1}^{n} \sup\{|f(x) - f(y)| \;\; : \;\; x, y \in J_k\} \cdot |J_k| \\ < \; & \sum_{k=0}^{n} \tfrac{\epsilon}{2(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} 2B\delta \\ = \; & (n+1) \times \tfrac{\epsilon}{2(n+1)} + n \times 2B\delta \\ \leq \; & \tfrac{\epsilon}{2} + n \times 2B \tfrac{\epsilon}{4nB} \\ = \; & \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

■

নীচেরটাও প্রায় একই অংক, খালি এবার দুই প্রান্ত a এবং b-তেও limit point থাকতে পারে। সুতরাং দুই প্রান্তেও দুটো খাব্‌লা বসাতে হবে, এই যা পার্থক্য।

Exercise 1: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a bounded function. If the set of points of discontinuity of f has a finite number of limit points in $[a, b]$ then prove that f is Riemann integrable on $[a, b]$.[4] **(2004.6a)** ■

এবার যে অংকটা দেব সেটা আগেই করেছিলাম monotonicity দিয়ে, এবার discontinuity দিয়ে করব।

Example 12: A function $f : [0, 1] \to [0, 1]$ is defined as follows:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{if } \frac{1}{2^{n+1}} < x < \frac{1}{2^n} \quad (n = 0, 1, 2, ...) \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Show that f is Riemann integrable over $[0,1]$.[3] **(2010.6c)**

SOLUTION:

> Here $f(x)$ is a step functions with only the set of discontinuities given by
> $$D = \left\{ \frac{1}{2^n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$
> Since the sequence $\frac{1}{2^n} \to 0$, hence D has only one limit point, 0.
>
> $\therefore D' = \{0\}$, which is finite.
>
> Also $f(x)$ is a bounded function on $[0,1]$.
>
> We know that a bounded function defined on a closed, bounded interval is Riemann-integrable if its set of discontinuity points has only finitely many limit points.
>
> So the given $f(x)$ is Riemann-integrable on $[0,1]$.

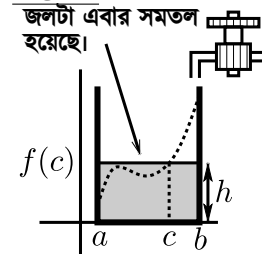
■

DAY 15
First mean value theorem (part 1)

মনে করো একটা পাত্রে হুড়মুড় করে খানিকটা জল ঢালা হয়েছে। প্রথমে জলটা পাত্রের মধ্যে ছলাৎ করে উঠবে (Fig 13)। ধরো এই অবস্থায় জলের উপরিতলটা একটা function $f(x)$-এর গ্রাফের মত হয়েছে। বলাই বাহুল্য যে $f(x)$-টা continuous হবে (জলের গায় তো আর ভাঙাচোরা থাকতে পারে না!)। তাহলে মোট জলের পরিমাণটাকে আমরা $f(x)$-এর নীচের area বলে ভাবতে পারি--

$$\int_a^b f(x)dx.$$

ক্রমশঃ জলটা স্থির হবে, তখন তার উপরিতল একদম horizontal (অনুভূমিক) থাকবে (Fig 14)। একটু আগে জলের উপরিতলে যে সব ঢেউ ইত্যাদি ছিল সেসব সমান হয়ে এখন সর্বত্র সমান উচ্চতা--যাকে বলা যায় গড় উচ্চতা। যদি এই উচ্চতাকে h বলি তবে জলের পরিমাণ হল

$$h \cdot (b-a).$$

কিন্তু জলের পরিমাণ তো আর বদলায় নি, তার মানে

$$h \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)dx,$$

বা

$$h = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

যখন জলে ঢেউ ছিল তখন $f(x)$ কোথাও ছিল h-এর উপরে, কোথাও ছিল নীচে। এদিকে $f(x)$ হল continuous, তাই intermediate value theorem বলছে যে এমন $c \in [a,b]$ আছে যাতে $f(c) = h$ হয়। সব মিলিয়ে দাঁড়ালো--

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx,$$

যেটাকে এভাবেও লেখা যায়--

$$f(c)\int_a^b dx = \int_a^b f(x)dx.$$

ঠিক যেন f-টাকে integral-টার বাইরে টেনে বার করে আনলাম। এই $f(c)$-কে বলে $[a,b]$-র উপরে $f(x)$-এর "mean value," অর্থাৎ "গড় মান" (আমাদের উদাহরণে যেটা ছিল গড় উচ্চতা)।
এই জিনিসটাকে সামান্য generalise করলেই পাওয়া যায় integral calculus-এর (first) mean value theorem, যেটা এবার আমরা শিখব।

15.1 Statement and proof

(First) MVT of integral calculus

If $f, \phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ are two functions such that

- f is continuous,
- $\phi(x) \geq 0$ and Riemann-integrable on $[a,b]$,

then there exists a point $c \in [a,b]$ such that

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = f(c)\int_a^b \phi(x)dx.$$

যদি $\phi(x) \equiv 1$ নাও, তবেই জলের উদাহরণটা ফিরে পাবে। নীচের অংকটায় এই theorem-টার প্রমাণ চেয়েছে। অবশ্য এখানে একটা বাড়তি শর্ত দিয়েছে যে ϕ হল continuous. প্রমাণটা দেখলেই বুঝবে যে ϕ খালি Riemann integrable হওয়াই যথেষ্ট।

Example 13: If f and ϕ are continuous real-valued functions on $[a,b]$ with $\phi \geq 0$ on $[a,b]$, then prove that there exists $c \in [a,b]$ such that

$$\int_a^b f\phi = f(c)\int_a^b \phi.$$

[4] **(2009.6a)**

SOLUTION: আমরা জানি continuous function-রা একটা closed, bounded set -এর উপর maximum এবং minimum value নেয়। তাই--

> $\because f$ is continuous on closed, bounded $[a, b]$,
> $\therefore \exists \alpha, \beta \in [a, b]$ such that
> $$f(\alpha) = \min\{f(x) \ : \ x \in [a, b]\} \text{ and } f(\beta) = \max\{f(x) \ : \ x \in [a, b]\}.$$
> So
> $$\forall x \in [a, b] \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

অর্থাৎ জলের উপমা দিয়ে ভাবলে--জলটা যখন প্রথম ছলাৎ করে উঠেছিল তখন জলতলের সর্বোচ্চ বিন্দুর উচ্চতা ছিল $f(\beta)$ এবং সর্বনিম্ন বিন্দুর উচ্চতা ছিল $f(\alpha)$.

> So $\because \phi(x) \geq 0$,
> $$\forall x \in [a, b] \quad f(\alpha)\phi(x) \leq f(x)\phi(x) \leq f(\beta)\phi(x).$$

এবার integrate করব। সেটা কেন করা যায় লিখে নিই--

> Now, f is continuous, and hence Riemann integrable over $[a, b]$. Also ϕ is Riemann integrable over $[a, b]$. So their product is also Riemann integrable over $[a, b]$.
> $$\therefore \int_a^b f(\alpha)\phi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\phi(x)dx \leq \int_a^b f(\beta)\phi(x)dx,$$
> or
> $$f(\alpha)\int_a^b \phi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\phi(x)dx \leq f(\beta)\int_a^b \phi(x)dx.$$

এবার দুটো কেস হতে পারে--এক, $\int_a^b \phi = 0$ হতে পারে, আর দুই, $\int_a^b \phi > 0$ হতে পারে। যদি প্রথমটা হয় তবে তো প্রমাণ এখানেই শেষ--

> <u>Case 1:</u> If $\int_a^b \phi(x)dx = 0$, then
> $$0 \leq \int_a^b f(x)\phi(x)dx \leq 0,$$
> or, taking any $c = \in [a, b]$,
> $$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = 0 = f(c)\int_a^b \phi(x)dx,$$
> as required.

যদি $\int_a^b \phi > 0$ হয়, তবে আমরা $\int_a^b \phi$ দিয়ে ভাগ করতে পারব--

Case 2: If $\int_a^b \phi(x)dx > 0$, then

$$f(\alpha) \leq \frac{\int_a^b f(x)\phi(x)dx}{\int_a^b \phi(x)dx} \leq f(\beta).$$

So by intermediate value theorem

$$\exists c \in [\alpha, \beta] \subseteq [a, b] \quad f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\phi(x)dx}{\int_a^b \phi(x)dx},$$

or

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = f(c)\int_a^b \phi(x)dx,$$

as required.

■

লক্ষ কর যে, এখানে আমরা ধরে নিয়েছি $a < b$. কিন্তু তা না হলেও চলবে। সেক্ষেত্রে খালি integral নেবার সময়ে inequality-গুলো উল্টে যাবে।
নীচের অংকটাও একই জিনিস, খালি এখানে দুটো শর্তকে শিথিল করা যায়--এক, g-র continuous হবার দরকার নেই, খালি Riemann integrable হলেই হবে। আর দুই, $g(x) > 0$ না হয়ে কেবল $g(x) \geq 0$ হলেই হবে।

Exercise 2: If f and g are continuous on $[a, b]$, $g(x) > 0$ for all $x \in [a, b]$, prove that there exists a point $c \in [a, b]$ such that

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

[3] **(2007.1f)** ■

Exercise 3: If $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is continuous, then show that

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c),$$

for some $c \in [a, b]$.[3] **(2013.5a)**
HINT:
এটা বস্তুতঃ জল ছলাৎ করার উদাহরণের অংকটাই। প্রমাণটা হবে একেবারেই Example (**??**)-এর মত। খালি ওখানকার ϕ-এর জায়গায় 1 বসবে। ফলে পুরো প্রমাণটা অনেক সংক্ষিপ্ত হয়ে যাবে (যেমন case 1-টার দরকারই হবে না)।
■

Example 14: Let $f(x) = x|x|$, $-1 \leq x \leq 1$. Find a point $c \in [-1, 1]$ such that $\int_{-1}^1 f(x)dx = 2f(c)$.[2] **(2014.5c)**
SOLUTION:

Since $f(x) = x|x|$ is an odd function and the interval $[-1, 1]$ is symmetric around 0,
So $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.
So we need $c \in [-1, 1]$ such that $2f(c) = 0$, or $f(c) = 0$.
Clearly, $c = 0$ is the only choice.

■

15.2 Applications

First MVT কোথায় কাজে লাগে? ধরো তোমাকে একটা বিচ্ছিরি দেখতে function-কে integrate করতে দিয়েছে, যেটাকে করার কোনো পথই চোখে পড়ছে না। কিন্তু হয়তো তুমি দেখতে পাচ্ছ যে function-টাকে ভেঙে $f(x)\phi(x)$ আকারে লেখা যায়, যেখানে $\phi(x)$-কে দিব্যি integrate করা যায়। সেক্ষেত্রে যদি কোনোভাবে $f(x)$-টাকে integral-এর বাইরে বার করে দেওয়া যেত, তবে সুবিধা হত। ঠিক এই কাজের জন্যই First MVT-টা তৈরী। এর জন্য খালি খেয়াল রাখতে হবে যে $f(x)$-টা যেন continuous হয় আর $\phi(x)$-এর চিহ্ন যেন না বদলায়।
নীচের অংকগুলো দেখলে ব্যাপারটা বুঝতে সুবিধা হবে।

Example 15: Prove that there exists a point ζ in $[0, 1]$ such that

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1 + x^2} dx = \frac{2}{\pi(1 + \zeta^2)}.$$

[3] **(2003.5c)**

SOLUTION: এখানে বাঁদিকের integral-টা কষে ফেলা সহজ নয়। কিন্তু ওর ভিতরে যে function-টা আছে (যাকে বলে integrand) সেটা কিন্তু দুটো বেশ সহজ function-কে গুণ করে তৈরী-- $\sin \pi x$ এবং $\frac{1}{1+x^2}$. এদের দুজনকেই আলাদা করে integrate করা সহজ। সুতরাং আমরা চেষ্টা করব এদের একজনকে বাইরে নিয়ে আসতে। ডানদিকটার দিকে তাকালেই বুঝবে যে $\frac{1}{1+x^2}$-কে বাইরে আনলে সুবিধা হবে। তাই--

Let

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}. \text{ and } \phi(x) = \sin \pi x.$$

চট্ করে দেখে নিই যে first MVT-র শর্তগুলো পালিত হচ্ছে কি না--

Then $f(x)$ is continuous, $\phi(x)$ is Riemann integrable ($\because$ continuous) on $[0, 1]$ and $\phi(x) \geq 0$.

first MVT লাগালেই হল-- ব্যস্, এবার

So by first MVT of integral calculus,

$$\int_0^1 f(x)\phi(x)dx = f(\zeta) \int_0^1 \phi(x)dx,$$

for some $\zeta \in [0, 1]$.

Now

$$\begin{aligned}\int_0^1 \phi(x)dx &= \int_0^1 \sin \pi x dx \\ &= -\tfrac{1}{\pi}\cos \pi x\Big|_0^1 \\ &= \tfrac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

So we have

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2}dx = \frac{2}{\pi(1+\zeta^2)},$$

as required.

■

Exercise 4: আমরা আগের অংকটায় যদি $\sin \pi x$-কে বাইরে আনতে চাইতাম, সেটা কি সম্ভব ছিল? সেটা করলে কী হত? ■

Example 16: Using first mean value theorem of integral calculus prove that

$$0 \le \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx \le 2.$$

[4] **(2011.6b)**

SOLUTION:

Let $f(x) = 2x$ and $\phi(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Then both $f(x)$ and $\phi(x)$ are continuous and $\phi(x) > 0$.

So by the first MVT of integral calculus,

$$\int_0^1 f(x)\phi(x)dx = f(c)\int_0^1 \phi(x)dx$$

for some $c \in [0,1]$.

Now $0 \le f(c) = 2c \le 2$.

Also $0 \le \phi(x) \le 1$ for $x \in [0,1]$. So $0 \le \int_0^1 \phi(x)dx \le 1$.

Hence

$$0 \le f(c)\int_0^1 \phi(x)dx \le 2,$$

as required.

■

Example 17: Show that

$$\frac{\pi^3}{24\sqrt{2}} < \int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{\sin x + \cos x} dx < \frac{\pi^3}{24}.$$

[3] **(2003.6c)**

SOLUTION: এই অংকটা পুরো করে দেব না। খালি এটুকু বলে দেব যে

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \times \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \tfrac{\pi}{4} \right).$$

আর মনে রেখো যে $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ হলে

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(x + \tfrac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

হয়।

■

Example 18: With proper justification show that

$$\frac{\pi^2}{9} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx \leq \frac{2\pi^2}{9}.$$

[3] **(2005.6c)**

SOLUTION:

On the interval $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ the functions

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} \text{ and } \phi(x) = x$$

are both continuous, and $\phi(x)$ preserves its (positive) sign.

So by the first MVT of integral calculus,

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x)\phi(x) dx \\
&= f(c) \int_{\pi/6}^{\pi/2} \phi(x) dx \quad [\text{ for some } c \in [a, b]] \\
&= \frac{1}{\sin c} \int_{\pi/6}^{\pi/2} x dx \\
&= \frac{1}{\sin c} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{\sin c} \frac{\pi^2}{9}.
\end{aligned}$$

Now $\because c \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$\therefore \sin c \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$
$\therefore \frac{1}{\sin c} \in [1, 2].$
So
$$\frac{1}{\sin c}\frac{\pi^2}{9} \in \left[\frac{\pi^2}{9}, \frac{2\pi^2}{9}\right].$$
Hence
$$\frac{\pi^2}{9} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx \leq \frac{2\pi^2}{9},$$
as required.

■

নীচের অংকটা একটু অন্যরকম।

Example 19: Let f, g be both continuous on $[a, b]$ and
$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$
Show that there exists $c \in [a, b]$ such that $f(c) = g(c)$.[3] **(2007.1g)**
SOLUTION: ব্যাপারটা কী হচ্ছে বুঝে নিই। বলে দিয়েছে যে $\int_a^b f = \int_a^b g$. তার মানে f-এর তলার মোট area আর g-এর তলার মোট area সমান। তাই যদি f-এর গ্রাফটা কোনো জায়গায় g-এর গ্রাফটাকে ছাপিয়ে ওঠে, তবে অন্য কোনো জায়গায় আবার f-কে g-এর নীচের নেমে আসতেই হবে, মোট area-টাকে সমান রাখতে। এদিকে বলে দিয়েছে যে f, g দুজনেই continuous. সুতরাং g-এর উপর থেকে g-এর নীচে আসার সময়ে গ্রাফদুটো কোথাও একটা পরস্পরকে ছেদ করতে বাধ্য। ঠিক সেটাই দেখাতে বলেছে অংকটায়।

Let, if possible, $\forall x \in [a, b]\ \ f(x) \neq g(x)$.
Let $h(x) = f(x) - g(x)$.
Then h is continuous, and
$\forall x \in [a, b] \quad h(x) \neq 0.$
So, due to intermediate value theorem, either
$\forall x \in [a, b] \quad h(x) > 0,$
or
$\forall x \in [a, b] \quad h(x) < 0.$

এটা কী করে হল বুঝলে তো? যদি $h(x)$ কখনো > 0 আর কখনো < 0 হত তবে মাঝখানে কোথাও তো $h(x)$-এর গ্রাফটা x-axis-কে ছেদ করতই, যেহেতু $h(x)$ একটা continuous function.

Case I: $\forall x \in [a, b] \quad h(x) > 0:$
$\because h$ is continuous on closed, bounded $[a, b]$,
$\exists \alpha \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b] \quad h(x) \geq h(\alpha) > 0.$

So

$$\int_a^b h(x)dx \geq h(\alpha)(b-a) > 0,$$

or

$$\int_a^b f > \int_a^b g (\Rightarrow\Leftarrow).$$

Case II: $\forall x \in [a,b] \quad h(x) < 0:$

Similar argument works in this case.

দুটো কেস এতই একইরকম যে দ্বিতীয়টা না লিখলেও চলে। কিন্তু ভালো করে বুঝে নিও যে দ্বিতীয় কেসটা তুমি সত্যিই একইভাবে করতে পারো। লেখা বাদ দিতে গিয়ে যেন শেখা বাদ দিও না! ■

Exercise 5: Show that for some $\xi \in [1,2]$ we have

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx = e^{\xi} \log 2.$$

■

এই সহজ অংকটাকেই খুব বিট্‌কেল রূপ দেওয়া যায় দুইদিকের log নিয়ে--
দেখাও যে

$$1 \leq \log \left[\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \right] - \log\log 2 \leq 2.$$

এর থেকে শিক্ষণীয় এই যে বিট্‌কেল দেখতে অংকরা সব সময়ে সত্যি সত্যি বিট্‌কেল হয় না!

DAY 16
First mean value theorem (part 2)

16.1 Continuity না থাকলে কী হত?

আমরা first MVT-তে যে f-টাকে integral-এর বাইরে নিয়ে আসি, সেটাকে continuous হতে হয়। নইলে কি রকম অসুবিধা হতে পারে সেইটা নিয়েই পরের অংকটা।

Example 20: If f is a continuous function on the bounded, closed interval $[a,b]$ then show that there exists a point $c \in [a,b]$ such that

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Show by an example that the condition of continuity of f cannot be dropped.[3+1] **(2003.6b)**

SOLUTION: প্রথম অংশটা তো জলের উদাহরণের অংকটাই। যদি first MVT-তে $\phi(x) \equiv 1$ নিই, তাহলেই হবে। সুতরাং প্রথম অংশের উত্তরে first MVT-র প্রমাণটাই লিখে দাও, খালি যেখানে যেখানে $\phi(x)$ আছে সে সব জায়গায় 1 বসিয়ে। এতে প্রমাণটা অনেকটাই সহজ হয়ে যাবে, যেমন প্রথম কেসটা আসবেই না।

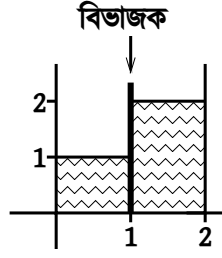



Fig 15

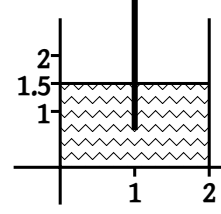



Fig 16

আমরা এবার এই অংকের পরের অংশটা করি। আমাদের এমন একটা function দেখাতে হবে যেটা continuous নয় এবং যার জন্য এমন কোনো $c \in [a,b]$ পাওয়া যায় না যাতে

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

হয়। একটা উদাহরণ এইরকম--

Second part: Let

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [0,1] \\ 2 & \text{if } x \in (1,2] \end{cases}$$

এটাকেও জলের উপমা দিয়ে ভাবতে পারো। মনে করো একটা জলের পাত্রের মধ্যে একটা বিভাজক আছে, যাতে এক দিকে জল অন্যদিকে যেতে না পারে (Fig 15)। বিভাজকের দুধারে দুরকম উচ্চতায় জল ভরা রয়েছে--এক দিকে উচ্চতা 1 আর অন্যদিকে উচ্চতা 2. এই অবস্থায় জলতলের উচ্চতাই হল $f(x)$. তাহলে মোট জলের পরিমাণ হল--

Then

$$\int_0^2 f(x)dx = 1 \times (1-0) + 2 \times (2-1) = 3.$$

এইবার যদি বিভাজকটা একটু তুলে নিই (Fig 16) অমনি দুধারের জলের উচ্চতা সমান হয়ে যাবে। তখন গড় উচ্চতা দাঁড়াবে--

So $\frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)dx = \frac{3}{2}$,

কিন্তু শুরুতে কোনো জায়গাতেই জলতল এই উচ্চতায় ছিল না।

which is not a value taken by $f(x)$ for $x \in [0,2]$.
Here $f(x)$ is not continuous (though Riemann-integrable) on $[0,2]$. So the condition of continuity cannot be dropped.

■

একইরকম আরেকটা অংক।

Example 21: Let $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ be defined as follows:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{if } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

State with reasons:

1. whether f is Riemann integrable on $[1, 3]$.
2. whether the formula
$$\int_a^b f dx = (b-a)f(\xi)$$
for some $\xi \in [a, b]$ is true for the above defined function.

[1+2] **(2008.5b(part 1))**

SOLUTION:

> First part: Since $f(x)$ is bounded and has finitely many discontinuities on $[0, 2]$, so $f(x)$ is Riemann integrable on $[0, 2]$.
>
> Second part: For $a = 1$ and $b = 3$,
> $$\int_a^b f dx = \int_1^2 dx + \int_2^3 2dx = 1 + 2 = 3.$$
> So
> $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f dx = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2},$$
> which is not a value taken by $f(x)$. So the given formula does not hold.

■

উপরের অংক কয়টা থেকে বুঝতেই পারছ যে first MVT-তে যে function-টাকে বাইরে বার করে আনা হয় সেটার continuous হওয়াটা বড়ই দরকার। তা বলে এমন নয় যে f যদি continuous না হলে কখনোই f-কে বাইরে আনা যাবে না। তখনও কোনো কোনো ক্ষেত্রে করা যাবে (যেমন নীচের অংকটায়), কিন্তু সব সময়ে জোর দিয়ে বলা যাবে না।

Example 22: Is the function $f(x) = x - [x]$ Riemann-integrable on $[0, 2]$? Is it continuous? Is it true that there exists $c \in [0, 2]$ such that

$$\int_0^2 f(x)dx = f(c)(2-0)?$$

SOLUTION:

> Since x is continuous, and $[x]$ is discontinuous only at 1 and 2, hence $f(x)$ is discontinuous only at 1 and 2.
>
> $\because f(x)$ is bounded and has only finitely many discontinuities in $[0, 2]$,
>
> $\therefore f(x)$ is Riemann integrable.

> Here
>
> $$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (x-1)dx = \cdots = 1.$$
>
> $\therefore \frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}$, which is a value in the range of f.
> In particular, if we take $c = \frac{1}{2}$, then $f(c) = \frac{1}{2}$.
> So such a c indeed exists in $[0,2]$.

■

যদি first MVT-র প্রমাণটা খুঁটিয়ে আরেকবার পড় তবে দেখবে যে সেখানে $f(x)$-এর continuity আমরা দুই জায়গায় ব্যবহার করেছিলাম--

1. $f(x)$-কে Riemann integrable দেখাতে,
2. intermediate value theorem লাগাতে।

সুতরাং যদি f-কে continuous না বলে খালি Riemann integrable বলে দিতাম তাহলেও প্রমাণের প্রায় পুরোটাই করা যেত, খালি শেষে গিয়ে intermediate value theorem-টা লাগানো যেত না। এইভাবে আমরা first MVT-র একটা generalisation পেতে পারি, যেটা এবার আলোচনা করব।

16.2 Generalisations

Example 23: If f and ϕ are bounded and integrable in $[a,b]$ and ϕ is continuous at least at

one point in $[a,b]$ and is of the same sign in it, then show that there exists a $\mu \in [m,M]$ so that

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = \mu\int_a^b \phi(x)dx,$$

where $M = lub_{x\in[a,b]}f(x),\ m = glb_{x\in[a,b]}f(x)$.[4] **(2005.6a)**

SOLUTION: প্রথমেই বলে রাখি যে এখানে "bounded and integrable" দুটো শর্তই আলাদা করে বলা বাহুল্য, কারণ integrable-এর সংজ্ঞার মধ্যেই bounded শর্তটা ধরা আছে। তাই খালি integrable বললেই চলত। আর ওই "ϕ is contiuous at least at one point" শর্তটারও আলাদা করে উল্লেখের কোনো দরকার নেই। ওটা এখানে কোনো কাজে আসবে না। চতুর্থ অধ্যায়ে আমরা জানতে পারব যে ϕ যেহেতু integrable তাই ওর পক্ষে অন্ততঃ একটা point-এ contiuous হওয়া ছাড়া এমনিতেই পথ নেই। এই ধরণের উট্‌কো শর্ত দিয়ে খামোখা একটা অংককে ভারাক্রান্ত করার হেতু আমার জানা নেই।
বলে দিয়েছে যে $\phi(x)$-এর চিহ্ন বদলায় না, তাই হয় সব সময়ে ≥ 0 বা ≤ 0 হবে। আমরা ≥ 0 ধরে অংকটা করব। ≤ 0 হলেও একইভাবে করা যেত, তাই ≥ 0 ধরে নেওয়ায় কিছু বাদ যাচ্ছে না। এই কথাটা গোড়ায় লিখে নেব--

> Wlg, $\forall x \in [a,b]\ \ \phi(x) \geq 0$.

এখানে "wlg" মানে without loss of generality, অর্থাৎ ≥ 0 ধরলাম বলে আমাদের প্রমাণটা কিছু মাত্র কম general হচ্ছে না।

We have

$$\forall x \in [a,b] \quad m \leq f(x) \leq M.$$

So, $\because \phi(x) \geq 0$,

$$\forall x \in [a,b] \quad m\phi(x) \leq f(x)\phi(x) \leq M\phi(x).$$

So

$$\int_a^b m\phi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\phi(x)dx \leq \int_a^b M\phi(x)dx,$$

or

$$m\int_a^b \phi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\phi(x)dx \leq M\int_a^b \phi(x)dx.$$

এখানে আবার first MVT-এর প্রমাণের মতই দুটো কেস আসবে--

Case 1: If $\int_a^b \phi = 0$, then taking any $\mu \in [m,M]$, we have

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = 0 = \mu\int_a^b \phi(x)dx,$$

as required.

Case 2: If $\int_a^b \phi > 0$, then

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\phi(x)dx}{\int_a^b \phi(x)dx} \leq M.$$

ঠিক এইখানেই first MVT-এর প্রমাণে আমরা intermediate value theorem লাগিয়েছিলাম। এখানে তো আর সে পথ নেই, তাই প্রমাণটা বলতে গেলে এখানেই শেষ--

Let

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\phi(x)dx}{\int_a^b \phi(x)dx} \in [m,M].$$

Then

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = \mu\int_a^b \phi(x)dx,$$

as required.

■

এবার অন্যরকম একটা generalisation দেখি। এখানে বাড়তি শর্ত দিয়েছে "onto".

Exercise 6: Let $f:[a,b]\to[p,q]$ be any onto function that is Riemann integrable on $[a,b]$. Show that there exists $c \in [a,b]$ such that

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

■

Exercise 7: Let $f : [a,b] \to [p,q]$ be any onto function that is Riemann integrable on $[a,b]$. Let $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ be any nonnegative Riemann integrable function. Is it true that there exists $c \in [a,b]$ such that

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx?$$

■

DAY 17
Indefinite integral and primitive

হায়ার সেকণ্ডারীতে যখন আমরা integration শিখি তখন দুরকমের integral-এর কথা বলা হয়--indefinite আর definite. আমরা প্রথমে indefinite integral বার করতে শিখি, যেমন

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$

যেখানে c হল একটা arbitrary constant. আর definite integral হয় এইরকম দেখতে--

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos x|_a^b = \cos b - \cos a.$$

Definite integral বার করার যে কায়দাটা আমরা হায়ার সেকণ্ডারীতে শিখি সেটা হল প্রথমে indefinite integral-টা বার করা (constant-টা বাদে), এবং definite integral-এর দুই প্রান্তের value দুটো বসিয়ে উপরেরটা থেকে নীচেরটা বিয়োগ করা।

আমরা এ বইতে যে integration করছি সেগুলো সবই definite integral. স্বভাবতঃই প্রশ্ন ওঠে যে indefinite integral-রা গেল কোথায়? এর উত্তর এইরকম--ধরো একটা $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ দিলাম যেটা Riemann integrable on $[a,b]$. যে কোনো একটা $c \in [a,b]$ নাও। তাহলে--

- যাই $x \in [c,b]$ নাও না কেন f-টা অবশ্যই $[c,x]$-এর উপরে Riemann integrable হবে।
- একইভাবে $x \in [a,c]$ নিলে f-টা $[x,c]$-এর উপরে integrable হতে বাধ্য।

সুতরাং যেকোনো $x \in [a,b]$-র জন্যই $\int_c^x f(t)dt$ অবশ্যই exist করবে। যদি x পরিবর্তিত হয় তবে এটাও পরিবর্তিত হবে, তাই এটা x-এর একটা function হবে। আমরা এই function-টার একটা নাম দেব--$F(x)$, মানে

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

এইটাকে বলব $f(x)$-এর একটা indefinite integral. "একটা" বললাম, কারণ যদি c-এর বদলে কোনো c_1 নিতাম তবে অন্য একটা indefinite integral পেতাম--

$$F_1(x) = \int_{c_1}^x f(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

লক্ষ কর যে $F(x)$ আর $F_1(x)$-এর মধ্যে পার্থক্য খালি একটা constant-এর, কারণ

$$F(x) - F_1(x) = \int_c^{c_1} f(t)dt,$$

যার মধ্যে কোনো x নেই। তাই বলতে পারি যে একটা indefinite integral জানা থাকলেই তার সঙ্গে কোনো constant যোগ করে অন্য যে কোনো indefinite integral পেতে পারি। তাই একটা যে কোনো indefinite integral নিয়ে কাজ করলেই চলে। সাধারণতঃ আমরা $c = a$ নিই, মানে এই indefinite integral-টা নিয়ে কাজ করি--

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

এই $F(x)$ function-টার বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য আলোচনা করাই এবার আমাদের উদ্দেশ্য।
আমরা দেখব যে মোটামুটিভাবে $f(x)$-এর একটা ভালো গুণ থাকলেই $F(x)$-এর তার চেয়েও ভালো একটা গুণ থাকে। যেমন $f(x)$ যদি Riemann integrable হয় তাহলেই $F(x)$ অবশ্যই continuous হবে। পরে দেখব যে $f(x)$ যদি continuous হয়, তবে $F(x)$ আরেক কাঠি উপরে উঠে differentiable হয়ে পড়ে।
প্রথমে $F(x)$-কে continuous দেখানো দিয়ে শুরু করি।

Example 24: If $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is Riemann integrable on $[a, b]$, prove that $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $a \leq x \leq b$, is continuous on $[a, b]$.[3] **(2011.1d,2008.1g)**

SOLUTION:

প্রথমে continuity-র definition-টা লিখে নিই। দেখাতে হবে যে $[a, b]$-র মধ্যে যে কোনো c-তেই $F(x)$-টা continuous হবে, অর্থাৎ--

To show

$$\forall c \in [a, b] \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(c, \delta) \cap [a, b] \quad F(x) \in N(F(c), \epsilon).$$

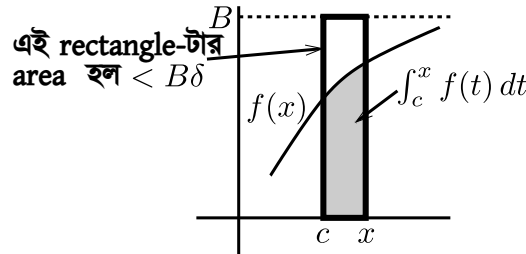
$\forall c, \epsilon$ Take any $c \in [a, b]$, and any $\epsilon > 0$.

এবার একটা যুৎসই $\delta > 0$ বার করতে হবে। আমাদের শেষ পর্যন্ত দেখাতে হবে $F(x) \in N(F(c), \epsilon)$, মানে $|F(x) - F(c)| < \epsilon$. তাই একটু বুঝে নিই $F(x) - F(c)$ জিনিসটা কি রকম। আমরা জানি

$$F(x) - F(c) = \int_c^x f(t)dt,$$

যেটা দেখিয়েছি Fig 17-এ। আমাদের দেখাতে হবে যে $|x - c|$ খুব ছোটো হলে (মানে shaded জায়গাটা খুব সরু হলে) shaded area-টাও খুব ছোটো হবে। সেটা হবেই কারণ f যেহেতু Riemann integrable তাই bounded-ও বটে। অতএব যদি f-এর একটা bound নিই B, তবে পুরো shaded area-টাই একটা B উচ্চতার rectangle-এর মধ্যে ঢুকে যাবে। যদি $|x - c| < \delta$ হয়, তবে এই rectangle-টার area হবে $< B\delta$. তাই যদি $B\delta < \epsilon$ রাখি, তবেই $|F(x) - F(c)| < \epsilon$ থাকা উচিত।

Fig 17

B
এই rectangle-টার area হল $< B\delta$
$f(x)$
$\int_c^x f(t)\,dt$
c x

$\because f$ is Riemann integrable on $[a,b]$,

$\therefore f$ is bounded there.

Let B be a bound for $f$on $[a,b]$.

$\boxed{\exists\delta}$ Choose $\delta = \frac{\epsilon}{B} > 0$.

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in [a,b]$ with $|x-c| < \delta$.

এইবার আমরা রাফটাকেই গুছিয়ে লিখে দেব। খালি চিহ্নগুলোর ব্যাপারে একটু সাবধান হতে হবে। আমরা ছবিটা এঁকেছিলাম $f(x) \geq 0$ ধরে নিয়ে। তারপর আবার ছবিতে খালি $x > c$ কেসটা দেখিয়েছি। অন্য ক্ষেত্রগুলোতেও একই যুক্তি খাটবে কিন্তু কিছু কিছু জিনিস negative হয়ে যাবে। সেগুলোকে ঠিকঠাকভাবে absolute value নিয়ে সামলাতে হবে। এই কাজে triangle inequality হল অপরিহার্য।

Then if $x > c$,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(c)| &= \left| \int_c^x f(t)dt \right| \\ &\leq \int_c^x |f(t)|dt \quad \left[\text{by triangle inequality } \because x > c\right] \\ &\leq B \int_c^x dt \\ &= B \cdot (x-c). \end{aligned}$$

লক্ষ করলে triangle inequality লাগাতে কিভাবে $x > c$ প্রয়োজন হল?

Similarly, if $x < c$,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(c)| &= \left| \int_c^x f(t)dt \right| \\ &\leq \int_x^c |f(t)|dt \quad \left[\text{by triangle inequality } \because x < c\right] \\ &\leq B \int_x^c dt \\ &= B \cdot (c-x). \end{aligned}$$

এখানে কি রকম triangle inequality লাগানোর সময়ে x এবং c স্থানবিনিময় করল লক্ষ কর।

So in general

$$|F(x) - F(c)| < B \cdot |x-c| < B\delta = B \times \tfrac{\epsilon}{B} = \epsilon,$$

as required.

■

Example 25: If f is Riemann integrable on $[a, b]$ prove that the set

$$S = \left\{ x \in [a, b] \ : \ \int_a^x f(t)dt \text{ is continuous} \right\}$$

is compact.[2] **(2013.2b)**

SOLUTION: অংকটা যেভাবে দেওয়া হয়েছে তার মানে হয় না। বলেছে যে S হল সেই সব $x \in [a, b]$ দিয়ে তৈরী যাতে $\int_a^x f(t)dt$ হয় continuous. কিন্তু যেই তুমি একটা কোনো $x \in [a, b]$ নেবে অমনি $\int_a^x f(t)dt$ হবে একটা সংখ্যা, function নয়। সুতরাং তার continuous হওয়া বা না হওয়ার কোনো প্রশ্নই ওঠে না। আসলে যেটা বলতে চেয়েছিল সেটা হল

$$S = \left\{ x \in [a, b] \ : \ \int_a^u f(t)dt \text{ is continuous at } u = x \right\}.$$

কিন্তু আগের অংক থেকেই জানি যে, $F(u) = \int_a^u f(t)dt$ হল $[a, b]$-র উপর continuous, তাই S আসলে $[a, b]$ পুরোটাই, সুতরাং compact.

> Let $F(u) = \int_a^u f(t)dt$. Then
>
> $$S = \{x \in [a, b] \ : \ F(u) \text{ is continuous at } u = x\}.$$
>
> But, by standard result, $F(u)$ is continuous at every $u \in [a, b]$.
>
> So $S = [a, b]$, which is a closed and bounded set, and hence compact, as required.

■

হায়ার সেকণ্ডারীতে আমরা সাধারণতঃ differentiation আর integration-কে পরস্পরের বিপরীত কাজ বলে শিখি। যেমন $\sin x$-কে differentiate করলে $\cos x$ হয়, আবার $\cos x$-কে integrate করলে $\sin x$-কে ফিরে পাওয়া যায়। যদিও এই ব্যাপারটাকে আমরা বেশ সহজ ভাবেই মেনে নিই, কিন্তু দেখতে গেলে ব্যাপারটা কিন্তু বেশ অদ্ভুত--differentiation হল tangent-এর slope বার করার কায়দা, আর integration হল area বার করার কায়দা। এরা দুজন কেন খামোখা পরস্পরের বিপরীত হতে যাবে? সত্যিই কিন্তু integration আর differentiation পরস্পরের একেবারে বিপরীত নয়, একটু ব্যতিক্রম আছে--

- ধরো $f(x)$ একটা function, সেটাকে integrate করে পেয়েছি একটা indefinite integral $F(x)$. তুমি নিশ্চয়ই ভাবছ যে $F(x)$-কে differentiate করলেই $f(x)$ ফিরে পাবে? উঁহু! সবসময়ে নয়।

- এবার উল্টো দিক দিয়ে দেখি। ধরো $G(x)$ এমন একটা function যাকে differentiate করলে $f(x)$ হয়। এ থেকে কি মনে করছ $f(x)$-এর একটা indefinite integral হবে $G(x)$? উঁহু, এটাও সব সময়ে নয়!

এই দুটো জিনিস যে আসলে আলাদা সেটা মনে রাখার জন্য দুটো আলাদা term ব্যবহার করা হয়--একটা term হল (indefinite) integral, যেটা আমরা জানিই। অন্য term-টা হল primitive.

Example 26: What is meant by primitive of a function?[1] **(2014.5b (part 1))**

SOLUTION:

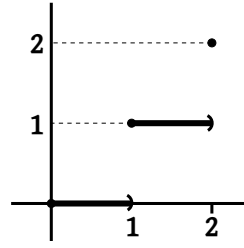



Fig 18

DEFINITION: **Primitive**

A function $G(x)$ is called a **primitive** of a function $f(x)$ if $G'(x) = f(x)$.

■

এবার শিখব এদের মধ্যে পার্থক্য কী।

17.1 Integral আছে, primitive নেই

এমনটা হতেই পারে যে একটা function-এর integral আছে, কিন্তু কোনো primitive নেই। এরকম একটা counterexample দেখাতে বলেছে নীচের অংকটায়।

Example 27: Give example with justification of a Riemann integrable function which has no primitive.[3] **(2011.1e,2006.4aii)**

SOLUTION:

The function $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ defined as $f(x) = [x]$ is bounded and has discontinuities only at $x = 1$ and $x = 2$.

ছবিটা রয়েছে Fig 18-এ।

Since it has only finitely many discontinuities, so it is Riemann integrable on $[0, 2]$.

Also, f takes the values 0 and 1 ($\because f(0) = 0$ and $f(1) = 1$). But it never takes the value $\frac{1}{2} \in [0, 1]$ for any $x \in [0, 1]$.

$\therefore$ By Darboux's theorem for derivative, $f(x)$ cannot be the derivative any function.

Hence it has no primitive on $[0, 2]$.

এখানে যে Darboux's theorem ব্যবহার করলাম সেটা আমরা এই বইয়ের দ্বিতীয় খণ্ডে শিখেছিলাম--যদি $F(x)$ কোনো differentiable function হয় তবে $F'(x)$-এর সব সময়ে intermediate value property থাকে। ■

নীচের অংকটায় আবার একই জিনিস চেয়েছে। খালি ভাষাটা একটু অন্য।

Exercise 8: Correct or justify: If f is Riemann integrable over $[a,b]$, then f has a primitive in $[a,b]$.[3] **(2013.1aii)** ■

17.2 Primitive আছে, integral নেই

এবার একটা উল্টো counterexample দেখব--primitive আছে কিন্তু তাও function-টা integrable নয়!

Example 28: Show that the function defined on $[-1,1]$ by $f(x) = x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ and $f(0) = 0$ posseses a primitive but f is not integrable on $[-1,1]$.[1+1] **(2005.5cp2)**

SOLUTION:

Let

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\sin\frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Shall show that $\forall x \in [-1,1]$ $F'(x) = f(x)$.

If $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= x\sin\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\sin\frac{1}{x^2}\right) \quad [\text{by product rule}] \\ &= x\sin\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{2}\cos\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad [\text{by chain rule}] \\ &= x\sin\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{2}\cos\frac{1}{x^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right) \\ &= x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

If $x = 0$,

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(0+h)-F(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{1}{h^2}}{2}. \end{aligned}$$

Now,

$$\left|h\sin\frac{1}{h^2}\right| \leq |h| \to 0$$

as $h \to 0$. So, by sandwich law,

$$F'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{1}{h^2}}{2} = 0 = f(0),$$

as required.

But $f(x)$ is not Riemann integrable on $[-1,1]$, because it is unbounded there.

⟦ Because:

Let $x_n = -\frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \in [-1,1]$.
Then

$$\begin{aligned} f(x_n) &= x_n \sin\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_n}\cos\frac{1}{x_n^2} \\ &= x_n \sin\frac{1}{x_n^2} + \sqrt{2n\pi}. \end{aligned}$$

$\because x_n \to 0,\ \therefore x_n \sin\frac{1}{x_n^2} \to 0.$
$\therefore f(x_n) \to \infty.$

⟧

■

এবার আশা করি নীচের অংকটার উত্তর লিখতে তোমার অসুবিধা হবে না!

Exercise 9: Distinguish between an integral and a primitive of a function. [1] **(2005.5cp1)**
■

17.3 Primitive, integral দুজনেই থাকলে?

হায়ার সেকণ্ডারীর সময়ে আমাদের মনে যে ধারণাটা থাকে সেটা হল Fig 19-এর মত--$f(x)$-কে integrate করে যদি $F(x)$ পাই তবে $F(x)$-কে differentiate করলেই বুঝি $f(x)$-এ ফিরে আসা যাবে। বা উল্টোদিক দিয়ে ভাবলে--$F(x)$-কে differentiate করে যদি $f(x)$ পাই তবে $f(x)$-এর একটা integral বুঝি $F(x)$ হবেই। এক্ষুণি দেখলাম যে এই ধারণাটা সব সময়ে ঠিক নয়। যেমন $[0,2]$-এর উপরে $f(x)=[x]$ নিলে (Fig 20) তার একটা integral হবে

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{if } x \in (1,2] \end{cases}$$

এটাকে differentiate করে $f(x)$ ফিরে পেতে চাও? অসম্ভব, Fig 21 দেখলেই বুঝবে যে $F(x)$-টা সর্বত্র differentiable-ই নয়!

Fig 19

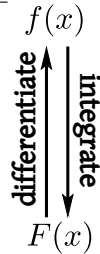



Fig 20

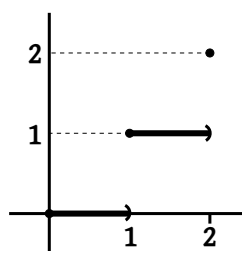
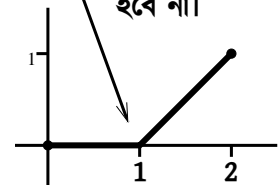



Fig 21

উল্টোদিকেও একইরকম ঝামেলা, সেটা একটু আগেই দেখেছি--যখন

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\sin\frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

নিয়েছিলাম, তখন তার derivative হয়েছিল

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}.$$

কিন্তু এটাকে যে integrate করে আবার $F(x)$ ফিরে পাব, তার জো নেই, কারণ $f(x)$-টা integrable-ই নয়!
সুতরাং Fig 19-এর বিরুদ্ধে যে দুটো উদাহরণ দেখালাম তাদের বেলায় দুটো তীরচিহ্ন আঁকাই যায় না--differentiate করা যায় তো derivative-টাকে integrate করা যায় না, আর integrate করা যায় তো integral-টাকে differentiate করা যায় না। কিন্তু যদি তোমাকে এমন একটা function দিই যার বেলায় এই সমস্যাটা নেই তবে? মানে এমন একটা $f(x)$ দিই যেটা integrate করে $F(x)$ পাওয়া যায়, এবং $F(x)$-টাকে differentiate-ও করা যায়, তবে কি অন্ততঃ জোর দিয়ে বলতে পারি যে $F'(x) = f(x)$ হবেই? নীচের অংকটায় উত্তরটা দেওয়া আছে। সেটা দেখার আগে একটু নিজে ভেবে বার করার চেষ্টা কর। মোটেই খুব কঠিন কিছু নয়!

Exercise 10: ধরো

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [0,1) \cup (1,2] \\ 2 & \text{if } x = 1 \end{cases}.$$

তবে $f(x)$-টা $[0,2]$-এর উপরে অবশ্যই Riemann integrable কারণ খালি একটা জায়গাতেই discontinuous. একে integrateকরে

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

বার কর। $F(x)$ কি differentiable? যদি হয় তবে $F'(x)$ কত? এখানে কি $\forall x \in [0,2] \quad F'(x) = f(x)$ হচ্ছে? ■

এবার উল্টো দিকটা দেখি। যদি তোমাকে এমন $F(x)$ দিই যার derivative আছে $F'(x) = f(x)$, এবং derivative-টাও ভদ্রলোকের মত Riemann integrable, তবে কি $F(x)$ সব সময়েই $f(x)$-এর একটা integral হতে বাধ্য? এইবার উত্তর হল--হ্যাঁ। এটা একটা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ theorem, যার নাম fundamental theorem of calculus, যেটা আমরা এরপর শিখব।

DAY 18
Fundamental theorem of calculus

18.1 Derivative of integral

ধর $f(x)$ হল $[a,b]$-র উপরে Riemann integrable. আমরা গতকালই বলেছি যে $f(x)$-কে integrate করে যদি

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b],$$

বানাও তবে $F(x)$-টা differentiable নাও হতে পারে। শুধু তাই নয়, $F(x)$ যদি differentiable হয়ও, তাও $F'(x)$-টা $f(x)$-এর সমান নাও হতে পারে।
কিন্তু এই দুটো সমস্যাই একঢিলে সমাধান হয়ে যায়--যদি $f(x)$-টা continuous হয়। সেক্ষেত্রে $F(x)$-টা differentiable-ও হবে এবং $F'(x) = f(x)$-ও হবে। এবার আমরা এটাই দেখাব।

Example 29: If f is continuous on an interval $[a,b]$ and $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$, then show that $F'(x) = f(x)$ for all $x \in [a,b]$.[3] **(2007.6a,2005.5bi)**
SOLUTION:

For $x, x+h \in [a,b]$ we have

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi) \int_x^{x+h} dt = f(\xi)h$$

for some $\xi \equiv \xi(h)$ between x and $x+h$.

$$\therefore \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi).$$

Now as $h \to 0$, we have $\xi(h) \to x$. So $f(\xi) \to f(x)$, as f is continuous.
Thus

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \text{ exists, and } = f(x).$$

So $F'(x) = f(x)$, as required.

■

নীচের অংকটা একই জিনিস, $F(x)$-যে differentiable হয় খালি সেটুকু দেখাতে বলেছে।

Exercise 11: Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Show that the function $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ defined by

$$F(x) = \int_a^x f \forall x \in [a,b]$$

is differentiable in its domain.[4] **(2007.6a,2009.5c)** ■

আচ্ছা, এর উল্টো দিকটা কি ঠিক? এটাই হল নীচের অংকটার জিজ্ঞাস্য। যদি $f(x)$-টা continuous হয়, তবে না হয় $F(x)$-টা differentiable হল। কিন্তু যদি $F(x)$-কে differentiable বলে দিই, তবে কি জোর দিয়ে বলতে পারো যে $f(x)$-টা continuous হবেই? সাবধানে চিন্তা কর। এর উত্তর কিন্তু আমাদের অজানা নয়।

Exercise 12: Let $f(x)$ be Riemann integrable on $[a,b]$. If

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b],$$

is a differentiable function on $[a,b]$, then is it true that $f(x)$ must be continuous on $[a,b]$? ■

এবার একটা অন্যরকম অংক।

Example 30: Let f be real-valued and continuous for all $x \geq 0$ and $f(x) \neq 0$ for all $x \geq 0$. If

$$\{f(x)\}^2 = 2 \int_0^x f(t)dt,$$

prove that $f(x) = x$ for all $x \geq 0$.[3] **(2010.5c)**
SOLUTION:

$\because f$ is continuous,
$\therefore g(x) = \int_0^x f(t)dt$ is differentiable.

এটাই আমরা এক্ষুণি প্রমাণ করলাম। এটা একটা standard factবলে গণ্য হয়, তাই নিশ্চিন্তে ব্যবহার করতে পারো।

$$\therefore \{f(x)\}^2 = 2\int_0^x f(t)dt \qquad (*)$$

is differentiable.

এবার আমাদের পরিকল্পনা হল (*)-এর দুপাশকে differentiate করা। ডানদিকটাকে differentiate করা নিয়ে সমস্যা নেই। বাঁদিকটাকে differentiate করে $2f(x)f'(x)$ লিখতে খুব ইচ্ছে করছে, কিন্তু সমস্যা একটাই--$f(x)$-টা differentiable কিনা জানিনা। মনে রেখো যে $(f(x))^2$ যদি differentiable হয় তাও $f(x)$ কিন্তু differentiable নাই হতে পারে। যেমন $|x|^2 = x^2$ দিব্যি একটা differentiable function, অথচ $|x|$ মোটেই differentiable নয়!
কিন্তু আমাদের অংকে $f(x)$-টাকে differentiable দেখানো যাবে--

Now $f(x)$ is differentiable.

[[Because:

Either $\forall x \geq 0 \quad f(x) > 0$ or $\forall x \geq 0 \quad f(x) < 0$, otherwise by intermediate value theorem $f(x) = 0$ for some $x \geq 0$.
So either $f(x) = \sqrt{g(x)}$ or $f(x) = -\sqrt{g(x)}$.
Since $\sqrt{x}$ is a differentiable function,
hence $f(x)$ is also differentiable.

]]

এইবার কাজ সহজ--

Differentiating (*),

$$2f(x)f'(x) = 2f(x),$$

or, since $f(x) \neq 0$, we have $f'(x) = 1$.

So $f(x) = x + c$ for some c.

Now, putting $x = 0$ in (*), $f(0) = 0$.

So $c = 0$. Hence $f(x) = x$, as required.

■

এইবার একটা অংক দিই যেটা আসলে খুবই সহজ কিন্তু দেখতে বেশ বিচ্ছিরি মতন।

Example 31: The function $p(x)$ is continuous in $[a, b]$ and the function $t(x)$ is positive-valued, bounded and integrable in $[a, b]$. Let

$$A(x) = \int_a^x t(y)dy, \quad B(x) = \int_a^x p(y)t(y)dy \text{ and } A'(x) = t(x)$$

in $[a, b]$. Using the first mean value theorem of integral calculus, show that $B'(x) = p(x)t(x)$ in $[a, b]$.[3] **(2004.6b)**

SOLUTION: ভালো করে অংকটা পড়ে দ্যাখো। জানি এরকম অংক পড়ে দেখতেও ইচ্ছে করে না, কিন্তু খুঁটিয়ে পড়লে কয়েকটা অদ্ভুত জিনিস দেখতে পাবে--

- এখানে $p(x), t(x), A(x)$ আর $B(x)$--এই চারটে function-এর কথা বলা আছে। কিন্তু শেষ পর্যন্ত যা দেখাতে বলেছে তার মধ্যে $A(x)$ কোথাও লাগে নি, সেটা খালি $B(x), p(x)$ আর $t(x)$ দিয়েই লেখা। $B(x)$-এর সংজ্ঞাতেও কোথাও $A(x)$-এর প্রয়োজন হয় নি। তবে $A(x)$-টা খালি খালি দিল কেন?

- $A(x)$-কে নিয়ে যে দুটো শর্ত দিয়েছে তার মধ্যে প্রথমটা থেকেই দ্বিতীয়টা আসে না? $A(x) = \int_a^x t(y)dy$ হলে সেটাকে differentiate করলেই তো $A'(x) = t(x)$ পাওয়া যায় বলে মনে হচ্ছে! তবে আলাদা করে $A'(x) = t(x)$ বলে দিল কেন?

- বলেই তো দিয়েছে যে
$$B(x) = \int_a^x p(y)t(y)dy. \quad (*)$$
সেটাকে ধরে differentiate করে দিলেই তো $B'(x) = p(x)t(x)$ হয়ে যায় মনে হচ্ছে! তবে আবার first mean value theorem-টিওরেমের কথা কি সব লিখেছে?

এই তিনটে প্রশ্নের উত্তরের মধ্যেই এই অংকটার মূল রহস্য লুকিয়ে আছে। যদিও (*)-টা বলে দিয়েছে, কিন্তু তুমি ওমনি দুইপাশকে differentiate করতে পারো না। যদি $p(y)t(y)$ একটা continuous function হত তবে পারতে। কিন্তু খালি $p(y)$-কে continuous বলা আছে। সুতরাং $t(y)$-এর উপরেও কিছু শর্ত দরকার। ঠিক সেই কারণেই $A(x)$-এর প্রয়োজন হয়েছে। বলেছে যে, $t(y)$-টা continuous হোক বা নাই হোক, আমাদের যেটুকু দরকার সেটুকু গুণ ওর আছে--ওর integral-কে (মানে $A(x)$-কে) differentiate করলে আবার $t(y)$-কে ফেরত পাওয়া যায়।
এই ব্যাপারটা মাথায় রেখে নীচের সমাধানটা পড়।

To show

$\forall x \in [a, b] \quad \lim_{h\to 0} \frac{B(x+h)-B(x)}{h}$ exists, and $= p(x)t(x)$.

$\forall x$ Take any $x \in [a, b]$.

Then

$$\begin{aligned}\frac{B(x+h)-B(x)}{h} &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} p(y)t(y)dy \\ &= \frac{p(\xi_h)}{h}\int_x^{x+h} t(y)dy \quad [\text{by 1st MVT}] \\ &= p(\xi_h) \times \frac{A(x+h)-A(x)}{h}.\end{aligned}$$

Now as $h \to 0$ we have $\xi_h \to x$, and since p is continuous, $p(\xi_h) \to p(x)$.
Also
$$\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = A'(x) = t(x),$$
by given condition.
So we conclude that $B'(x)$ exists and equals $p(x)t(x)$, as required.

■

18.2 Integral of derivative

ধর $F(x)$ একটা function যাকে differentiate করা যায়, এবং differentiate করলে $F'(x) = f(x)$ হয়। প্রশ্ন হল $F(x)$-টা $f(x)$-এর একটা (indefinite) integral হবে কিনা। আগেই বলেছিলাম যে উত্তর হল--হ্যাঁ। এবার প্রমাণ করব।

Example 32: Let f be bounded and integrable on $[a,b]$ and there exist a function F such that $F'(x) = f(x)$ for all $x \in [a,b]$. Prove that

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

[3] **(2010.6a,2006.4aiip1)**

SOLUTION:

Let P be any partition of $[a,b]$:

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

Then

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

where ξ_i is some number between x_{i-1} and x_i. So

$$L(P,f) \le F(b) - F(a) \le U(P,f).$$

Taking sup and inf over all partitions P of $[a,b]$ we see

$$\underline{\int_a^b} f \le F(b) - F(a) \le \overline{\int_a^b} f.$$

Since f is integrable on $[a,b]$,

So

$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

as required.

■

একই অংক সামান্য অন্য ভাষায়--

Exercise 13: If ϕ is a primitive of an integrable function f over $[a,b]$, show that

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a).$$

[3] **(2014.5b (part 2))** ■

Example 33: State and prove fundamental theorem of integral calculus.[1+3] **(2012.5b)**

SOLUTION:

> **Fundamental theorem of integral calculus**
>
> Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be Riemann integrable on $[a,b]$ and let f possess a primitive F on $[a,b]$. Then
>
> $$\int_a^b f dx = F(b) - F(a).$$

প্রমাণ তো আগেই করেছি। কোনো কোনো বইতে অবশ্য fundamental theorem-টার মধ্যে দুটো দিকই ধরে, মানে derivative of integral এবং integral of derivative দুটোই। ■

18.2.1 Applications

Example 34: Let $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ be defined as follows:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{if } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

State with reasons: whether the fundamental theorem of integral calculus is applicable to f in $[1,3]$.[2] **(2008.5b(part 2))**

SOLUTION: গ্রাফটা আছে Fig 22-এ।

> Since f has a jump discontinuity, so it cannot be the derivative of any function. Hence it does not have a primitive. So the fundamental theorem of integral calculus is not applicable to it.

■

Example 35: $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ is defined by

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{if } 1 < x \le 2 \\ x-1 & \text{if } 2 < x \le 3 \end{cases}$$

and let $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $0 \le x \le 3$. Correct the statement or justify it if it is correct: F is derivable on $[0,3]$.[3] **(2004.1e)**

SOLUTION: Fig 23-এ $f(x)$-এর ছবি দেখানো হয়েছে।

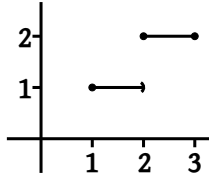



Fig 22

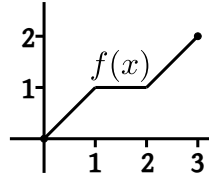



Fig 23

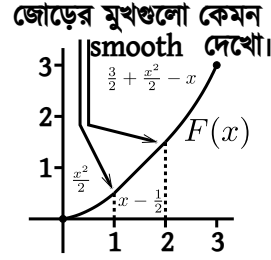



Fig 24

The function $f(x)$ is continuous on $[0,3]$. So by the fundamental theorem of calculus, the function $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ is differentiable everywhere on $[0,3]$.

Also, by direct integration,

$$F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{if } x\in[0,1] \\ x-\frac{1}{2} & \text{if } x\in(1,2] \\ \frac{3}{2}+\frac{x^2}{2}-x & \text{if } x\in(2,3] \end{cases}$$

Fig 24-এ দেখে নাও, $F(x)$ দেখতে কেমন। ■

এর পরের দুটো অংকও খুব কঠিন কিছু নয়।

Example 36: Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be continuous on the closed and bounded interval $[a,b]$. Let $v:[c,d]\to\mathbb{R}$ be differentiable on the closed and bounded interval $[c,d]$ and $v([c,d])\subseteq[a,b]$. Prove that if $G:[c,d]\to\mathbb{R}$ is defined by

$$G(x)=\int_a^{v(x)} f,\quad x\in[c,d],$$

then $G'(x)$ exists and $G'(x)=(f\circ v)(x)v'(x)$ for all $x\in[c,d]$. $[(f\circ v)(x)=f(v(x)).]$[4] **(2003.6aii)**

SOLUTION:

Let $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ be defined as

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

Then for $x\in[c,d]$,

$$G(x)=\int_a^{v(x)} f=F(v(x)),$$

which is well-defined since $v([c,d])\subseteq[a,b]$.

Since f is continuous, hence by the fundamental theorem of calculus, F is differentiable. Also, since v is given to be differentiable, their

composition $G = F \circ v$ is also differentiable.
By the chain rule
$$G'(x) = F'(v(x))v'(x).$$
Now by the fundamental theorem of calculus, $F'(x) = f(x)$.
So $G'(x)$ exists, and
$$G'(x) = f(v(x))v'(x),$$
as required.

■

Example 37: Prove that

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{\sqrt{1+t}}}{x^2} = e.$$

[3] **(2011.6c)**
SOLUTION:

Let $y = x^2$. As $x \to 0$ we have $y \to 0+$.
So the given limit is the same as

$$\lim_{y\to 0+} \frac{\int_0^{y} e^{\sqrt{1+t}}}{y}.$$

Let
$$F(y) = \int_0^y e^{\sqrt{1+t}} dt.$$
Since $f(t) = e^{\sqrt{1+t}}$ is continuous at $t = 0$, so by the fundamental theorem of calculus, $F(y)$ is differentiable at $y = 0$, and $F'(0) = f(0) = e$.
So
$$\lim_{y\to 0+} \frac{F(y) - F(0)}{y} = e,$$
or
$$\lim_{y\to 0+} \frac{F(y)}{y} = e,$$
since $F(0) = 0$. This completes the proof.

■

DAY 19
Standard rules

Fundamental theorem থেকে আমরা দেখেছি যে integration আর differentiation মোটামুটিভাবে পরস্পরের বিপরীত। সুতরাং differentiation-এর বিভিন্ন সূত্রকে উল্টে আমরা integration-এর বিভিন্ন সূত্র পাওয়ার চেষ্টা করতে পারি। কিন্তু ওই যে লিখেছি "মোটামুটিভাবে" বিপরীত, তাই এই ওল্টানোর কাজটা একটু সাবধানে করতে হবে। আজকের আলোচনা সেই নিয়েই।

19.1 Substitution

প্রথমে differentiation-এর যে সূত্রটাকে ওল্টানোর চেষ্টা করব, সেটা হল chain rule. আশা করি ভুলে যাও নি সেটা কী জিনিস। একটা অংক কষে মনে করে নিই। যদি তোমাকে $\sin(x^2)$-কে differentiate করতে বলি, তবে তুমি লক্ষ করবে যে এখানে একটা function-কে আরেকটার পেটে ঢোকানো আছে। বাইরেরটা হল sin আর ভিতরেরটা হল x^2. তুমি প্রথমে বাইরেরটাকে differentiate করবে, ভিতরেরটাকে কিছু না করে-- $\cos(x^2)$, তারপর সেটাকে গুণ করবে ভিতরেরটার derivative দিয়ে-- $\cos(x^2)\times 2x$. এইবার ধরো তোমাকে এই integration-টা করতে দিলাম--

$$\int_1^2 2x\cos(x^2)dx.$$

যেহেতু তুমি এক্ষুণি দেখেছ যে $2x\cos x^2$ হল $\sin x^2$-এর derivative, সুতরাং তুমি হয়তো ধাঁ করে fundamental theorem লাগিয়ে বলে দেবে যে integral-টা হবে

$$\sin 2^2 - \sin 1^2 = \sin 4 - \sin 1.$$

ঠিক উত্তর, কিন্তু তুমি তাড়াহুড়োতে একটা জিনিস ভুলে গেছ--integration আর differentiation পরস্পরের পুরো বিপরীত নয়, খালি "মোটামুটি" বিপরীত। তাই fundamental theorem লাগানোর আগে তোমার দেখে নেওয়া উচিত ছিল যে $2x\cos x^2$-টা সত্যিই $[1,2]$-এর উপরে integrable. তা না হলে fundamental theorem কিন্তু লাগানো যায় না। এই অংকটায় অবশ্য integrability নিয়ে কোনো সমস্যা নেই, কারণ $2x\cos x^2$ হল একটা continuous function.
যাই হোক, integral-টা আমরা সাধারণতঃ ধাঁ করে করি না। আমরা করি substitution করে--

> Let $u = x^2$. Then $du = 2xdx$.
> $x = 1 \implies u = 1^2 = 1$
> $x = 2 \implies u = 2^2 = 4.$
> So
> $$\int_1^2 2x\cos x^2 dx = \int_1^4 \cos u du = \sin u\Big|_1^4 = \sin 4 - \sin 1.$$

অবশ্যই এই কাজটা আমরা যন্ত্রের মত করতে শিখেছি। আন্দাজ করতে পারছি যে এটা আসলে কোনোভাবে chain rule-এর উল্টো সংস্করণ, কিন্তু সত্যিই কিভাবে, সেটা স্পষ্ট হচ্ছে না। তাছাড়া এই যন্ত্রের মত প্রক্রিয়াটা সব সময়ে কাজ করে, নাকি আরও কিছু শর্ত লাগে সেটাও বোঝা যাচ্ছে না। এবার আমরা এগুলোই বোঝার চেষ্টা করব।
একটু চিন্তা করলেই দেখবে যে যন্ত্রের মত প্রক্রিয়াটার ফল দাঁড়ায় এইটা--

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du.$$

আমাদের উদাহরণে $\phi(x) = x^2$ ছিল আর f ছিল $\cos$. প্রশ্ন হল-- f আর ϕ-এর উপর কী কী শর্ত চাপালে এই প্রক্রিয়াটা সব সময়েই ঠিক উত্তর দেবে? এই প্রশ্নের বিভিন্ন উত্তর বিভিন্ন লোকে বার করেছে। কোনো শর্ত বেশী খটমট, কোনোটা বা কম। আমরা প্রথমে একটা খুব সহজ শর্ত দিই--

Integration by substitution (version 1)

Let $\phi : [a, b] \to I$ be a differentiable function, where $I \subseteq \mathbb{R}$ is some interval. Let ϕ' be Riemann integrable on $[a, b]$. Let $f : I \to \mathbb{R}$ be some continuous function. Then the function $f(\phi(t))\phi'(t)$ is Riemann integrable on $[a, b]$, and

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

Proof:

$\because f$ is continuous,

$\therefore f$ has a primitive F on I.

Let $G(t) = F(\phi(t))$.

Being the composition of two differentiable functions, G is differentiable and, by the chain rule,

$$G'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t),$$

which is Riemann integrable on $[a, b]$.

⟦ Because:

$\because \phi$ is differentiable, $\therefore \phi$ is continuous.
Also f is continuous.
So $f(\phi(t))$ is continuous, and hence Riemann integrable on $[a, b]$.
Also ϕ' is Riemann integrable on $[a, b]$.
So their product $f(\phi(t))\phi'(t)$ is Riemann integrable on $[a, b]$.

⟧

So by the fundamental theorem of calculus, we have

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = G(b) - G(a). \quad (\mathbf{1})$$

Again, since f is continuous, and hence Riemann integrable, hence, by the fundamental theorem of calculus, we have

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = G(b) - G(a). \quad (\mathbf{2})$$

From (1) and (2) we get

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx,$$

as required.

[Q.E.D]

প্রমাণটা ভালো করে খুঁটিয়ে পড়। লক্ষ করবে যে f-এর continuity-টা ঠিক তিন জায়গায় কাজে লাগছে--

1. f-এর একটা primitive আছে দেখাতে,
2. f-কে Riemann integrable দেখাতে,
3. $f(\phi(t))\phi'(t)$-কে Riemann integrable দেখাতে।

যদি f-কে continuous না ধরে, এই তিনটে শর্ত আলাদা করে দিয়ে দিই, তবেও কাজ চলবে। সেক্ষেত্রে ϕ'-কেও আলাদা করে Riemann integrable ধরার দরকার হবে না। এভাবে পাব নীচের সংস্করণটা--

Integration by substitution (version 2)

Let $\phi : [a, b] \to I$ be a differentiable function, where $I \subseteq \mathbb{R}$ is some interval. Let $f : I \to \mathbb{R}$ be some Riemann integrable function with a primitive. If the function $f(\phi(t))\phi'(t)$ is Riemann integrable on $[a, b]$, then

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

কিন্তু খামোখা এই সংস্করণটা বানিয়ে লাভ কী হল? দিব্যি f-কে continuous ধরে নিলেই চলছিল, তা না করে আমরা তিনটে বিচ্ছিরি শর্ত কেন আমদানী করব? এর একটাই কারণ হল এমন f সম্ভব যেটা continuous নয়, কিন্তু তাও এই তিনটে বিচ্ছিরি শর্ত পালন করে। প্রথম সংস্করণটা এই সব f-এর ক্ষেত্রে খাটত না, দ্বিতীয় সংস্করণটা এদের বেলাতেও খাটে। অর্থাৎ দ্বিতীয় সংস্করণটা একটু বেশী general.
নীচে আরো একটা সংস্করণ দিয়েছি যেটা দ্বিতীয় সংস্করণের চেয়ে ব্যবহার করা একটু বেশী সোজা। এখানে f-এর উপর খালি একটাই শর্ত--Riemann integrable হতে হবে। তবে ϕ-এর উপরে একটা বাড়তি শর্ত চেপেছে--strictly monotone হতে হবে।

Integration by substitution (version 3)

Let $\phi : [a, b] \to I$ be a differentiable, strictly monotone function, where $I \subseteq \mathbb{R}$ is some interval. Let ϕ' be Riemann integrable on $[a, b]$. Let $f : I \to \mathbb{R}$ be some Riemann integrable function. Then the function $f(\phi(t))\phi'(t)$ is Riemann integrable on $[a, b]$, and

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

এই তৃতীয় সংস্করণটার প্রমাণ কিন্তু খানিকটা শক্ত। আমরা তার মধ্যে যাব না।

19.2 By parts

আমরা differentiation-এর product rule শিখেছিলাম হায়ার সেকণ্ডারীর সময়েই--

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

সুতরাং এটাকে উল্টে integration-এর একটা সূত্র পাওয়ার চেষ্টা করা যেতে পারে। Fundamental theorem লাগিয়ে বলা যায় কি

$$\int_a^b \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)?$$

এটাকে একটু এদিক ওদিক করলেই একটা চেনা জিনিস পাবে--

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

যেটার প্রচলিত নাম হল integration by parts. প্রশ্ন হল আমরা যেভাবে fundamental theorem লাগিয়ে দিলাম সেটা সত্যিই সেভাবে লাগানো যায় কিনা! Substitution-এর সময়ে যে সব কথা বলেছি সে সব শুনে তুমি তো এখন সাবধান হয়ে গেছ। তুমি জান যে fundamental theorem-টা যতই লোভনীয় হোক না কেন integration মোটেই differentiation-এর পুরোপুরি বিপরীত নয়, "মোটামুটি" বিপরীত মাত্র। সুতরাং বাড়তি কিছু শর্ত দরকার। এরকম একটা সহজ শর্ত হল $f'(x)g(x)$ আর $f(x)g'(x)$-কে integrable হতে হবে। এটা প্রায় বলাই বাহুল্য, কারণ তা নইলে আর $\int_a^b f'(x)g(x)dx$ এবং $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ লিখলাম কী করে। আর হ্যাঁ, $f(x)$ এবং $g(x)$-কেও differentiable হতে হবে (নইলে $f'(x)$ আর $g'(x)$-এর প্রশ্নই উঠত না)! শর্তগুলোকে আরেকটু সহজ করে লেখা যায়--

1. f আর g-কে differentiable হতে হবে,
2. f' আর g'-কে $[a,b]$-র উপরে Riemann integrable হতে হবে। এতেই কাজ হবে, কারণ f আর g যেহেতু differentiable, তাই continuous, এবং তাই integrable-ও বটে। তাই f' আর g' যদি integrable হয় তবেই fg' এবং $f'g$-ও integrable হবে।

এইরকম এক প্রস্থ শর্তই চেয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 38: State a set of conditions under which the integration by parts formula

$$\int_a^b fg'dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'gdt$$

holds and establish it.[4] **(2008.6b)**

SOLUTION:

> Let f, g be differentiable on $[a,b]$ and f', g' be integrable on $[a,b]$. Then
>
> $$(fg)' = f'g + fg'.$$
>
> Thus the fundamental theorem of calculus says
>
> $$\int_a^b (fg)' = \int_a^b (f'g + fg') = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Now, by the given assumption, $\int_a^x f'g$ and $\int_a^x fg'$ both exist.

$$\therefore \int_a^b (f'g + fg') = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$$

Hence

$$\int_a^b fg'dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'gdt,$$

as required.

■

DAY 20
$\log_e x$ আর e^x

আমরা হায়ার সেকণ্ডারীর সময় থেকেই দুটো function ব্যবহার করে আসছি--e^x আর $\log_e x$. যদিও অংকের জগতে সব জিনিসেরই একটা সংজ্ঞা থাকে, কিন্তু অনেক ছাত্রের কাছেই e^x এবং $\log_e x$-এর সংজ্ঞা স্পষ্ট থাকে না। ওরা যেন সৃষ্টির আদি থেকে এমনিই ছিল, ওদের আবার সংজ্ঞার কী দরকার, এইরকম একটা ভাব অনেকের মনেই থাকে। "চেনা বামুনের কি আর পৈতে লাগে" গোছের ব্যাপার যেন! কিন্তু সে ভাবটা ঠিক নয়। ওদেরও দস্তুরমত সংজ্ঞা আছে, এবং সেটা জেনে রাখা খুবই দরকার। আমরা দেখেছি অংকের জগতে অনেক সময়ে একই জিনিসকে বিভিন্নভাবে define করা যায়। সংজ্ঞাগুলো দেখতে সম্পূর্ণ আলাদা হলেও ওদের অর্থ একেবারেই এক হয়। যেমন এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে দেখেছিলাম closed set-এর সংজ্ঞা দুভাবে লেখা যায়। আবার এই খণ্ডের প্রথম অধ্যায়ে compact set-এর নানারকম definition-এর সঙ্গে পরিচিত হয়েছি। এখানে e^x আর $\log_e x$-এর বেলাতেও একই রকম ব্যাপার। ওদের একরকম সংজ্ঞা দেওয়া যায় এইভাবে--প্রথমে e^x-কে define করব infinite series দিয়ে

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

এই infinite series-টা যে সত্যিই converge করে সেটা দেখানো যায় ratio test দিয়ে। এইভাবে e^x বলে যে function-টা পেলাম, দেখানো যায় যে সেটা one-to-one. তাই ওটাকে invert করা যায়। এই inverse function-টাকেই আমরা নাম দেব $\log_e x$. অর্থাৎ যদি $y = e^x$ হয় তবে আমরা $\log_e y$-কে define করব x বলে। এইটা হল একরকম definition. এ থেকে e^x এবং $\log_e x$-কে নিয়ে নানা রকম জিনিস প্রমাণ করা যায়, যেমন $\log_e(ab) = \log_e a + \log_e b$, ইত্যাদি।
কিন্তু এখানে আমরা এই definition-এর বদলে অন্য একটা definition শিখব। প্রথমে $\log_e x$-কে নিয়ে পড়ি।

20.1 $\log_e x$

আমরা জানি যে যদি $x \geq 1$ হয় তবে $t \in [1, x]$ হলে $\frac{1}{t}$ একটা continuous function, এবং তাই $[1, x]$-এর উপরে Riemann integrable-ও বটে। একইভাবে যদি $0 < x < 1$ হয় তবেও $\frac{1}{t}$ হবে $[x, 1]$-এর উপর Riemann integrable. সুতরাং

$$\forall x > 0 \quad \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ হল একটা সংখ্যা।}$$

আমরা হায়ার সেকণ্ডারীর অভিজ্ঞতা থেকে জানি যে এই সংখ্যাটা আসলে $\log_e x$. কিন্তু এখানে আমরা সরাসরি এইটাকেই সংজ্ঞা হিসেবে ব্যবহার করব। অর্থাৎ $\log_e x$ বিষয়ে আগে যা যা জানতাম সব ভুলে গিয়ে define করব--

$$\forall x > 0 \quad \log_e x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

এবং এই definition থেকে $\log_e x$-এর যাবতীয় গুণাবলী নতুন করে প্রমাণ করব। অবশ্যই প্রশ্ন উঠতে পারে--খামোখা জানা জিনিসগুলো ইচ্ছে করে ভুলে নতুন করে প্রমাণ করব কেন? এর একটা উত্তর হল এই যে অনেক অংক আছে যেটা আগের সংজ্ঞা লাগিয়ে করা কঠিন, কিন্তু নতুন সংজ্ঞা দিয়ে করা সোজা। তাই দুরকম সংজ্ঞাই জানা থাকা ভালো।

Example 39: Define logarithm function in terms of integral. Use your definition to prove that it is a strictly increasing function.[3] **(2012.1g)**

SOLUTION:

The function $f(x) = \frac{1}{x}$ is well-defined and continuous for $x \in (0, \infty)$. So for each $x \in [1, \infty)$ the function is Riemann integrable on $[1, x]$ and for every $x \in (0, 1)$ the function is Riemann integrable on $[x, 1]$. So the function

$$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

is well-defined for $x \in (0, \infty)$. This is a definition of the (natural) logarithm function.

লক্ষ কর যে এখানে $\log_e x$ না লিখে $L(x)$ লিখেছি। অবশ্য $\log_e x$ লিখলেও দিব্যি চলত। তবে নতুন definition তো, তাই একটা নতুন চিহ্নও ব্যবহার করেছি!

Second part:

To show:

$$\forall b > a > 0 \quad L(b) > L(a).$$

$\forall a, b$ Take any $b > a > 0$.

Then $L(b) - L(a) = \int_1^b \frac{dt}{t} - \int_1^a \frac{dt}{t} = \int_a^b \frac{dt}{t} \geq \int_a^b \frac{dt}{b} = \frac{b-a}{b} > 0$, since $\forall t \in [a, b] \quad \frac{1}{t} \geq \frac{1}{b}$.

Thus $L(b) - L(a) > 0$, as required.

■

Exercise 14: Define $\ln x$, $0 < x < \infty$, as an integral and using your definition show that $\ln x$ is strictly increasing on $(0, \infty)$. **(2003.1f)** ■

যেহেতু $\log_e x$ হল strictly increasing, তাই $\log_e x$ অবশ্যই one-to-one হতে বাধ্য। এইবার আমরা দেখাব যে শুধু one-to-one-ই নয় $\log_e x$ আসলে $(0, \infty)$ থেকে $\mathbb{R}$ একটা onto function-ও বটে! নীচের তিনটে অংক থেকে সেটা বেরিয়ে আসবে।

Example 40: If $\log_e x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, $x > 0$, then show that $\log_e x$ is strictly increasing on $(0, \infty)$ and $\log_e x \to \infty$ as $x \to \infty$.[3] **(2008.1f)**

SOLUTION:

Second part: Since $\log_e x$ is increasing, so enough to show a sequence $\{x_n\}_n$ such that $x_n \to \infty$ and $\log_e x_n \to \infty$.
Let $x_n = n$.
Then for $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\log_e x_n &= \int_1^n \tfrac{dt}{t} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \tfrac{dt}{t} \\
&\geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \tfrac{dt}{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{1}{k+1} \to \infty,
\end{aligned}$$

since $\sum \frac{1}{n} = \infty$.

■

Example 41: Defining

$$\log_e x = \int_1^x \frac{dx}{x}, \quad (x > 0)$$

prove that $\lim_{x\to 0+} \log_e x = -\infty$.[3] **(2011.1f)**
SOLUTION:

As $\log_e x$ is an increasing function on $(0, \infty)$,
so enough to show a sequence $\{x_n\}_n$ such that $x_n \to 0+$ and $\log_e x_n \to -\infty$.
Let $x_n = \frac{1}{n}$.
Then for $n \geq 2.$,

$$\begin{aligned}
\log_e x_n &= \int_1^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k+1}} \frac{dt}{t} = -\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{t} \\
&\leq -\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} k dt \quad \left[\because \forall t \in \left[\tfrac{1}{k+1}, \tfrac{1}{k}\right] \quad \tfrac{1}{t} \geq k \right] \\
&= -\sum_{k=1}^{n-1} k \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \\
&= -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = -\sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m} \quad \left[\text{putting } m = k+1 \right] \\
&\to -\infty,
\end{aligned}$$

since $\sum \frac{1}{m} = \infty$.

■

এই দুটো অংক মিলিয়ে আমরা এই পেলাম যে $\log_e x$ একদিকে ∞-র দিকে উঠে যায়, আর অন্যদিকে $-\infty$-র দিকে নেমে যায়। এদিকে $\log_e x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, তার মানে $\frac{1}{t}$-এর একটা indefinite integral. যেহেতু Riemann integrable function-দের indefinite integral সব সময়ে continuous হয়, তাই $\log_e x$ একটা continuous function-ও বটে। সুতরাং intermediate value theorem বলছে যে $\log_e x$ অবশ্যই $(-\infty, \infty)$-র মধ্যে যে কোনো value নিতে পারে। সাবধান, intermediate value theorem-এ কিন্তু কোনো ∞-র গল্প ছিল না। সুতরাং এখানে intermediate value theorem-টা একটু কায়দা করে লাগাতে হবে।

Example 42: Show that $\log_e : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ is an onto function.

SOLUTION:

To show

$\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists c \in (0, \infty) \quad \log_e c = r.$

$\forall r$ Take any $r \in \mathbb{R}$.

$\because \log_e x \to -\infty$ as $x \to 0+$,

$\therefore \exists a \in (0, \infty) \quad \log_e a < r.$

Similarly,

$\because \log_e x \to \infty$ as $x \to \infty$,

$\therefore \exists b \in (a, \infty) \quad \log_e b > r.$

$\because \log_e x$ is continuous on $[a, b]$,

$\therefore$ By intermediate value theorem, $\exists c \in [a, b] \quad \log_e c = r.$

$\exists c$ Choose this $c \in (0, \infty)$.

By construction, we already have $\log_e c = r$, as required.

■

আমরা জানতাম যে $\log_e x$-কে differentiate করলে $\frac{1}{x}$ হয়। দেখি নতুন definition-টা থেকেও তাই পাই কিনা।

Example 43: True or false with justification: If

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad 0 < x < \infty,$$

then $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$.[3] **(2006.1f)**

SOLUTION:

The statement is true.

Take any $x \in (0, \infty)$.

The function $\frac{1}{t}$ is continuous on $[x, 1]$ if $x < 1$, and on $[1, x]$ if $x \geq 1$.

So, by the fundamental theorem of calculus, the integral function $\log x$ is differentiable and its derivative is $\frac{1}{x}$, as required.

■

Example 44: Defining

$$\log_e x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad (x > 0),$$

prove from the definition that

$$\frac{x}{1+x} < \log_e(1+x) < x \quad (x > 0).$$

[3] **(2005.1d)**
Solution:

Consider $P \in \mathbb{P}([1, 1+x])$ given by

$$1 < 1 + \tfrac{x}{2} < 1 + x.$$

Then

$$\begin{aligned} \log_e(1+x) &= \int_1^{1+x} \frac{dt}{t} \\ &\leq U(P, f) \\ &= \tfrac{x}{2}\left[1 + \tfrac{1}{1+\frac{x}{2}}\right] \\ &< \tfrac{x}{2}[1+1] \\ &= x, \end{aligned}$$

as required.
Again,

$$\begin{aligned} \log_e(1+x) &= \int_1^{1+x} \frac{dt}{t} \\ &\geq L(P, f) \\ &= \tfrac{x}{2}\left[\tfrac{1}{1+\frac{x}{2}} + \tfrac{1}{1+x}\right] \\ &> \tfrac{x}{2}\left[\tfrac{1}{1+x} + \tfrac{1}{1+x}\right] \\ &= \tfrac{x}{1+x}, \end{aligned}$$

as required.

■

দেখতেই পাচ্ছ যে $\log_e x$-এর পরিচিত ধর্মগুলো কিভাবে এই নতুন definition থেকেও পাওয়া যাচ্ছে। এরকম আরেকটা ধর্মের হদিশ আছে নীচের অংকটায়।

Exercise 15: যথারীতি $\log_e x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ নিয়ে শুরু কর। দেখাও যে

$$\log_e\left(\frac{b}{a}\right) = \log_e b - \log_e a.$$

■

Exercise 16: কী করে দেখাবে যে $\log_e(ab) = \log_e a + \log_e b$ হয়? ■

এই অংকগুলো করে ফেলার পর যদি তোমায় বলি $\log_e(a^3) = 3\log_e a$ দেখাতে, তবে তুমি অমনি লিখে ফেলবে--

$$\log_e a^3 = \log_e(a \times a \times a) = \log_e a + \log_e a + \log_e a = 3\log_e a.$$

একইভাবে নীচের অংকটা কর দেখি।

Exercise 17: দেখাও যে $a > 0$ হলে $\log_e\left(a^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\log_e a$. ■

এই অংকটার পর নিশ্চয়ই $\log_e\left(a^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}\log_e a$ দেখাতে অসুবিধা হবে না। সুতরাং নীচের অংকটাও সোজা লাগা উচিত।

Exercise 18: দেখাও যে $a > 0$ হলে

$$\forall b \in \mathbb{Q} \quad \log_e\left(a^b\right) = b\log_e a.$$

■

Example 45: The function L is defined by $L(x) = \int_a^x \frac{1}{t}dt$, $x > 0$. Prove that $\lim_{x\to\infty} L(x) = \infty$. (You can assume the results: $L(x^y) = yL(x)$, $y \in \mathbb{R}$ and $L(x)$ is strictly increasing function on $(0,\infty)$. [3] **(2004.5c)**

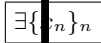
SOLUTION: যেহেতু $L(x)$-কে strictly increasing বলাই আছে, সুতরাং এমন একটা কোনো sequence $\{x_n\}_n$ দেখালেই চলবে যাতে $L(x_n) \to \infty$ হয়।

$\because L(x)$ is assumed strictly increasing,

$\therefore$ Enough to show

$$\exists \{x_n\}_n \subseteq (0,\infty) \quad L(x_n) \to \infty.$$

$\because 2^n \to \infty$ as $n \to \infty$, $\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad 2^N > a$.

Let $r = 2^N$.

$\boxed{\exists\{x_n\}_n}$ Choose $x_n = r^n$.

Now $L(r) = \int_a^r \frac{dt}{t} \geq \int_a^r \frac{dt}{r} = \frac{r-a}{r} = 1 - \frac{a}{r} > 0$.

So

$$L(x_n) = L(r^n) = nL(r) \to \infty,$$

as required.

■

20.2 e^x

আমরা $\log_e x$-এর নতুন definition নিয়ে আলোচনা করলাম, এবার e^x-এর নতুন definition দেব। আমরা দেখিয়েছি যে $\log_e : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ হল one-to-one এবং onto. সুতরাং $\log_e$-র inverse আছে। এটাই হল e^x-এর নতুন সংজ্ঞা। তার মানে $y = e^x$ বলব যদি $\log_e y = x$ হয়, মানে

$$\int_1^y \frac{dt}{t} = x$$

হয়।
নীচের অংকটায় এই নতুন সংজ্ঞাটা ব্যবহার করে দেখাতে বলেছে যে $2 < e < 3$ হবে।

Example 46: If e is defined by the equation

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1,$$

prove that $2 < e < 3$.[3] **(2009.1h,2007)**
SOLUTION: অংকটা দুইধাপে করব। প্রথম ধাপটা সহজ--

> Step 1: Shall show $e > 2$.
>
> We know that the function $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ is strictly increasing on $(0, \infty)$, since $\frac{1}{t} > 0$.
>
> Now
>
> $$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dt}{t} &< \int_1^2 \frac{dt}{1} \\ &= 1.\end{aligned}$$
>
> $\therefore F(2) < 1$.
>
> $\therefore e > 2$, as required.

যুক্তিটা বুঝলে তো? যদি $e \leq 2$ হত তবে $F(e) \leq F(2) < 1$ হত, কিন্তু $F(e) = 1$ বলা আছে।
এবার $e < 3$ দেখাতে হবে। এটা একটু বেশী শক্ত। এখানেও খালি $F(3) > 1$ দেখানোই যথেষ্ট। কারণ এবার যদি $e \geq 3$ হয়, তবে $F(e) \geq F(3) > 1$ হয়ে যাবে, কিন্তু বলা আছে যে $F(e) = 1$.

> Step 2: Shall show $e < 3$.
>
> Enough to show $F(3) > 1$,
>
> ie,
>
> $$\int_1^3 \tfrac{dt}{t} > 1.$$

এবার আমরা একটা কৌশল করব যেটা আসলে খুবই সোজা কিন্তু চট্ করে মাথায় আসে না। এখানে integral-টা হল lower sum-গুলোর supremum. সুতরাং দেখাতে হবে যে $L(P, f)$-দের sup-টা > 1 হবে। তার জন্য এমন একটা partition

$P \in \mathbb{P}([1,3])$ পেলেই চলবে যাতে $L(P,f) > 1$ হয়। এরকম partition পাওয়া খুবই সোজা, $[1,3]$-কে পর পর ভাঙতে ভাঙতে গেলেই চলবে, যেই $L(P,f) > 1$ হবে অমনি থেমে যাব। হাতে ক্যালকুলেটর থাকলে এই কাজটা জলের মত সোজা। আমি প্রথমে এই partition-টা নিলাম--

$$1 < 2 < 3.$$

$L(P,f)$ বার করলে দেখবে ≤ 1 হবে। ঠিক আছে, partition-টাকে আরও সূক্ষ্ম করি--

$$1 < 1.5 < 2 < 2.5 < 3.$$

লক্ষ কর যে এতে খালি দুটো বাড়তি point লাগল-- 1.5 আর 2.5. সুতরাং $L(P,f)$ বার করার জন্য নতুন করে বেশী খাটতে হচ্ছে না। এখনো $L(P,f) \leq 1$ আছে, সুতরাং আরও সূক্ষ্ম করি--

$$1 < 1.25 < 1.5 < 1.75 < 2 < 2.25 < 2.5 < 2.75 << 3.$$

এবার বাড়তি point লেগেছে খালি চারটে, তাই আগের $L(P,f)$-টার সাথে নতুন চারটে সংখ্যা যোগ করলেই নতুন $L(P,f)$ পাবে। এবার $L(P,f) > 1$ হবে। ব্যস্, এবার এটা লিখে দিলেই চলবে।

Enough to show a partition $P \in \mathbb{P}([1,3])$ such that

$$L(P,f) > 1,$$

where $f(t) = \frac{1}{t}$.
Choose the partition P as

$$1 < \tfrac{5}{4} < \tfrac{6}{4} < \tfrac{7}{4} < \tfrac{8}{4} < \tfrac{9}{4} < \tfrac{10}{4} < \tfrac{11}{4} < 3.$$

Then

$$\begin{aligned} L(P,f) &= \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{4}{5} + \tfrac{4}{6} + \cdots + \tfrac{4}{12}\right] \\ &= \frac{28271}{27720} > 1. \end{aligned}$$

এই কায়দাটা তোমার হয়তো বোকা বোকা লাগতে পারে। বাজারে প্রচলিত কিছু বইয়ে দেখেছি বেশ গালভরা কিছু ম্যাজিক ফর্মুলা ব্যবহার করে $e < 3$ প্রমাণ করে। অপরপক্ষে আমরা যে ভাবে করলাম সেভাবে তুমি e-এর যে কোনো upper bound-ই দেখাতে পারবে, কোনো বাড়তি ম্যাজিক ছাড়াই। যেমন যদি $e < 2.8$ দেখাতে বলে তবে আরো সূক্ষ্ম partition নিলেই হবে। মজার কথা হল, কম্পিউটার দিয়ে integration করার কাজে এরকম একটা কায়দা সত্যিই ব্যবহার করা হয়, তাকে বলে Romberg scheme of integration. ■

DAY 21
Second mean value theorems

আগে আমরা integral calculus-এর একটা mean value theorem শিখেছিলাম, যাকে অনেক সময়ে first mean value theorem বলে। এবার আমরা আরও দুটো mean value theorem শিখব। এদের দুজনকেই বলে second mean value theorem of integral calculus. এখানেও মূল ব্যাপারটা একই থাকবে--$\int_a^b f(x)g(x)dx$ দেওয়া থাকবে, যার মধ্য থেকে আমরা f বা g-কে integral-এর বাইরে নিয়ে আসার চেষ্টা করব।

কিন্তু first mean value theorem-এর যত বেশী প্রয়োগ এই নতুন mean value theorem-গুলোর বাস্তব প্রয়োগ তার চেয়ে অনেক কম। এবং দেখতেও বেশী খটমট। second mean value theorem-এর দুটো রূপ নিয়ে আমরা আলোচনা করব--Bonnet's form আর Weierstrass's form.

21.1 Bonnet's form

প্রথমে Bonnet's form-টা আলোচনা করি।

Example 47: State the second mean value theorem of integral calculus in Bonnet's form.[2]

(2012.6c,2010.6c,2006.5a,2003.1d)

SOLUTION:

Second MVT (Bonnet's form)

Let $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ be two functions such that

- f, g are integrable on $[a, b]$
- g is nonnegative, nonincreasing on $[a, b]$.

Then

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

for some $\xi \in [a, b]$.

■

আমরা এটা এখানে প্রমাণ করব না, তবে একটা ধারণা দেব যে কেন এটা ঠিক। প্রথমে একটা সহজ সংস্করণ দেখি--একেবারে একই জিনিস খালি একটা বাড়তি শর্ত যোগ করব যে $f(x)$-ও nonnegative. তাহলে প্রমাণটা খুব সহজ--
লক্ষ কর যে $g(a) = 0$ হলে $g(x) \equiv 0$ হয়ে যায়, এবং সেক্ষেত্রে প্রমাণের আর কিছু বাকী থাকে না। সুতরাং আমরা $g(a) > 0$ কেসটা নিয়েই খালি মাথা ঘামাব। যেহেতু বলা আছে যে g হল nonincreasing, তাই

$$\forall x \in [a, b] \quad g(a) \geq g(x).$$

সুতরাং

$$\forall x \in [a, b] \quad g(a)f(x) \geq f(x)g(x).$$

এখানেই আমরা f-এর nonnegativity-টা ব্যবহার করলাম। এবার দুই পাশকে integrate করে পাব

$$g(a)\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

তার মানে

$$0 \leq \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

এইবার এই function-টা দ্যাখো--

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

লক্ষ কর যে, $F(a)=0$ আর $F(b)=\int_a^b f(x)dx$. সুতরাং

$$F(a) \le \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx \le F(b). \tag{*}$$

আমরা জানি $F(x)$ হল একটা continuous function, সুতরাং intermediate value theorem বলছে যে এমন একটা $\xi \in [a,b]$ পাবই যাতে

$$F(\xi) = \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx$$

হয়, মানে

$$\int_a^{\xi} f(x)dx = \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx$$

হয়, ঠিক যেটা দেখানোর দরকার ছিল।
এই হল Bonnet-এর MVT-র সহজ সংস্করণের প্রমাণ, যেখানে আমরা বাড়তি ধরে নিয়েছিলাম যে f হল nonnegative. যদি এটা না ধরে নিতাম তবেও প্রমাণটা অনেকটা একই পথে এগোত, খালি সেখানে আমরা (*)-এর বদলে দেখাতাম

$$F(a^*) \le \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx \le F(b^*), \tag{**}$$

যেখানে $F(a^*)$ হল $F(x)$-এর minimum value, আর $F(b^*)$ হল maximum value. এরপর সহজ সংস্করণেরই মত intermediate value theorem লাগিয়ে প্রমাণটা হবে। তবে ঝকমারিটা হল (**)-টা দেখানো, আমরা সে আলোচনায় যাব না।
এবার কিছু প্রয়োগ দেখি।

Example 48: State the second mean value theorem of integral calculus in Bonnet's form. Using it show that

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right| \le \frac{2}{a}, \quad 0<a<b.$$

[2+3] **(2006.5a)**
SOLUTION:

<u>Second part:</u> Let

$$f(x)=\sin x \quad \text{and} \quad g(x)=\frac{1}{x}.$$

$\because 0<a<b$, $\therefore f,g$ are both Riemann integrable on $[a,b]$.

Also $g(x)$ is nonincreasing and nonnegative on $[a,b]$.

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad & \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \\
= \quad & \int_a^b f(x)g(x)dx \\
= \quad & g(a)\int_a^\xi f(x)dx \quad [\text{ for some } \xi \in (a,b) \text{ by Bonnet's MVT}] \\
= \quad & \frac{1}{a}\int_a^\xi \sin x dx \\
= \quad & \frac{1}{a}(\cos a - \cos\xi).
\end{aligned}
$$

Hence

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx\right| &= \left|\frac{1}{a}(\cos a - \cos\xi)\right| \\
&\leq \frac{1}{a}\big(|\cos a| + |\cos\xi|\big) \quad \left[\text{ By triangle inequality}\right] \\
&\leq \frac{1}{a}(1+1) \quad [\because \forall x \quad |\cos x| \leq 1] \\
&= \frac{2}{a},
\end{aligned}
$$

as required.

■

এই অংকটা ভালো করে দেখলেই MVT লাগানোর উপকারিতাটা বোঝা যায়। এখানে integrate করা হচ্ছে $\frac{\sin x}{x}$-কে যেটাকে integrate করার কোনো সহজ পথ চোখে পড়ছে না। কিন্তু যদি নীচের ওই x-টা না থাকত তবে খালি $\sin x$-কে অনায়াসে integrate করতে পারতাম। অতএব চেষ্টা করব $\frac{1}{x}$-টাকে টেনে বাইরে নিয়ে আসা যায় কিনা। এবং MVT ঠিক সেই জন্যেই তৈরী। অবশ্যই এর ফলে integral-টা পুরো বেরিয়ে গেল না, কারণ একটা অজানা ξ এসে জুটল, কিন্তু তাও একটা আন্দাজ পাওয়া গেল যে integral-টা কি রকম হবে।
আরও কয়েকটা একইরকম অংক দিলাম হাত পাকাবার জন্য।

Exercise 19: Use the second mean value theorem of integral calculus due to Bonnet to show that

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx = e^a - e$$

for some $a \in [1,2]$. ■

Exercise 20: Use the second mean value theorem of integral calculus due to Bonnet to show that

$$\int_1^2 \frac{dx}{xe^x} = e^{-a} - e^{-1} = \frac{\log b}{e^a}.$$

for some $a, b \in [1, 2]$. ■

যে সব integral এমনিতেই কষে ফেলা যায় তাদের ক্ষেত্রে অবশ্যই MVT লাগানোর মানে হয় না। তবে অনেক সময়ে integral-টা সরাসরি কষার চেয়ে MVT লাগালে খানিকটা পরিশ্রম বাঁচে। নীচের অংকটা সেরকম একটা উদাহরণ।

Example 49: Show that there is a value ξ in $[0, \pi]$ such that

$$\int_0^\pi e^{-x} \cos x dx = \sin \xi.$$

[3] **(2008.6c,2003.1d)**

SOLUTION: এখানে integral-টা সরাসরি কষে ফেলা যায়, যেভাবে হায়ার সেকণ্ডারীতে করতাম। তাহলে পাবে

$$\int_0^\pi e^{-x} \cos x dx = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}.$$

যেহেতু $\pi > 0$ তাই $e^{-\pi} < 1$. ফলে

$$0 < \frac{e^{-\pi} + 1}{2} < 1.$$

সুতরাং $\xi = \sin^{-1}\left(\frac{e^{-\pi}+1}{2}\right)$ নিলেই চলবে। দেখতে গেলে এটা খুবই সহজ সমাধান, কিন্তু সমস্যাটা হল এই যে integral-টা কষা গেল বটে কিন্তু সেটা করতে বেশ অনেকগুলো ধাপ লাগে। যদি MVT লাগাই তবে একই অংক এইভাবে করা যায়--

> Let
> $$g(x) = e^{-x} \text{ and } f(x) = \cos x \text{ for } x \in [0, \pi].$$
> Then $f(x), g(x)$ are continuous and hence integrable on $[0, \pi]$.
>
> Also $g(x)$ is nonnegative and nonincreasing over $[0, \pi]$.
>
> So by Bonnet's MVT
> $$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-x} \cos x dx &= \int_0^\pi f(x) g(x) dx \\ &= g(0) \int_0^\xi f(x) dx \text{ for some } \xi \in [0, \pi] \\ &= e^{-0} \int_0^\xi \cos x dx \\ &= \sin \xi, \end{aligned}$$
> as required.

■

এবার একটা অংক কষব যেখানে সরাসরি কষাই ভালো, Bonnet's MVT লাগাতে গেলে বিপদ হতে পারে!

Example 50: State Bonnet's form of 2nd mean value theorem of integral calculus. Show that

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{10}\frac{n(11-x)}{1+n^2x^2}dx = 11\frac{\pi}{2}.$$

[1+3] **(2012.6c)**

SOLUTION: কোথাও বলে দেয় নি যে Bonnet's MVT লাগাতেই হবে, কিন্তু যেহেতু প্রথম অংশে Bonnet's MVT লিখতে দিয়েছে, তাই সেটা লাগাবার কথাই মাথায় আসে। তাতে কী বিপদ হবে সেটা এক্ষুণি বলছি, আগে সরাসরি integrate করেই অংকটা করে নিই।

> Second part: Substituting $u = nx$ we have
>
> $$\begin{aligned} & \int_0^{10}\frac{n(11-x)}{1+n^2x^2}dx \\ = & \int_0^{10n}\frac{(11-\frac{u}{n})}{1+u^2}du \\ = & 11\int_0^{10n}\frac{du}{1+u^2} - \frac{1}{n}\int_0^{10n}\frac{u\,du}{1+u^2}. \end{aligned}$$
>
> Now
> $$\int_0^{10n}\frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1}u\Big|_0^{10n} = \tan^{-1}10n.$$
> and, substituting $v = 1+u^2$,
> $$\int_0^{10n}\frac{u\,du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\int_1^{1+100n^2}\frac{dv}{v} = \tfrac{1}{2}\log(1+100n^2).$$
> So
> $$\int_0^{10}\frac{n(11-x)}{1+n^2x^2}dx = 11\tan^{-1}10n - \frac{1}{2n}\log(1+100n^2).$$
> Now since $\log(1+100n^2)\to\infty$ slower than $n\to\infty$, so
> $$\frac{1}{2n}\log(1+100n^2)\to 0.$$
> Also
> $$11\tan^{-1}10n \to \frac{11\pi}{2}.$$
> So
> $$\int_0^{10}\frac{n(11-x)}{1+n^2x^2}dx \to \frac{11\pi}{2},$$
> as required.

এবার দেখি Bonnet's MVT লাগাতে গেলে কী ভুল হয়ে যেতে পারে। প্রথমে $\frac{n(11-x)}{1+n^2x^2}$-কে $f(x)g(x)$ হিসেবে ভেঙে লিখতে হবে, যাতে $[0,10]$-এর উপরে $g(x)$ হয় nonnegative ও nonincreasing. একটা পথ হতে পারে

$$f(x) = (11-x) \text{ এবং } g(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$$

নেওয়া। কিন্তু তাহলে $f(x)$-কে integrate করে কোনো ভাবেই কোনো π আসতে পারে না, অথচ উত্তরে একটা π রয়েছে। আর এক ভাবে ভাঙা যায় এইরকম--

$$f(x) = \frac{n}{1+n^2x^2} \text{ এবং } g(x) = (11-x)$$

এবার $f(x)$-কে integrate করলে একটা $\tan^{-1}$ আসবে, সুতরাং limit নেওয়ার পর একটা π আসার সম্ভাবনা আছে। Bonnet's MVT লাগালে পাব

$$\int_0^{10} \frac{n(11-x)}{1+n^2x^2}dx = g(0)\int_0^{\xi} f(x)dx = 11\int_0^{\xi} \frac{n\,dx}{1+n^2x^2} = 11\tan^{-1}(n\xi).$$

বাঃ বেশ ঠিক দিকে এগোচ্ছে মনে হচ্ছে! এবার তো $n\to\infty$ নিলেই $n\xi\to\infty$ হবে, আর $\tan^{-1}(n\xi)\to\frac{\pi}{2}$ হবে, ঠিক যেমনটা চেয়েছিল! কিন্তু এটা ভুল!!! ওই যে ξ-টা লিখেছি ওটা কিন্তু $f(x), g(x), a$ এবং b সবার উপরেই নির্ভর করতে পারে। সুতরাং এখানে যেহেতু $f(x)$-এর মধ্যে n রয়েছে, তাই ξ-টা আসলে n-উপর নির্ভর করে, আমাদের লেখা উচিত ছিল ξ_n. সুতরাং খালি $n\to\infty$ দেখেই বলে দিতে পারি না যে $n\xi_n\to\infty$ হবে। যেমন $\xi_n=\frac{1}{n}$ হলে $n\xi_n\to 1$ হবে! যেহেতু $\xi_n\in[0,10]$ ঠিক কী হবে সে বিষয়ে Bonnet's MVT সম্পূর্ণ নীরব, তাই এই কায়দায় অংকটা মোটেই করা যাবে না! ■

এর পরের অংকটাতেও একইরকম একটা গোলমাল আছে।

Example 51: State the second mean value theorem of integral calculus in Bonnet's form. Using it show that there exist ξ and η in $[0,1]$ such that

$$\int_0^1 \frac{\sin\pi x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}\sin\pi\xi = \frac{2}{\pi(1+\eta^2)}.$$

[2+3] **(2010.6c)**

SOLUTION: এখানে বলে দিয়েছে Bonnet's MVT লাগাতে। কিন্তু দুঃখের বিষয় অংকটা আসলে first MVT-র। আমরা সেভাবেই অংকটা করব।

Second part:

Let

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ and } g(x) = \sin\pi x \quad \text{ for } x\in[0,1].$$

Then $g(x)$ is continuous and $f(x)$ preserves sign over $[0,1]$.

So by MVT

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sin\pi x}{1+x^2}dx &= \int_0^1 f(x)g(x)dx \\ &= g(\xi)\int_0^1 f(x)dx \text{ for some } \xi\in[0,1] \\ &= \sin\pi\xi\int_0^1\frac{dx}{1+x^2} \\ &= \sin\pi\xi\left[\tan^{-1}x\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4}\sin\pi\xi,\end{aligned}$$

as required.

Again, $f(x)$ is continuous and $g(x)$ preserves sign over $[0,1]$.

So by MVT

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2}dx &= \int_0^1 f(x)g(x)dx \\ &= f(\eta)\int_0^1 g(x)dx \text{ for some } \eta\in[0,1] \\ &= \frac{1}{1+\eta^2}\int_0^1 \sin \pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi(1+\eta^2)}\left[-\cos \pi x\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi(1+\eta^2)},\end{aligned}$$

as required.

■

21.2 Weierstrass's form

Example 52: State the second mean value theorem of integral calculus in Weierstrass form. Examine the validity of this theorem for the integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx.$$

[1+3] **(2005.6b)**

SOLUTION:

2nd MVT (Weierstrass's form)

Let $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ be Riemann integrable functions on $[a,b]$. Let f be monotonic. Then there exists $\xi\in[a,b]$ such that

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx + f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)dx.$$

Second part: The integrand may be factored as $f(x)g(x)$ in different ways. The theorem applies for some of them, and does not apply for some others.

If we take $f(x) = x^2$ and $g(x) = \cos x$ then neither $f(x)$ nor $g(x)$ is monotonic on $[-\pi, \pi]$. So the theorem does not apply.

If we take $f(x) = x$ and $g(x) = x\cos x$, then both $f(x), g(x)$ are continuous and hence Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$. Also $f(x)$ is monotonic on $[-\pi, \pi]$. So the theorem applies.

এবার আমরা করব কি, theorem-এ যে equality-টা রয়েছে তার দুটো দিকই বার করব (হ্যাঁ, একেবারে হায়ার সেকণ্ডারীর মত করে কষে ফেলব)। তারপর হাতেকলমে একটা উপযুক্ত ξ বার করে দেখিয়ে দেব।

We compute

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx &= \cdots = -4\pi,\\ \int g(x)dx &= \cdots = x\sin x + \cos x + \text{ arbit const.}\end{aligned}$$

এই integral-দুটো তোমাকে দাঁতেদাঁত চেপে কষতে হবে। ধাপগুলো ডট্‌ডট্‌ দিয়ে বাদ দিয়ে দিয়েছি। খুব কঠিন নয়, integration by parts লাগালেই হবে।

So the equality in the theorem becomes

$$-4\pi = -\pi[\xi\sin\xi + \cos\xi + 1] + \pi[-1 - \xi\sin\xi - \cos\xi],$$

or

$$\xi\sin\xi + \cos\xi = 1,$$

which is satisfied for $\xi = 0 \in [-\pi, \pi]$.

$\xi = 0$ নিলেই যে কাজ হবে সেটা চোখে দেখে বোঝা। ■

একইরকম একটা অংক তোমার জন্য।

Exercise 21: Verify Weierstrass form of second mean value theorem of integral calculus for the function $f(x) = x\sin x$ on $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.[4] **(2013.5c)** ■

Example 53: Using second mean value theorem (Weierstrass form) of integral calculus, show that

$$\left|\int_a^b \frac{\cos x}{1+x}dx\right| < \frac{4}{1+a}$$

where $b > a > 0$.[3] **(2004.1f)**

SOLUTION:

Let $f(x) = \frac{1}{1+x}$ and $g(x) = \cos x$. Both are continuous (and Riemann integrable) on $[a,b]$, since $b > a > 0$.

So by Weierstrass's form of the 2nd MVT of integral calculus,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\cos x}{1+x} dx &= \int_a^b f(x)g(x)dx \\
&= f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx \text{ for some } \xi \in [a,b] \\
&= \tfrac{1}{1+a}\int_a^\xi \cos x dx + \tfrac{1}{1+b}\int_\xi^b \cos x dx \\
&= \tfrac{1}{1+a}(\sin\xi - \sin a) + \tfrac{1}{1+b}(\sin b - \sin\xi).
\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b \frac{\cos x}{1+x} dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{1}{1+a}(|\sin\xi| + |\sin a|) + \tfrac{1}{1+b}(|\sin b| + |\sin\xi|) \\
\leq\ & \tfrac{1}{1+a}(|\sin\xi| + |\sin a|) + \tfrac{1}{1+a}(|\sin b| + |\sin\xi|) \quad [\because b > a] \\
\leq\ & \tfrac{1}{1+a}(|\sin\xi| + |\sin a| + |\sin b| + |\sin\xi|) \\
\leq\ & \tfrac{1}{1+a}(1+1+1+1) = \tfrac{4}{1+a},
\end{aligned}$$

as required.

■

Answers

4. হ্যাঁ, সম্ভব। তবে পেতাম $\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}\sin\pi\zeta$ যেখানে $\zeta \in [0,1]$. **5.** e^x-কে বার করে আনো। **7.** True. **10.** $F(x) = x$, $F'(x) = 1$. না $F'(1) = 1 \neq 2 = f(1)$. **12.** না। **15.** $\int_a^b \frac{dx}{x}$-এ $y = x/a$ বসাও। **16.** প্রথমে $\log(1/a) = -\log a$ দেখিয়ে নাও। তার জন্য $\int_1^a \frac{dx}{x}$-এ $y = ax$ বসাও। **17.** মনে রেখো $b = a^{1/3}$ হলে $a = b^3$. **21.** $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$ নাও। সবশেষে আসবে $2 = \pi\cos\xi$. যেহেতু $\frac{2}{\pi} \in (0,1)$, আর $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$-এর জন্য $\cos x$ একেবারে 0 থেকে 1 পর্যন্ত যে কোনো value নিতে পারে, অতএব এরকম ξ পাবেই।

Chapter IV
Riemann Integration (part 3)

DAY 22
Measure zero

ধরো তোমাকে একটা bounded function দিলাম $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. এটা কখন Riemann integrable **হবে?** উত্তর হল যখন এর set of discontinuity points-টা যথেষ্ট "ছোটো" হবে। এই set-টার একটা নাম দিয়ে নিই--D. কখন D-কে "ছোটো" বলা যায় তার কিছু উদাহরণ আমরা আগেই দেখেছি--

- $D = \phi$: যদি আদৌ কোনো discontinuity-ই না থাকে, মানে f একটা continuous function হয়।
- D is finite: যদি f কেবলমাত্র finite-সংখ্যক point-এ discontinuous হয়।
- D' is finite: যদি D-এর খালি finite-সংখ্যক limit point থাকে।

কখন D-কে "ছোটো" বলা যায় না, তারও একটা উদাহরণ দেখেছি-- $D = [a, b]$.
Henri Lebesgue (আঁরি লেবেগ) নামে একজন গণিতজ্ঞ প্রথম একটা সংজ্ঞা দিয়েছিলেন যে কখন একটা set-কে "ছোটো" বলা যাবে। উনি অবশ্য "ছোটো" শব্দটা ব্যবহার করেন নি, উনি বলেছিলেন "a set having measure zero".

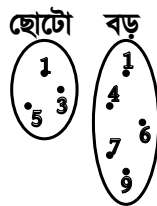
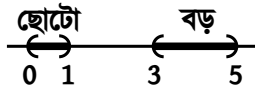
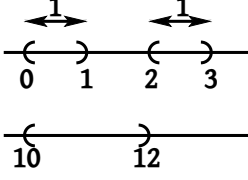
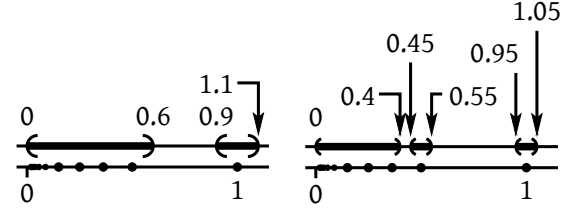
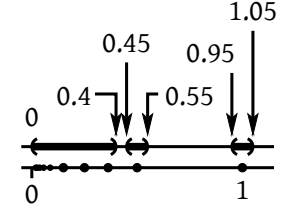
22.1 কাকে বলে?

দুটো set দেওয়া থাকলে কোনটা বড় সেটা বার করা যায় তাদের সাইজের তুলনা করে, যেমন Fig 1-এর দুটো set দেখিয়েছি--

$$\{1, 3, 5\} \text{ আর } \{1, 4, 6, 7, 8\}$$

এদের মধ্যে দ্বিতীয়টা বেশী বড়, কারণ ওটার সাইজ হল 5, কিন্তু প্রথমটার সাইজ $3 < 5$. এই রকম ভাবে দুটো set-এর তুলনা করা আমরা প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম। যদি তোমাকে এই দুটো set দিই

$$(0, 1) \text{ আর } (3, 5)$$

Fig 1

বিস্তারের দিক দিয়ে--

তবে কিন্তু এইভাবে তুলনা করলে উত্তর আসবে যে দুজনেরই সাইজ সমান, এখানে দুজনেরই সাইজ হল uncountable. কিন্তু তোমার নিশ্চয়ই মনে হচ্ছে যে $(3,5)$-টাকেই বেশী বড় বলা উচিত, কারণ ওটা বেশী জায়গা জুড়ে আছে ($5-3=2$ একক জায়গা জুড়ে ওর বিস্তার)। ওদিকে $(0,1)$-এর বিস্তার মাত্র $1-0=1$ একক জায়গায়। Fig 2 দ্যাখো।
এই ব্যাপারটাই এক্ষুণি আমরা অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখব। তার আগে আরেকটা উদাহরণ দেখি। যদি বলি $(0,1)\cup(2,3)$ বেশী জায়গা দখল করে আছে না কি $(10,12)$, তবে উত্তর হবে ওরা দুজনেই সমান জায়গা দখল করে আছে, দুজনেরই মোট বিস্তার হল 2 (Fig 3)। এই রকমভাবে interval জুড়ে জুড়ে তৈরী যে কোনো set-এর ক্ষেত্রেই আমরা তার বিস্তার বার করতে পারি।
কিন্তু যদি এমন একটা set দিই যেটা interval নয়? যেমন $A=\{\frac{1}{n}\ :\ n\in\mathbb{N}\}$? এটা বেশী জায়গা জুড়ে আছে না কি $B=(0,1.1)$? এখানে A-কে চট্ করে কিছু interval দিয়ে লেখা সহজ মনে হচ্ছে না। কিন্তু যেহেতু $A\subseteq B$ তাই A নিঃসন্দেহে B-এর চেয়ে কম জায়গা জুড়ে থাকতে বাধ্য, মানে A-র বিস্তার অবশ্যই $1.1-0=1.1$-এর চেয়ে কম হবে। এতে আমাদের প্রশ্নের নিরসন হল বটে কিন্তু A-র বিস্তার ঠিক কত সেটা জানা হল না। সেটা বার করার একটা কায়দা আছে, সেটা হল বিভিন্ন জানা set-এর সঙ্গে A-র বিস্তারের তুলনা করতে থাকা। সেই সব তুলনার ভিত্তিতে আমরা বার করতে পারব A-র বিস্তার ঠিক কত।
প্রথমে তুলনা করি $B=(0,0.6)\cup(0.9,1.1)$-এর সঙ্গে (Fig 4)। লক্ষ কর যে এখানেও $A\subseteq B$, এবং B-এর বিস্তার হল

$$(0.6-0)+(1.1-0.9)=0.8.$$

তার মানে এবার আরেকটু বেশী তথ্য পেলাম, A-এর বিস্তার 0.8-এর চেয়েও কম।
যদি $B=(0,0.4)\cup(0.45,0.55)\cup(0.95,1.05)$ নিতাম (Fig 5), তাহলেও $A\subseteq B$ হত, এবং B-এর বিস্তার হত

$$(0.4-0)+(0.55-0.45)+(1.05-0.95)=0.4+0.1+0.1=0.6.$$

তার মানে A-র বিস্তার 0.6-এর চেয়েও কম।
আচ্ছা, এভাবে কতটা কমানো সম্ভব? যদি বলি 0.1-এর চেয়েও কম করতে, সেটা কি সম্ভব? মানে এমন একটা B কি পেতে পারি যাতে নীচের তিনটে শর্তই পালিত হয়?

- B-টা দিব্যি কয়েকটা interval জুড়ে তৈরী,
- B-এর বিস্তার ≤ 0.1, এবং
- $A\subseteq B$.

উত্তর হল, হ্যাঁ, এমন একটা B এক্ষুণি বানিয়ে ফেলছি। প্রথমে 0.1-কে দুভাগে ভেঙে নাও--$0.05+0.05$. এবার B-এর একটা টুকরো নাও $(0,0.05)$. মনে রেখো যে $0.05=\frac{1}{20}$, তাই $(0,0.05)$-এর মধ্যে A-র প্রায় সব point-ই ঢুকে গেছে। খালি বাইরে আছে এই 20-টা point–

$$1,\tfrac{1}{2},,\tfrac{1}{3},\cdots,\tfrac{1}{20}.$$

এইবার এই 20-টা point-কে কুড়িটা interval-এর তলায় চাপা দেব, যাদের মোট বিস্তার হবে সেই বাকী 0.05-টা। তার মানে প্রতিটা interval-এর বিস্তার $0.05\div 20=\frac{1}{400}$. একে যদি লেখার সুবিধার জন্য δ নাম দিই, তবে এই 20-টা interval নেব এইরকম--

$$N\left(1,\tfrac{\delta}{2}\right),N\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\delta}{2}\right),...,N\left(\tfrac{1}{20},\tfrac{\delta}{2}\right).$$

তার মানে মোট একুশখানা টুকরো হল, প্রতিটা টুকরোই এককেটা open interval. এদের জুড়ে যে union-টা হবে সেটাই হবে আমাদের B.
বুঝতেই পারছ যে একই কাজ আমরা 0.1-এর জায়গায় 0.01 বা অন্য যে কোনো সংখ্যা $\epsilon > 0$-এর জন্যও করতে পারতাম। তার মানে দাঁড়ালো এই যে A-এর বিস্তার যে কোনো $\epsilon > 0$-এর চেয়েই ছোটো। একটা set-এর বিস্তার তো আর negative হতে পারে না। সুতরাং A-র বিস্তার এমন একটা non-negative সংখ্যা যেটা যাবতীয় $\epsilon > 0$-এর চেয়ে ছোটো। এরকম সংখ্যা দুনিয়ায় একটাই আছে-- 0. তার মানে A-র বিস্তার হল শূন্য!
আমরা বলব A has measure zero.
এবার অংকের ভাষায় সংজ্ঞাটা লিখে ফেলি--

Example 1: What is meant by a zero set?[1] **(2014)**

SOLUTION: এখানে যে "zero set" কথাটা ব্যবহার হয়েছে, সেটা কিন্তু অংকের জগতে standard নয়। Standard নাম হল "measure zero set." বস্তুতঃ "zero set" কথাটা সম্পূর্ণ অন্য অর্থেও ব্যবহৃত হয়ে থাকে--যখন একটা কোনো function $f(x)$-এর zero set বলা হয় তার মানে হল $\{x \ : \ f(x) = 0\}$, অর্থাৎ x-এর যে যে value-তে $f(x) = 0$ হয় তাদের set. যাই হোক, এই অংকে measure zero set অর্থেই ব্যবহার হয়েছে, আমরা সেই সংজ্ঞাটাই দেব।

DEFINITION: Measure zero set

A subset $A \subseteq \mathbb{R}$ is said to have <u>measure zero</u> if for all $\epsilon > 0$ there is a countable collection of open intervals $\{U_n\}_n$ such that

$$A \subseteq \bigcup_n U_n \text{ and } \sum_n |U_n| \leq \epsilon,$$

where $|U_n|$ denotes the length of the interval U_n.

■

মোটামুটিভাবে আমরা $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$-এর বেলায় যেরকমভাবে এগিয়েছিলাম, সংজ্ঞাটা সেই আদলেই তৈরী--

1. A-টাকে অনেকগুলো টুকরো U_n-এর তলায় চাপা দিয়েছি--

$$A \subseteq \bigcup_n U_n,$$

2. প্রতিটা টুকরো এককেটা open interval,
3. interval-গুলোর মোট বিস্তার নিয়েছি ϵ-এর চেয়ে কম বা সমান।

খালি একটা ছোট্টো জিনিস লক্ষ কর--আমরা কিন্তু এখানে countable সংখ্যক টুকরো ব্যবহার করেছি। Countable মানে কী মনে আছে তো? এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলে। Countably many টুকরো মানে হয় খালি finite সংখ্যক টুকরো--

$$U_1, ..., U_n,$$

অথবা $U_1, U_2, U_3, ...$ এইরকম চলতেই থাকবে।
এবার কয়েকটা উদাহরণ দেখি। তাতে সংজ্ঞাটা হজম করতে সুবিধা হবে।

Example 2: Show that $A = \{1, 2, 3\}$ has measure zero.

SOLUTION: প্রথমে কী দেখাতে হবে সেটা লিখে নিই। বেশ গালভরা জিনিস, দু'লাইনে ভেঙে লিখি--

To show

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists$ countably many open intervals U_n such that $\sum |U_n| \leq \epsilon$ and $A \subseteq \cup_n U_n$.

শুরুটা যথারীতি--

Take any $\epsilon > 0$.

আমাদের কাজ হল A-কে কয়েকটা open interval দিয়ে ঢেকে দেওয়া যাদের মোট বিস্তার ϵ-এর চেয়ে বেশী না হয়ে যায়। এখানে A-তে আছে তো মোটে তিনটে point. তাদের প্রত্যেককে ঘিরে $\frac{\epsilon}{3}$ বিস্তারের একটা করে open interval বসিয়ে দিলেই কাজ চলবে--

Choose

$$U_1 = N\left(1, \tfrac{\epsilon}{6}\right), \quad U_2 = N\left(2, \tfrac{\epsilon}{6}\right), \quad U_3 = N\left(3, \tfrac{\epsilon}{6}\right).$$

Then each U_n is an open interval, $A \subseteq \cup_n U_n$ and

$$\sum_n |U_n| = \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} \leq \epsilon,$$

as required.

এখানে আসলে $\sum_n |U_n| = \epsilon$, কিন্তু $= \epsilon$ হলে $\leq \epsilon$-ও হবে। যেহেতু সংজ্ঞায় $\leq \epsilon$ আছে তাই সেটাই লিখেছি। ■

বলাই বাহুল্য এখানে A-র মধ্যে যে ঠিক তিনটে point-ই ছিল, সেটা গুরুত্বপূর্ণ কিছু নয়। চারটে থাকলে $\frac{\epsilon}{4}$ করে নিতাম, পাঁচটা থাকলে $\frac{\epsilon}{5}$ করে। এইভাবে যে কোনো finite set A-র বেলাতেই একই যুক্তি খাটবে। সুতরাং নীচের অংকটা কষতে কষ্ট হওয়ার কথা নয়।

Exercise 1: Show that any finite subset of $\mathbb{R}$ has measure zero. ■

$\mathbb{R}$-এর finite subset-দের তো সবারই measure zero, কিন্তু infinite subset-রা? অন্ততঃ একটা infinite subset-এর সঙ্গে আমাদের ইতিমধ্যেই মোলাকাত হয়েছে যার measure zero. সেটা হল $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$. এবার আরেকটা উদাহরণ দিই--

Example 3: Show that $\mathbb{N}$ has measure zero.

SOLUTION:

To show

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists$ countably many open intervals U_n such that $\sum |U_n| \leq \epsilon$ and $\mathbb{N} \subseteq \cup_n U_n$.

কী করে পুরো $\mathbb{N}$-কে ছোটো open interval দিয়ে ঢাকা যায় সেটা বোঝা কঠিন নয়, প্রত্যেকটা integer n-কে ঘিরে একটা করে neighbourhood নিলেই চলবে। খালি সমস্যা হল একটাই--$\mathbb{N}$-এর মধ্যে point তো খালি একটা দুটো নয়,

infinitely many. প্রতিটা neighbourhood-কে যতই ছোটো নিই, সবগুলোকে যোগ করলে কি আর ϵ-এর চেয়ে ছোটো রাখা যাবে? উত্তর হল--হ্যাঁ, রাখা যাবে, যদি একটা কৌশল খাটাই। মনে আছে নিশ্চয়ই যে,

$$\tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots = 1.$$

সুতরাং যদি 1-কে ঘিরে neighbourhood-টা নিই $\epsilon \times \frac{1}{2}$ দৈর্ঘ্যের, 2-কে ঘিরে neighbourhood-টা নিই $\epsilon \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$ দৈর্ঘ্যের, এইভাবে neighbourhood-গুলোকে ক্রমশঃই ছোটো করতে থাকি তবে মোট বিস্তার হবে ϵ. ঠিক এই কৌশলটাই আমরা লাগাব--

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\exists U_n$ Choose

$$U_n = N\left(n, \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Then each U_n is an open interval.

Also $\mathbb{N} \subseteq \cup_n U_n$, and

$$\sum_n |U_n| = \epsilon\left[\tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots\right] \leq \epsilon,$$

as required.

এখানেও আসলে $\leq \epsilon$ না লিখে $= \epsilon$ লিখতে পারতাম, কিন্তু সংজ্ঞাতে যেহেতু $\leq \epsilon$ ছিল, তাই সেটাই লিখেছি। ■

এই একই কায়দা যে কোনো enumerable set-এর বেলাতেই খাটবে--

Exercise 2: Prove that a countably infinite set of real numbers is a zero set.[2] **(2014)** ■

এবার একইরকম আরেকটা অংক দিই তোমার নিজে নিজে করার জন্য।

Exercise 3: Show that any subset of $\mathbb{R}$ with only finitely many limit points has measure zero. **(1)** ■

এই অংকটা হয়ে গেলে নীচেরটা চেষ্টা কর। এটা খুব সোজা না কিন্তু।

Exercise 4: $A \subseteq \mathbb{R}$ is such that its derived set A' has measure zero. Is it true that A must have measure zero? ■

নীচের অংকটা অবশ্য বেশ সোজা। এটা করলে measure zero set-দের বিষয়ে একটা ধারণা জন্মাবে, যাতে কোনো set-কে দেখেই আন্দাজ করার চেষ্টা করতে পারো সেটা measure zero কিনা।

Exercise 5: এদের মধ্যে কারা measure zero set?
(1) $\mathbb{Z}$, **(2)** $\left\{\frac{1}{n^2} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$, **(3)** $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, **(4)** $\mathbb{Q}^c \cap [0,1]$.
■

22.2 তিনটে দরকারী তথ্য

Measure zero-ওয়ালা set-দের নিয়ে বিস্তর কথা বলা যায়। কিন্তু আমরা অত কথায় যাব না। খালি তিনটে জিনিস মনে রাখলেই আমাদের চলবে। প্রথম কথা হল যদি $a < b$ হয় তবে (a, b)-র বিস্তার দেখতেই পাচ্ছ যে $b - a > 0$. সুতরাং (a, b) কখনোই measure zero set হতে পারে না।
দ্বিতীয় কথাটা রয়েছে নীচের theorem-টায়-- একটা set-এর যদি measure zero হয়, তবে তার যাবতীয় subset-এরও measure zero হতে বাধ্য। সহজ ভাষায় বললে, ছোটো জিনিসের ভিতরে খালি ছোটো জিনিসই থাকতে পারে।

> THEOREM
>
> If $A \subseteq \mathbb{R}$ has measure zero, and $B \subseteq A$ then B also has measure zero.

Proof:

To show

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists$ countably many open intervals U_n such that $\sum |U_n| \leq \epsilon$ and $B \subseteq \cup_n U_n$.

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because A$ has measure zero,

$\therefore \exists$ countably many open intervals U_n such that $\sum |U_n| \leq \epsilon$ and $A \subseteq \cup_n U_n$.

$\exists U_n$ Choose these U_n's.

Then by construction $\sum |U_n| \leq \epsilon$ and

$$B \subseteq A \subseteq \cup_n U_n,$$

as required.

[Q.E.D]

তৃতীয় কথাটা একটু বেশী ভারী। যদি দুটো measure zero set নাও, তবে তাদের union-ও হবে measure zero. শুধু দুটো বলে নয়, তিনটে চারটে পাঁচটা যতগুলো খুশী finite-সংখ্যক measure zero set-এর union-ও measure zero হবে। এই অব্ধি ব্যাপারটা খুব জটিল কিছু নয়। মজা হল যদি তুমি countably infinite-সংখ্যক measure zero set-এর union নাও, তাহলেও measure zero-ই থাকবে! Finite এবং countably infinite দুটো কেসের কথাই রয়েছে নীচের theorem-টায়। প্রমাণটা দেখতে একটু লম্বা বটে, কিন্তু দুটো কেসই আসলে প্রায় একই যুক্তিতে করা হয়েছে, একটা বুঝলে অন্যটা একেবারেই সহজ।

> THEOREM
>
> If $\{A_k\}_k$ is a countable collection of measure zero sets, then $\cup_k A_k$ also has measure zero.

Proof:

To show

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists$ countably many open intervals U_n such that $\sum |U_n| \leq \epsilon$ and $\cup_k A_k \subseteq \cup_n U_n$.

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

<u>Case I:</u> If the collection $\{A_k\}_k$ is finite:

Let the collection be $\{A_1, ..., A_p\}$.

$\because$ Each A_k has measure zero,

$\therefore \exists$ countably many open intervals $V_{k,m}$'s such that $\sum_m |V_{k,m}| < \frac{\epsilon}{p}$ and $A_k \subseteq \cup_m V_{k,m}$.

$\because$ Finite union of countable collections is again countable,

$\therefore \{V_{1,m}\}_m \cup \cdots \{V_{p,m}\}_m$ is a countable collection of open intervals.

$\exists U_n$ Choose $\{U_n\}_n$ as this collection.

Then each U_n is an open interval, and

$$\sum_n |U_n| = \sum_k \sum_m |V_{k,m}| \leq \epsilon.$$

Also

$$\cup_k A_k \subseteq \bigcup_k \big(\cup_m V_{k,m} \big) = \cup_n U_n,$$

as required.

<u>Case II:</u> If the collection $\{A_k\}_k$ is countably infinite:

Let the collection be $\{A_k \; : \; k \in \mathbb{N}\}$.

$\because$ Each A_k has measure zero,

$\therefore \exists$ countably many open intervals $V_{k,m}$'s such that $\sum_m |V_{k,m}| < \frac{\epsilon}{2^k}$ and $A_k \subseteq \cup_m V_{k,m}$.

$\because$ Countable union of countable collections is again countable,

$\therefore \cup_k \{V_{k,m}\}_m$ is a countable collection of open intervals.

$\exists U_n$ Choose $\{U_n\}_n$ as this collection.

Then each U_n is an open interval, and

$$\sum_n |U_n| = \sum_k \sum_m |V_{k,m}| \leq \epsilon.$$

Also

$$\cup_k A_k \leq \bigcup_k \cup_m V_{k,m} = \cup_n U_n,$$

as required.

[Q.E.D]

DAY 23
একটা উদাহরণ--Cantor set

আমরা দেখলাম যে, $\mathbb{R}$-এর যে কোনো finite বা enumerable subset-এরই measure zero. স্বাভাবিকভাবেই এর পরের প্রশ্ন হল uncountable subset-দের ক্ষেত্রে কী হবে? এইবার উত্তরে কিছু বৈচিত্র আছে, এক কথায় হ্যাঁ বা না কিছু বলা যাবে না--এমন বহু uncountable set আছে যাদের measure zero নয়, আবার এমন uncountable set-ও সম্ভব যার measure zero.

Measure zero নয় এমন uncountable set তো প্রচুর আছে, যেমন $(0, 1)$. দেখাই যাচ্ছে এর দৈর্ঘ্য $1 - 0 = 1 \neq 0$. কিন্তু এমন uncountable set তৈরী করা সহজ নয় যার measure zero. এরকম একটা উদাহরণ হল Cantor set, যেটা এবার আমরা আলোচনা করব। আলোচনাটা অংকের দিক দিয়ে মজাদার লাগতে পারে, কিন্তু এই বইয়ের অন্যত্র এটা কোথাও লাগবে না। সুতরাং যদি ক্লান্ত লাগে তবে আজকের দিনের পড়াটা বাদ দিয়ে পরের দিনের পড়ায় চলে যেতে পারো। গোড়ায় বলি Cantor set জিনিসটা কী। তারপর দেখাব যে এর measure zero. সবশেষে প্রমাণ করব যে এটা একটা uncountable set.

23.1 জিনিসটা কী?

তিনখানা দিলে একখানা রাখে,
বাকী কোথা নাহি জানে,
একখানা দিলে নিমেষ ফেলিতে
তিনখানা করে আনে!

--*পুরাতন ভৃত্য* (রবি ঠাকুর)

প্রথমে আমরা শিখব একটা closed interval $[a, b]$ দিলে সেটা থেকে কী করে দুটো closed interval বার করা যায়। Fig 6 দ্যাখো। ধরো $h = (b - a)/3$. শুরুতে আমরা $[a, b]$-কে সমান দৈর্ঘ্যের তিনটে interval-এ ভাঙব--

$$[a, b] = [a, a + h] \cup (a + h, a + 2h) \cup [a + 2h, b].$$

এবার মাঝখানের open interval-টা মুছে ফেললে পড়ে থাকবে খালি দুটো closed interval

$$[a, a + h] \text{ আর } [a + 2h, b].$$

এই অদ্ভুত কাণ্ডটা করে কী লাভ হল সেটা এক্ষুণি বুঝবে, আপাততঃ এর একটা নাম দিয়ে রাখি--T. অর্থাৎ--

Fig 6

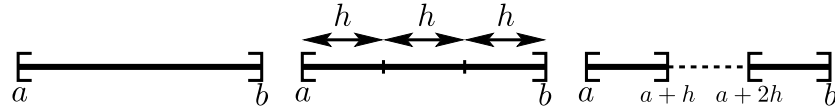
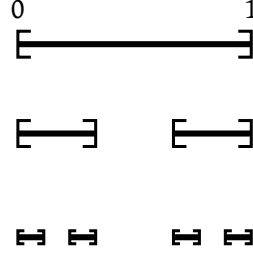



Fig 7

> Let us define an operation T that converts a single closed interval into a collection of two closed intervals as
>
> $$T([a,b]) = \{[a,a+h], \quad [a+2h,b]\},$$
>
> where $h=(b-a)/3$.

এবার আমরা এই কাজটা বার বার করব। একটা উদাহরণ দেখলে সুবিধা হবে। ধরো শুরু করলাম $[0,1]$ নিয়ে। Fig 7-এর দিকে নজর রাখো। প্রথমবার T লাগানোয় পাব দুটো interval–

$$T\{[0,1]\} = \left\{\left[0,\tfrac{1}{3}\right], \left[\tfrac{2}{3},1\right]\right\}.$$

এবার এই দুজনের উপরেই যদি ফের T লাগাই তবে পাবো মোট চারটে interval–

$$T\left\{\left[0,\tfrac{1}{3}\right], \left[\tfrac{2}{3},1\right]\right\} = \left\{\left[0,\tfrac{1}{9}\right], \left[\tfrac{2}{9},\tfrac{3}{9}\right], \left[\tfrac{6}{9},\tfrac{7}{9}\right], \left[\tfrac{8}{9},\tfrac{9}{9}\right]\right\}.$$

লক্ষ কর প্রতি ধাপে আমরা যেটা পাচ্ছি সেটা হল একেকটা collection of closed intervals. শুরুতে আমাদের collection-এ খালি একটাই closed interval ছিল--$[0,1]$. এটা যেন বংশের আদি পুরুষ। পরের প্রজন্মে দুটো ছানা হল--$\left[0,\frac{1}{3}\right]$ আর $\left[\frac{2}{3},1\right]$. তার পরের প্রজন্মে তাদের প্রত্যেকের আবার দুটো করে ছানা হল, ইত্যাদি। আমরা n-th প্রজন্মের collection-টার নাম দেব $\mathcal{D}_n, \quad n=0,1,2,...$
তার মানে $\mathcal{D}_0 = \{[0,1]\}$, তার পর $\mathcal{D}_1 = \left\{\left[0,\frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3},1\right]\right\}$, ইত্যাদি। অংকের ভাষায় লিখব এইভাবে--

> Let $\mathcal{D}_0 = \{[0,1]\}$, and
>
> $$\mathcal{D}_n = T(\mathcal{D}_{n-1}), \quad n=1,2,3,...$$

এইবার আমরা প্রতিটি $\mathcal{D}_n$-এর মধ্যে যে closed interval-গুলো আছে তাদের union নেব।

> $$C_n = \cup_{I\in\mathcal{D}_n} I.$$

লক্ষ কর যে C_n-গুলো একটার ভিতরে একটা রয়েছে--

> $$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots.$$

C_n-গুলো ছোটো হতে হতে কোনদিকে এগোচ্ছে? উত্তর হল নীচের set-টা--

Let

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

This called the **Cantor set**.

এত খেটেখুটে এই set-টা বানিয়ে আমাদের লাভ কী হল? আমরা এমন একটা set পেলাম যেটা একাধারে measure zero এবং uncountable.

23.2 Measure 0

Example 4: Show that Cantor set has measure zero.

SOLUTION: প্রথমে বুঝে রাখি যে Cantor set কেন খামোখা measure zero হতে যাবে। এখানে $C_0 = [0,1]$-এর বিস্তার কত? উত্তর হল 1. আমরা এর মাঝের এক তৃতীয়াংশ উড়িয়ে দিয়ে পেয়েছি C_1, তাই C_1-এর বিস্তার হল $\frac{2}{3}$. এর আবার এক তৃতীয়াংশ মুছে ফেললে পড়ে থাকে C_2, তাই ওর বিস্তার হবে $\left(\frac{2}{3}\right)^2$.এইভাবে চলতে চলতে C_n-এর বিস্তার হবে $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. দেখতেই পাচ্ছ যে বিস্তারটা ক্রমশঃই কমতে কমতে শূন্যর দিকে যাচ্ছে। যেহেতু Cantor set-টা সব C_n-এরই subset, তাই ওর বিস্তার কোনো C_n-এর বিস্তারের চেয়েই বেশী হতে পারে না। তাই Cantor set-এর measure নিশ্চয়ই 0 হবে। এই কথাটাই নীচে লিখেছি একটু কায়দা করে, বিস্তার ব্যাপারটাকে বিভিন্ন interval-এর দৈর্ঘ্যের যোগফল হিসেবে লিখে--

Notice that

$$\sum_{I\in\mathcal{D}_n} |I| = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

এইবার তবে আসল প্রমাণ শুরু করি--

To show

$\forall\epsilon > 0 \quad \exists$ countably many open intervals U_n such that $\sum |U_n| \le \epsilon$ and $C \subseteq \cup_n U_n$.

যে কোনো একটা $\epsilon > 0$ নিয়ে শুরু করি--

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

যেহেতু $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ তাই এমন n পাব যাতে $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \epsilon$ হয়। তার মানে C_n-এর বিস্তার হল ϵ-এর চেয়ে কম, আর $C \subseteq C_n$ তাই C-এর বিস্তারও ϵ-এর চেয়ে কম হতে বাধ্য! ঠিক কথা, কিন্তু একটা ছোট্টো খোঁচা থেকে যায়। Measure zero-র সংজ্ঞা অনুযায়ী C-কে অনেকগুলো open interval দিয়ে ঢেকে দেওয়ার কথা, যাদের মোট দৈর্ঘ্য $< \epsilon$. এখানে C_n কিন্তু যে সব interval দিয়ে তৈরী তারা সবাই closed. কিন্তু এতে তেমন অসুবিধা কিছু নেই, আমরা প্রতিটা closed interval-কে সামান্য একটুখানি বড় open interval-এর পেটে ঢুকিয়ে দেব (Fig 8), যেমন ধরো $[a,b]$-কে ঢুকিয়ে দেবো $(a-0.0001, b+0.0001)$-এর মধ্যে। এর ফলে মোট দৈর্ঘ্য খানিকটা বেড়ে যাবে বটে, কিন্তু সেটাকে ϵ-এর মধ্যে রাখতে পারলেই হল। এই কাজটাই এবার আমরা করব।

$\because \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0,$

$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^N < \frac{\epsilon}{2}.$

ছিল একটা closed interval,...

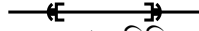
...দুদিকে দুটো চিলতি জুড়ে দিতেই...

...হয়ে গেল দিব্যি একটা গোলগাল open interval !

Fig 8

Then $\mathcal{D}_N$ is a collection of $M = 2^N$ closed intervals

$$I_1, ..., I_M.$$

এবার এদের প্রত্যেককে আমরা এক চিলতি করে মোটা করে দেব, বাকী $\frac{\epsilon}{2}$-টা ব্যবহার করে। যেহেতু মোট M-খানা interval আছে তাই প্রত্যেকের ভাগে পড়বে $\frac{\epsilon}{2M}$. এর অর্ধেক লাগাব বাঁদিকে আর বাকী অর্ধেক লাগাব ডানদিকে।

Let $I_n = [a_n, b_n]$.
Let $\delta = \frac{\epsilon}{2M} > 0$.
$\exists U_n$ Choose $U_n = \left(a_n - \frac{\delta}{2}, b_n + \frac{\delta}{2}\right)$.

Then $|U_n| = |I_n| + \delta = |I_n| + \frac{\epsilon}{2M}$.

$$\therefore \sum_{n=1}^{M} |U_n| = \sum_{n=1}^{M} |I_n| + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

as required.

■

> ছিল একটা ডিম, হয়ে গেল দিব্যি একটা প্যাঁক্‌পেঁকে হাঁস। এ তো হামেশাই হচ্ছে।
>
> --হ য ব র ল (সুকুমার রায়)

আমরা যখন measure zero-ও সংজ্ঞা লিখেছিলাম, তখন U_i-গুলোকে নিয়েছিলাম open interval. এক্ষুণি যেভাবে closed interval-এর দুপাশে এক চিলতি করে বাড়িয়ে দিয়ে open interval বানিয়ে নিলাম, সেই কায়দাটা ব্যবহার করলে দেখানো যায় যে U_i-গুলোকে open না হলেও measure zero-র সংজ্ঞাটা আসলে একই থাকত, যে কোনো রকম interval নিলেই চলত। এটাই নীচের অংকটাতে বলা হয়েছে।

Exercise 6: Let $A \subseteq \mathbb{R}$ be a set such that given any $\epsilon > 0$ there are countably many intervals (open or closed or semiopen) I_n for which

$$A \subseteq \cup_n I_n \text{ and } \sum |I_n| < \epsilon.$$

Show that A must have measure zero. ■

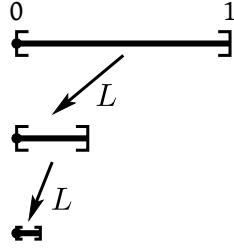
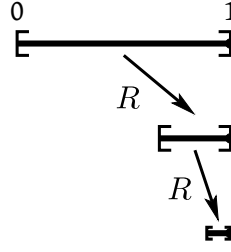
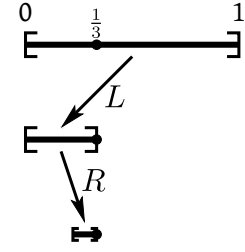



Fig 9 Fig 10 Fig 11

23.3 Uncountable

এবার আমরা দেখাব যে Cantor set হল uncountable. প্রমাণটা খুব লম্বা কিছু নয়, খালি এই বইয়ের প্রথম খণ্ড থেকে একটা কথা মনে করে নিতে হবে। যদি তোমাকে কিছু closed, nested interval দেওয়া হয়--

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots$$

যাতে $b_n - a_n \to 0$ হয় তবে

$$\bigcap_n [a_n, b_n]$$

হয় একটা singleton set, মানে $[a_n, b_n]$-গুলো ছোটো হতে হতে ঠিক একটা point-এ পরিণত হয়। এর একটা নাম nested interval theorem, আরেকটা নাম Cantor intersection theorem. এই theorem-টা আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে প্রমাণ করেছিলাম, এবার কাজে লাগবে। কী করে লাগবে বলি-- আমরা শুরু করেছিলাম $[0,1]$ নিয়ে। তারপর সেটাকে ভেঙে পেয়েছিলাম $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ এবং $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. এদের মধ্যে বাঁদিকেরটা লক্ষ কর--$\left[0, \frac{1}{3}\right]$. এটাকে আবার ভেঙে যে দুটো closed interval পেয়েছিলাম তার মধ্যে বাঁদিকেরটা ছিল $\left[0, \frac{1}{9}\right]$. সুতরাং যদি প্রতি ধাপেই বাঁদিকের interval-গুলোকে নিই তবে একটা nested closed interval-এর sequence পাব--

$$[0,1] \supseteq \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \supseteq \left[0, \tfrac{1}{9}\right] \supseteq \cdots.$$

এদের দৈর্ঘ্য কমতে কমতে শূন্যর দিকে যাচ্ছে, সুতরাং এদের intersection-এ ঠিক একটাই point থাকবে। একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে এক্ষেত্রে সেই point-টা হল 0. Fig 9 দ্যাখো। এখানে আমরা সবসময়েই বাঁদিকের interval-গুলো নিয়েছিলাম। যদি প্রতিধাপেই ডানদিকেরগুলো নিতাম (Fig 10) তাহলেও আরেকটা nested closed interval-এর sequence পেতাম--

$$[0,1] \supseteq \left[\tfrac{2}{3}, 1\right] \supseteq \left[\tfrac{8}{9}, 1\right] \supseteq \cdots.$$

এদের intersection হত $\{1\}$. সবসময়েই বাঁদিক সব সময়েই ডানদিক নিতে হবে এমন কথা নেই, ডান বাঁ মিশিয়েও নেওয়া যায়, যেমন যদি Fig 11-এর মত $LRRR\cdots$ নিতাম (এখানে L মানে বাঁ, আর R মানে ডান), তবে পেতাম

$$[0,1] \supseteq \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \supseteq \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}\right] \supseteq \cdots,$$

যার intersection হত $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে Cantor set-এর যেকোনো point-ই এইভাবে পাওয়া যায়। যেমন $\frac{1}{9}$ পেতে হলে তোমাকে $LLRRR\cdots$ নিতে হবে। অপরপক্ষে যদি তোমাকে L এবং R দিয়ে তৈরী যে কোনো একটা sequence দিই, তবে তাদের থেকে তুমি একটা nested closed interval-এর sequence পাবে যার intersection-এর point-টা Cantor set-এর সদস্য হবে। এই কথাটাই আমরা এবার ব্যবহার করব। তার আগে নীচের অংকটা করে একটু হাত পাকিয়ে নাও যে Cantor set-এর সংখ্যাদের সঙ্গে L এবং R-এর sequence-দের সম্পর্কটা কি রকম।

Exercise 7: নীচের সংখ্যাগুলোর মধ্যে কারা Cantor set-এর সদস্য বল? এদের ক্ষেত্রে L এবং R-এর sequence-টা বার কর।

(1) $\frac{2}{3}$, **(2)** $\frac{1}{2}$, **(3)** $\frac{1}{4}$, **(4)** $\frac{8}{9}$, **(5)** $\frac{7}{9}$.

HINT:
একটা সংখ্যার জন্য L এবং R-এর sequence কী হবে বুঝতে না পারলে এইভাবে এগোও-- প্রথমে Cantor set-টা $[0,1]$ থেকে শুরু করে ধাপে ধাপে বানাতে থাকো। প্রতিটা ধাপে খেয়াল কর যে সংখ্যাটা কোন দিকে পড়ছে, বাঁদিকে না ডানদিকে। কয়েক ধাপ করলেই একটা প্যাটার্ণ দেখতে পাবে। ■

এই অংকটা কষে যেন ভেবে নিও না যে যেকোনো L এবং R-এর sequence দেওয়া থাকলেই তার জন্য সংখ্যাটা দিব্যি fraction-এর আকারে সহজে লিখে দেওয়া যায়। সেটা মোটেই যায় না, সহজে লেখা তো দূরের কথা Cantor set-এর অনেক সদস্য rational পর্যন্ত নয়! যেমন ধরো L এবং R-এর এই sequence-টা--

$$L\underbrace{RR}_{2}\underbrace{L\cdots L}_{3}\underbrace{R\cdots R}_{4}\cdots,$$

অর্থাৎ প্রথমে একটা L, তারপর দুটো R, তারপর তিনটে L, তারপর চারটে, পাঁচটা, ছয়টা, এইভাবে বেড়েই চলেছে। দেখানো যায় যে এটা Cantor set -এর যে point-এর সঙ্গে জড়িত, সেটা rational তো নয়ই, এমন কি ভদ্রভাবে লেখা পর্যন্ত যায় না! Cantor set-এর পেটে এরকম বিস্তর আজব চিড়িয়া আছে!
কিন্তু চিড়িয়ারা যত আজবই হোক এই কথাটা ঠিক যে সবার জন্যই একটা (এবং ঠিক একটাই) L এবং R-এর sequence আছে, এবং বিপরীতপক্ষে এরকম যে কোনো sequence থেকেই Cantor set-এর ঠিক একজন সদস্য পাওয়া যায়। এই কথাটুকু মাথায় রাখলেই বুঝতে পারবে কেন Cantor set-টা uncountable হচ্ছে। নীচের অংকে আমরা এটাই দেখাব।

Example 5: Show that the Cantor set is uncountable.

SOLUTION: এতক্ষণ যেটা বললাম সেটা লিখে শুরু করি। ব্যাপারটা বোঝা যতটা সহজ অংকের ভাষায় লেখাটা ততটা নয়। আগে কিছু notation ঠিক করে নিই।

> Let T be the operation that splits a closed bounded interval $[a,b]$ into a collection of two closed bounded subintervals
>
> $$\left\{\left[a,a+\frac{h}{3}\right],\left[a+\frac{2h}{3},b\right]\right\},$$
>
> where $h=(b-a)/3$.
> We shall call $\left[a,a+\frac{h}{3}\right]$ the left child and $\left[a+\frac{2h}{3},b\right]$ the right child of $[a,b]$.
> Starting with $\mathcal{D}_0=\{[0,1]\}$ we repeatedly apply this operation to define
>
> $$\mathcal{D}_n=T(\mathcal{D}_{n-1}),\quad n\in\mathbb{N}.$$
>
> Let
>
> $$C_n=\cup_{I\in\mathcal{D}_n}I.$$
>
> Then $C=\cap_n C_n$ is the Cantor set.

এবার আমরা C-এর সঙ্গে যাবতীয় L এবং R-এর sequence-এর set-এর একটা bijection দেখাব। আগে এই set-টার একটা ভদ্রগোছের নাম দিয়ে নিই--

> Let S be the set of all infinite sequences of the symbols L and R.

এবার C থেকে S-এ একটা function তৈরী করব। পরে দেখাব যে function-টা আসলে one-one এবং onto. এবার কী করে এগোচ্ছি সেটা সাবধানে লক্ষ কর।

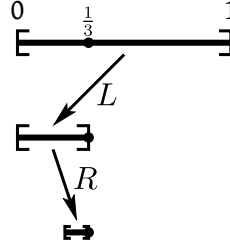



Fig 12

> For any $x \in C$, let I_n be the interval in $\mathcal{D}_n$ containing x.

একটা উদাহরণ নিয়ে বোঝা যাক। ধরো $x = \frac{1}{3}$ (Fig 12)। দেখি এটা Cantor set তৈরীর প্রতি ধাপে কোথায় কোথায় পড়েছিল। প্রথমে তো অবশ্যই ছিল $[0, 1]$-এ। তাই $I_0 = [0, 1]$. তার পরের ধাপে ছিল $\left[0, \frac{1}{3}\right]$-এ, তাই $I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$. তার পরের ধাপে ছিল $I_2 = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$-এ।
আমাদের আসলে এই I_n-গুলো নিয়ে মাথা ব্যথা নেই, আমাদের চিন্তা হল বাঁদিক আর ডানদিক নিয়ে। এবার আমরা I_n-দের ব্যবহার করে সেইটা ঠিক করব--

> Define a sequence $\{a_n\}_n$ of the symbols L and R as follows.
>
> $$a_n = \begin{cases} L & \text{if } I_n \text{ is left child of } I_{n-1} \\ R & \text{otherwise} \end{cases}$$
>
> This defines a function from C to S.

আবার উদাহরণ দিয়ে বুঝে নিই। Sequence-এর গোড়ায় কী থাকবে--L না R? সেটা ঠিক করার জন্য আমরা তাকাব I_1-এর দিকে, এবং দেখব যে সেটা I_0-এর বাঁদিকে না ডানদিকে পড়েছে। $\frac{1}{3}$-এর বেলায় $I_0 = [0, 1]$, আর $I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$. তাই I_1 রয়েছে I_0-এর বাঁদিকে। সুতরাং আমাদের sequence-এর গোড়ায় থাকবে L. দ্বিতীয় স্থানে কী থাকবে? তার জন্য দেখি I_2-টা I_1-এর কোন অংশে আছে। এখানে $I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ আর $I_2 = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, যেটা I_1-এর ডানদিকে পড়েছে। তাই sequence-এর দ্বিতীয় স্থানে থাকবে R. এইভাবে এগোতে এগোতে পুরো sequence-টা পাওয়া যাবে।
এইবার দেখাব যে function-টা একটা bijection, মানে যে কোনো একটা sequence দিলেই তা থেকে ঠিক একটাই $x \in C$ পাওয়া যাবে। এই কাজে Cantor intersection theorem-টা ব্যবহার করব।

> Any such sequence determines a nested sequence of closed and bounded intervals with lengths decreasing to 0. Hence, by the Cantor intersection theorem, the intersection is a singleton set consisting of a point $x \in C$.

তার মানে একটা $x \in C$ দিলেই যেমন একটা (এবং একটাই) sequence পাওয়া যাচ্ছে, তেমনি একটা sequence দিলেই একটা unique সংখ্যা $x \in C$ পাওয়া যাচ্ছে।

> Thus we have a bijection between C and S.

তার মানে C আর S-এর সাইজ (যাকে অংকের গালভরা ভাষায় বলে cardinality) সমান। সুতরাং S-কে uncountable দেখাতে পারলেই হবে। কিন্তু C-কে সরাসরি uncountable দেখানোর চেয়ে S-কে uncountable দেখানো সহজতর, কারণ C set-টা বেশ বিদ্‌ঘুটে, কল্পনা করতেও বেশ কষ্ট হয়। অপরপক্ষে S বেশ ভদ্রসভ্য জিনিস, খালি L এবং R- দিয়ে তৈরী যাবতীয় sequence-এর set.

> Hence they have the same cardinality. So enough to show that S is uncountable.

এবার আমরা proof by contradiction লাগাব--ধরে নেব যে S একটা countable set, এবং সেখান থেকে একটা contradiction-এর পৌঁছব। এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে আমরা ঠিক এইভাবেই $[0,1]$-কে uncountable দেখিয়েছিলাম।

> Let, if possible, S be countable. Let a complete enumeration of S be $\{s_1, s_2, s_3, ...\}$. For $n \in \mathbb{N}$ let s_n be the sequence
>
> $$A_{n1}, A_{n2}, A_{n3}, ...,$$
>
> where each A_{nm} is either an L or an R.

এত সব দেখে যেন ঘাবড়ে যেও না। যদি S সত্যিই countable হয় তবে তার যাবতীয় element-কে $s_1, s_2, s_3, ...$ এইভাবে একটা লম্বা তালিকা করে লিখে ফেলা যাবে। এখানে s_1 নিজেই L এবং R-এর তৈরী একটা sequence, কারণ S-এর সব element-ই এরকম sequence. এই sequence-টাকে লিখেছি এইভাবে

$$s_1 = A_{11}A_{12}A_{13}\cdots.$$

একইভাবে s_2-ও একটা sequence, একে লিখেছি

$$s_2 = A_{21}A_{22}A_{23}\cdots.$$

এইবার একটা নতুন sequence বানাব। প্রথমে একটা উদাহরণ দ্যাখো (Fig 13)। এখানে diagonal বরাবর L বা R-গুলোকে underline করে দেখিয়েছি। Fig 14-তে এই diagonal বরাবর sequence-টাকে আলাদা করে দেখিয়েছি। এবার এর প্রতিটা চিহ্নকে উল্টে দিলে (মানে L-এর জায়গায় R, এবং R-এর জায়গায় L বসিয়ে দিলে) পাব Fig 15-এর sequence-টা। এটাই আমাদের নতুন sequence.

> Define a new sequence $b \equiv \{b_n\}_n$
>
> $$b_n = \begin{cases} L & \text{if } A_{nn} = R \\ R & \text{if } A_{nn} = L \end{cases}$$

এইবার contradiction বাঁধাব এইভাবে--দেখাব যে এই নতুন sequence-টা S-এ আছেও বটে, আবার নেইও বটে! আছে কারণ--

Fig 13

$s_1 = \underline{R}LRLLL...$
$s_2 = L\underline{L}RLLR...$
$s_3 = RR\underline{R}RLL...$
$s_4 = LRL\underline{R}LR...$
$s_5 = RLLL\underline{L}R...$
⋮

Fig 14

$\underline{R}\,\underline{L}\,\underline{R}\,\underline{R}\,\underline{L}...$

Fig 15

$\underline{L}\,\underline{R}\,\underline{L}\,\underline{L}\,\underline{R}...$

> Then $b \in S$, because b is an infinite sequence of L's and R's.

কিন্তু নতুন sequence-টা যদি S-এর মধ্যে থাকে তবে সেটা কোনো একটা s_n-এর সঙ্গে সমান হতে বাধ্য। কিন্তু সেটা তো হতে পারে না, কারণ নতুন sequence-টা s_1 হতে পারে না যেহেতু s_1-এর প্রথম স্থানটাকে উল্টে b-এর প্রথম স্থান পেয়েছিলাম। একইভাবে $b = s_2$ হতে পারে না, কারণ দ্বিতীয় স্থানে ওরা পরস্পরের উল্টো। একই রকম কথা যে কোনো s_n-এর জন্যই খাটে--

> But $\forall n \in \mathbb{N} \quad b \neq s_n, \because b_n \neq A_{nn} (\Rightarrow\Leftarrow)$.

■

DAY 24
Riemann-Lebesgue theorem (part 1)

24.1 কী?

আমরা আগেই দেখেছি যে $f(x)$ যদি $[a, b]$-র উপরে একটা bounded function হয়, তবে সেটা $[a, b]$-র উপরে Riemann integrable হবে কিনা, সেটা তার set of discontinuity points-এর উপর নির্ভর করে। যদি এই set-টা "ছোটো" হয়, তবে Riemann integrable হবার বেশী আশা। এই ব্যাপারটারই গাণিতিক রূপ হল Riemann-Lebesgue theorem. এর বক্তব্য হল--যদি discontinuity point-এর set-টার measure zero হয়, তবে $f(x)$-টা $[a, b]$-র উপরে Riemann integrable হবে, এবং উল্টোদিকটাও ঠিক--f যদি $[a, b]$-র উপরে Riemann integrable হয়, তবে তার discontinuity point-গুলোর set-টার অবশ্যই measure zero হতে বাধ্য! অর্থাৎ একই theorem-এর মধ্যে necessary এবং sufficient দুটো দিকই আছে। জবরদস্ত জিনিস!

> **Riemann-Lebesgue theorem**
>
> A bounded function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is Riemann integrable on $[a, b]$ if and only if the set of discontinuity points of f in $[a, b]$ has measure 0.

জিনিসটা দেখতে ছোটো কিন্তু তা বলে প্রমাণটা মোটেই ছোটো নয়। প্রমাণের প্রসঙ্গে পরে আসছি, প্রথমে দেখি এটা দিয়ে কী উপকার হয়।

24.2 কী কাজে লাগে?

আগে আমরা প্রমাণ করেছিলাম যে f, g দুজনেই Riemann integrable হলে $f + g, f - g, fg$ এবং f/g (যদি g-টা bounded away from 0 হয়)--এরা সবাই Riemann integrable. প্রমাণগুলো মোটামুটি ছকে বাঁধা হলেও খুব সংক্ষিপ্ত ছিল না। সেগুলো সবই Riemann-Lebesgue theorem ব্যবহার করলে অতি সংক্ষেপে সেরে ফেলা যাবে! তার পর একটা জিনিস প্রমাণ করেছিলাম যে f যদি bounded, continuous আর g যদি Riemann integrable হয় এবং f-এর পেটে g-কে ঢোকানো যায় তবে $f(g(x))$-ও Riemann integrable হবে। সেই প্রমাণটা বেশ কষ্টকর ছিল। সেইটাও এখন অত্যন্ত সহজে হয়ে যাবে! Riemann-Lebesgue theorem-এর আরও নানা গুণপনা আছে। কিন্তু আগে এই সংক্ষিপ্ত প্রমাণগুলো কী করে হয় দেখিয়ে নিই।

Example 6: দেওয়া আছে যে $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ দুজনেই $[a, b]$-র উপরে Riemann integrable. দেখাও যে

$f+g, f-g$ এবং fg, এরা সবাই $[a,b]$-র উপরে Riemann integrable হতে বাধ্য।
SOLUTION: আমরা এখানে set of discontinuity points নিয়ে কাজ করব। দেখাব যে, $f+g$, $f-g$ এবং fg-র প্রত্যেকের ক্ষেত্রেই set of discontinuity points হল এককেটা measure zero set. ব্যস্, এর পর Riemann-Lebesgue theorem লাগালেই হবে।

> Let D_1, D_2 be the sets of discontinuity points of f, g, respectively, in $[a,b]$.
> We know that if f,g both are continuous at some point, then $f+g, f-g$ and fg are also continuous there.

তার মানে কোনো point-এ যদি $f+g$ বা $f-g$ বা fg-কে discontinuous হতে দ্যাখো, তবে নিশ্চিত হয়ে বলা যায় যে f আর g-এর মধ্যে অন্ততঃ একজন ওই point-এ discontinuous হবেই। অর্থাৎ--

> So the sets of discontinuity points of $f+g, f-g$ and fg are all subsets of $D_1 \cup D_2$.

এইটাই ছিল মোক্ষম ধাপ। ভালো করে ভেবে দ্যাখো বুঝলে কিনা।

> $\because f,g$ are Riemann integrable on $[a,b]$,
> $\therefore D_1, D_2$ has measure 0.
> $\therefore D_1 \cup D_2$ has measure 0, since finite union of measure 0 sets have measure 0.
> $\therefore$ The sets of discontinuity points of $f+g, f-g$ and fg all have measure 0.

প্রায় মেরে এনেছি, কিন্তু এখনই Riemann-Lebesgue theorem লাগানো যাবে না, কারণ ওটা খালি bounded function-দের ক্ষেত্রেই খাটে। তাই bounded দেখিয়ে নিতে হবে--

> Also $\because f,g$ are bounded ($\because$ Riemann integrable)
> $\therefore f+g, f-g, fg$ are also bounded.
> $\therefore$ By Riemann-Lebesgue theorem, these functions are Riemann integrable on $[a,b]$, as required.

■

Exercise 8: একইভাবে দেখাও যে $f(x)$ আর $g(x)$ যদি দুজনেই $[a,b]$-র উপরে Riemann integrable হয় এবং $g(x)$ হয় bounded away from 0, অর্থাৎ

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad |g(x)| > \delta,$$

তবে $f(x)/g(x)$-ও $[a,b]$-র উপরে Riemann integrable হবেই। ■

এবার composition-এর অংকটা করি। এই জিনিসটাই দ্বিতীয় অধ্যায়ে করার সময়ে জিভ বেরিয়ে গেছিল।

Example 7: ধরো $g(x)$ হল $[a, b]$-র উপরে Riemann integrable, আর f একটা bounded continuous function যাতে $f(g(x))$-টা well-defined. (অর্থাৎ $g([a, b])$ হল f-এর domain-এর subset). দেখাও যে $f(g(x))$ অবশ্যই $[a, b]$-র উপরে Riemann integrable হবে।
SOLUTION:

> Let D be the set of discontinuity points of g in $[a, b]$.
> We know that if $g(x)$ is continuous at some $x = c$, and $f(y)$ is continuous at $g(c)$, then $f(g(x))$ is also continuous at $x = c$.
> Here f is a continuous function.
> $\therefore$ If $g(x)$ is continuous at some point, then $f(g(x))$ is also continuous there.

এই কথাটাকেই ঘুরিয়ে বললে--

> So the set of discontinuity points of $f(g(x))$ is a subset of D.
> $\because g$ is Riemann integrable on $[a, b]$,
> $\therefore D$ has measure 0.
> $\therefore$ The set of discontinuity points of $f(g(x))$ has measure 0, since subsets of measure 0 sets have measure 0.

ব্যস্, এবার খালি bounded দেখাতে পারলেই Riemann-Lebesgue theorem লাগাতে পারব--

> Also $\because f$ is bounded on $[a, b]$,
> $\therefore f(g(x))$ is bounded on $[a, b]$.
> $\therefore$ By Riemann-Lebesgue theorem $f(g(x))$ is Riemann integrable on $[a, b]$, as required.

■

এতক্ষণ আমরা পূর্বপরিচিত বিভিন্ন জিনিসের সহজ প্রমাণ দেখলাম। এবার Riemann-Lebesgue theorem দিয়ে একটা নতুন জিনিস প্রমাণ করব। ধরো $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ একটা Riemann integrable function. যদি বলা থাকে যে

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0$$

তবে আমরা জানি যে $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ হবে।
কিন্তু যদি বলে দেওয়া থাকে যে

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) > 0,$$

তবে কি জোর দিয়ে বলতে পারি যে $\int_a^b f(x)dx > 0$ হবেই? উত্তর হল--হ্যাঁ। অদ্ভুত ব্যাপার হল এটা দেখানো মোটেই খুব সহজ নয়! এবার Riemann-Lebesgue theorem দিয়ে এই প্রমাণটাই করব।

Example 8: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a <u>strictly</u> positive Riemann integrable function. Show that

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

SOLUTION:

Step 1: Shall show that

$$\exists c < d \in [a,b] \quad \inf\{f(x) \ : \ x \in [c,d]\} > 0.$$

Let, if possible, this be false.
Then $\because f > 0$,

$$\forall c < d \in [a,b] \quad \inf\{f(x) \ : \ x \in [c,d]\} = 0.$$

Shall show that f is discontinuous everywhere in $[a,b]$.
By sequential criterion, enough to show that

$$\forall p \in [a,b] \quad \exists \{p_n\}_n \subseteq [a,b] \quad p_n \to p \text{ and } f(p_n) \not\to f(p).$$

$\forall p$ Take any $p \in [a,b]$.
Then

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \inf\{f(x) \ : \ x \in \left[p - \tfrac{1}{n}, p + \tfrac{1}{n}\right] \cap [a,b]\} = 0.$$

$$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p_n \in \left[p - \tfrac{1}{n}, p + \tfrac{1}{n}\right] \cap [a,b] \quad f(p_n) < \tfrac{1}{n}.$$

$\exists\{p_n\}_n$ Choose this $\{p_n\}_n \subseteq [a,b]$.

Then $|p_n - p| \leq \frac{1}{n} \to 0$.
$\therefore p_n \to p$.
Also $\because 0 < f(p_n) < \frac{1}{n} \to 0$, $\therefore f(p_n) \to 0$.
$\because f(p) > 0 \therefore f(p_n) \not\to f(p)$, as required.
But then the set of discontinuity points of f in $[a,b]$ is $[a,b]$ itself, which does not have measure 0, $(\because b - a > 0)$.
$\therefore f$ cannot be Riemann integrable on $[a,b] (\Rightarrow\Leftarrow)$.

Step 2: Let $c < d \in [a,b]$ be as obtained in Step 1 above, and let $m = \inf\{f(x) \ : \ x \in [c,d]\} > 0$.
Then

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\geq \int_c^d f(x)dx \quad [\because f \geq 0] \\ &\geq \int_c^d m dx \quad [\because \forall x \in [c,d] \quad f(x) \geq m] \\ &= m \cdot (d-c) > 0 \quad [\because c < d \text{ and } m > 0], \end{aligned}$$

> as required.

■

Example 9: Verify the statement: If a function $f : [a, b] \to [c, d]$ is continuous only at rational points in $[a, b]$ then

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

[2] **(2013.1biv)**

SOLUTION: এই প্রশ্নটা হাস্যকর, কারণ ভুল হয়েও ভুল নয়। এমন কোনো function সম্ভবই নয় যেটা কেবলমাত্র rational সংখ্যাতেই continuous. (কেন সম্ভব নয়, সেটা বোঝানো এই বইয়ের সাধ্যের বাইরে)। কিন্তু তাও অংকটাকে ভুল বলা যাচ্ছে না, কারণ বলেছে যে যদি এরকম function থাকে তবে তার upper আর lower integral সমান। সত্যিই এরকম function আছে সেই দাবীটা কিন্তু করেনি। তাই যে statement-টা দিয়েছে সেটা true, যাকে বলে vacuously true!

যাই হোক যিনিই প্রশ্নটা দিয়ে থাকুন তিনি এত vacuously true ইত্যাদি ভেবে দিয়েছিলেন বলে মনে হয়না। সম্ভবতঃ তিনি বলতে চেয়েছিলেন "discontinuous only at rational points." সেরকম function বিস্তর আছে। এবার অংকটা খুবই সহজ--

> The set of discontinuities is a subset of $\mathbb{Q}$, which is countable, and hence has measure 0.
>
> So the set of discontinuities has measure 0.
>
> So by Riemann-Lebesgue theorem, f must be Riemann integrable over $[a, b]$, ie,
>
> $$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$
>
> as required.

■

Example 10: Let f be an integrable function defined on $[a, b]$ taking only nonnegative values. Then $\int_a^b f(x)dx = 0$ if and only if the set $\{x \in [a, b] \ : \ f(x) > 0\}$ has measure zero.

SOLUTION:

> Only if part: Let, for $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{x \in [a, b] \ : \ f(x) > \frac{1}{n}\}$.
>
> Shall show that $\forall n \in \mathbb{N} \ A_n$ has measure 0. Since $\int_a^b f(x)dx = 0$, hence
>
> $$\forall \delta > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([a, b]) \quad U(P, f) < \delta. \qquad (*)$$
>
> Take any $\epsilon > 0$. Then taking $\delta = \epsilon/n$ in (*), we get $P \in \mathbb{P}([a, b])$ such that $U(P, f) < \epsilon/n$.
>
> Let the subintervals in P that intersect A_n be $I_1, ..., I_k$.

> Then $A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^k I_j$.
> Now $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^k |I_j| \leq U(P,f) < \frac{\epsilon}{n}$.
> $\therefore \sum_{j=1}^k |I_j| < \epsilon$.
> So A_n has measure 0.
> Now $\{x \in [a,b] \ : \ f(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
> Since countable union of measure 0 sets is again measure 0, so the result follows.
> If part: Since f is integrable on $[a,b]$, so f is also bounded on $[a,b]$.
> Let $B > 0$ be such a bound.
> Since $A = \{x \in [a,b] \ : \ f(x) > 0\}$ has measure 0,
> so there are intervals $I_1, ..., I_k$ such that $A \subseteq \bigcup_{j=1}^k I_j$ and $\sum |I_j| < \frac{\epsilon}{B}$.
> Let $P \in \mathbb{P}([a,b])$ be defined by the end points of $I_1, ..., I_k$ inside $[a,b]$.
> Then $U(P,f) \leq \sum_{j=1}^k |I_j| \times B < \frac{\epsilon}{B} \times B = \epsilon$, as required.

■

Example 11: If f is integrable over $[a,b]$, show that $|f|$ is integrable over $[a,b]$, and

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

When does the equality hold?[3+1] **(2014.5a)**

SOLUTION: এই অংকটার প্রথম অংশটা তো triangle inequality যেটা আমরা দ্বিতীয় অধ্যায়েই প্রমাণ করেছি। এবার দ্বিতীয় অংশটা, মানে equality-র শর্তটা। একটা sufficient শর্ত তো বোঝাই যাচ্ছে যদি $|f| = f$ হয়, মানে যদি সবসময়েই $f(x) > 0$ হয়। একটু ভাবলেই বুঝবে যে সবসময়েই যদি $f(x) < 0$ হয় তবেও চলবে। সমস্যা হতে পারে যদি $f(x)$-টা কখনও > 0 আর কখনও < 0 হয়। কারণ সেক্ষেত্রে $\int f$ বার করার সময়ে এই positive আর negative অংশদুটো খানিকটা কাটাকাটি হয়ে ছোটো হয়ে যেতে পারে। কিন্তু যদি $\{x \in [a,b] \ : \ f(x) > 0\}$ আর $\{x \in [a,b] \ : \ f(x) < 0\}$-এর মধ্যে অন্ততঃ একজনও খুব ছোটো হয় তবে আর অন্যটাকে কাটতে পারবে না। সুতরাং--

> Equality holds if and only if either $\{x \in [a,b] \ : \ f(x) > 0\}$ or $\{x \in [a,b] \ : \ f(x) < 0\}$ has measure 0.

■

এখানে equality-র এই শর্তটার প্রমাণ অবশ্য এই অংকে চায় নি। কিন্তু প্রমাণটা খুব কঠিন নয়। নীচের অংকে এই প্রমাণের ধাপগুলো দিলাম।

Exercise 9: ধরো $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ একটা integrable function. প্রথমে দেখাও যে $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$ হওয়া মানে হয় $\int_a^b (f - |f|) = 0$ আর নয়তো $\int_a^b (f + |f|) = 0$. এবার লক্ষ কর যে সবসময়েই $f(x) - |f(x)| \leq 0$ এবং

$f(x) + |f(x)| \geq 0$. ■

এবার দুটো অত্যন্ত সহজ কিন্তু ঠকানো প্রশ্ন দিই।

Exercise 10: ধরো $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ একটা integrable function. যদি $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ এমন হয় যে $\{x \in [a, b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}$-এর measure 0, তাহলে কি জোর দিয়ে বলা যায় যে g-ও $[a, b]$-র উপরে integrable হবে? ■

Exercise 11: যদি $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ দুজনেই integrable হয়, আর $\{x \in [a, b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}$-এর measure 0 না হয়, তবে কি জোর দিয়ে বলা যায় যে, $\int_a^b f \neq \int_a^b g$ হবেই? ■

DAY 25
Riemann-Lebesgue theorem (part 2)

আজ থেকে আমরা Riemann-Lebesgue theorem প্রমাণ করার জন্য তোড়জোর শুরু করব। এই কাজের জন্য একটা জিনিস খুব কাজে আসবে। সেটা হল একটা discontinuity কত বড় সেটা মাপতে পারা। যেমন ধরো Fig 16-এ যে discontinuity-টা রয়েছে সেটা বেশী বড়ো, নাকি Fig 17-এরটা? যেহেতু দ্বিতীয়টাতে ফাঁকটা বেশী, তাই এখানে আমরা সেটাকেই বেশী বড়ো discontinuity বলব। কিন্তু যদি এদের সঙ্গে Fig 18-এর discontinuity-টাকে তুলনা করতে বলি? তাহলে কোনো সহজ উত্তর চোখে পড়ছে না, কারণ এখানে discontinuity-টা সম্পূর্ণ অন্য ধরণের। বিভিন্ন ধরণের discontinuity-র মধ্যে তুলনা করার একটা হাতিয়ার বার করেছিলেন Lebesgue, তার নাম oscillation. আমরা Riemann-Lebesgue theorem প্রমাণ করার জন্য সেইটা আগে শিখব।

25.1 Oscillation

মনে আছে নিশ্চয়ই আমরা Cauchy criterion-এর সময়ে এই নীচের জিনিসটা নিয়ে কাজ করেছিলাম?

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_k \sup\{|f(x) - f(y)| \ : \ x, y \in I_k\}|I_k|.$$

এখানে $\sup\{|f(x) - f(y)| \ : \ x, y \in I_k\}$ মাপছে I_k-এর উপরে f সবচেয়ে বেশী কতটা পরিবর্তিত হতে পারে। এর একটা নাম আছে-- oscillation of f over I_k.

Fig 16

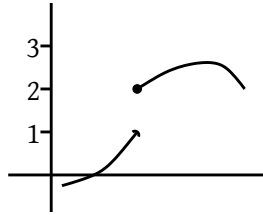



Fig 17

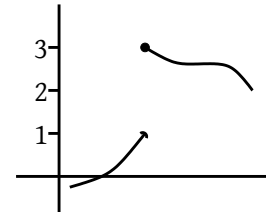
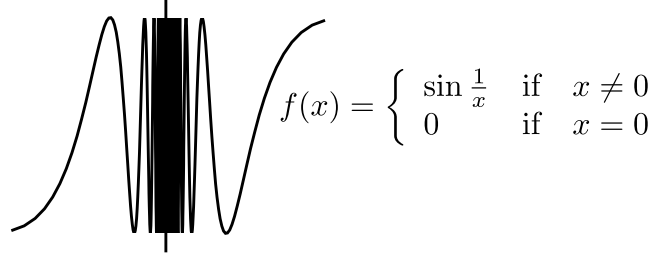



Fig 18

> DEFINITION: **Oscillation over an interval**
>
> Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a bounded function. Let I be any interval such that $I \cap [a, b] \neq \phi$. Then the **oscillation of f over I** is defined as
>
> $$\operatorname{osc}(f, I) = \sup\{|f(x) - f(y)| \ : \ x, y \in I \cap [a, b]\}.$$

Fig 19 দেখলেই বুঝবে $\operatorname{osc}(f, I)$ কী করে বার করতে হয়। প্রথমে f-এর গ্রাফের যে অংশটা I-এর উপরে আছে সেটুকু নাও। দ্যাখো এই অংশটা সবচেয়ে বেশী কত দূর উঠেছে আর সবচেয়ে নীচে কত দূর নেমেছে। এদের পার্থক্যটাই হল $\operatorname{osc}(f, I)$.

আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম যে $A \subseteq B$ যদি $\mathbb{R}$-এর দুটো bounded nonempty subset হয় তবে $\sup A \leq \sup B$ হবে।

তাই যদি $I \subseteq J$ এমন দুটো interval যাতে $I \cap [a, b] \neq \phi$ (সেক্ষেত্রে $J \cap [a, b] \neq \phi$)-ও হবে) তবে অবশ্যই

$$\operatorname{osc}(f, I) \leq \operatorname{osc}(f, J)$$

হবে। সুতরাং যদি আমরা $\delta > 0$-র জন্য $\operatorname{osc}(f, (c - \delta, c + \delta))$ বার করি, তবে δ যত কমবে এই oscillation-টাও ততই কমবে। আমরা জানি যে decreasing function যদি bounded from below হয়, তবে তার finite limit থাকে। সুতরাং $\delta \to 0+$ নিলে এই oscillation-টাও কমতে কমতে কোনো একটা finite limit-এর দিকে যাবে। নীচের definition-টার বিষয়বস্তু সেইটাই।

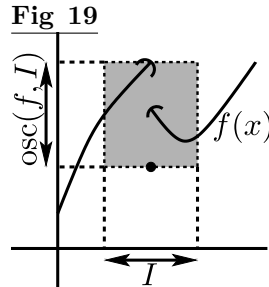



Fig 19

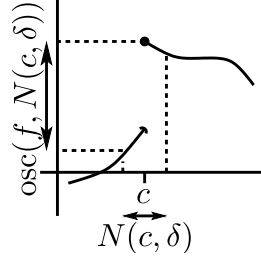



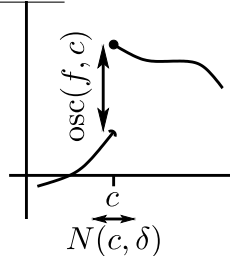
Fig 20

> DEFINITION: **Oscillation at a point**
>
> Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be a bounded function. Let $c\in[a,b]$. Then the **oscillation of f at c** is defined as
> $$\operatorname{osc}(f,c)=\lim_{\delta\to 0+}\operatorname{osc}\left(f,(c-\delta,c+\delta)\right).$$
> This limit always exists finitely.

এইটাই হল discontinuity-র পরিমাণ মাপার হাতিয়ার। সেটা ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক। Fig 20-এ $x=c$-তে একটা discontinuity রয়েছে। একে ঘিরে একটা neighbourhood নিয়েছি $N(c,\delta)$. এর উপর গ্রাফটার সবচেয়ে বেশী কত উঠেছে আর সবচেয়ে নীচে কতটা নেমেছে, তার পার্থক্যটাই হল $\operatorname{osc}(f,N(c,\delta))$. এবার মনে মনে δ-কে কমাতে থাকো, তাহলে বুঝতে পারছ যে $\operatorname{osc}(f,N(c,\delta))$-টা কমতে কমতে গ্রাফের ফাঁকটাতে এসে আটকে যাবে, তার চেয়ে বেশী কমতে পারবে না। তার মানে ওই ফাঁকের পরিমাণটাই হল $\operatorname{osc}(f,c)$, যেমনটা Fig 21-তে দেখিয়েছি। যদি গ্রাফটাতে কোনো ফাঁক না থাকত (মানে $x=c$-তে continuous হত), তবে বুঝতেই পারছ যে $\operatorname{osc}(f,c)=0$ হত। এবার দেখি Fig 18-এর বেলায় $x=0$-তে oscillation কত হয়। তুমি $x=0$-কে ঘিরে যাই neighbourhood নাও না কেন, গ্রাফটা ওর মধ্যে অসংখ্যবার -1 অব্ধি নামবে এবং 1 অব্ধি উঠবে। তার মানে

$$\forall\delta>0\quad \operatorname{osc}(f,N(0,\delta))=1-(-1)=2$$

হবে। অতএব limit নিলে পাব $\operatorname{osc}(f,0)=2$. দেখতেই পাচ্ছ যে সব রকম discontinuity-র ক্ষেত্রেই oscillation হয় >0, এবং oscillation=0 হওয়া মানে continuity. নীচের theorem-টার বক্তব্যও এটাই। Riemann integration-এর জন্য আমরা অবশ্য খালি bounded function নিয়ে কাজ করছি, তাই infinite discontinuity-র প্রশ্ন আসছে না।

Fig 21

THEOREM

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be an bounded function. Let $c \in [a, b]$. Then f is continuous at $c \iff \text{osc}(f, c) = 0$.

Proof:

Step 1: $\Longleftarrow$:

Given: $\text{osc}(f, c) = 0$.

To show: $f(x)$ is continuous at $x = c$, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(c, \delta) \cap [a, b] \quad f(x) \in N(f(c), \epsilon).$$

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because \text{osc}(f, c) = 0$,

$$\therefore \exists \delta > 0 \quad osc(f, (c - \delta, c + \delta)) < \epsilon.$$

$\exists \delta$ Choose this $\delta > 0$.

$\forall x$ Take any $x \in N(c, \delta)$.

Then $|f(x) - f(c)| \leq osc(f, (c - \delta, c + \delta)) < \epsilon$, as required.

Step 2: $\Longrightarrow$:

Given: $f(x)$ is continuous at $x = c$.

To show: $\text{osc}(f, c) = 0$, ie

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{osc}(f, (c - \delta, c + \delta)) < \epsilon.$$

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because f(x)$ is continuous at $x = c$,

$$\therefore \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in N(c, \delta_1) \quad |f(x) - f(c)| < \epsilon/2.$$

$\exists \delta$ Choose $\delta = \delta_1/2 > 0$.

To show $\text{osc}(f, (c - \delta, c + \delta)) < \epsilon$, ie,

$$\forall p, q \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b] \quad |f(p) - f(q)| < \epsilon.$$

$\forall p\ q$ Take any $p, q \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$.

Then

$$\begin{aligned} |f(p) - f(q)| &\leq |f(p) - f(c)| + |f(c) - f(q)| \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

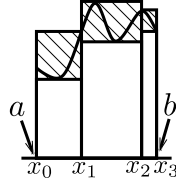



Fig 22

as required.

[Q.E.D]

25.2 f integrable $\implies D$ has measure zero

আমরা জানি যে $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ একটা bounded function হলে $U(P, f) - L(P, f)$-কে Fig 22-এর মত কয়েকটা rectangle-এর area-র যোগফল হিসেবে লেখা যায়। যদি P-এর subinterval-গুলোকে $I_1, ..., I_n$ বলি, তবে এর মধ্যে i-th subinterval-এর উপর rectangle-টা চওড়ায় $|I_i|$ এবং লম্বায় $\text{osc}(f, I_i)$. সুতরাং area হবে $\text{osc}(f, I_i)|I_i|$. Fig 23 দ্যাখো। এরকম সবগুলো area যোগ করলেই পাব

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum \text{osc}(f, I_i)|I_i|.$$

এইবার একটা ছোট্টো প্রশ্ন করি--ধরো তোমাকে বলে দিলাম যে

$$U(P, f) - L(P, f) < 1$$

হয়। মনে কর P-এর মধ্যে একটা subinterval হল I, এবং $\text{osc}(f, I) \geq 5$. তবে বলতে পারো I-টা সবচেয়ে বেশী কত লম্বা হতে পারে?

আমরা জানি যে $U(P, f) - L(P, f)$ হল কয়েকটা rectangle-এর area-র যোগফল। এদের মধ্যে I-এর উপরে যে rectangle-টা আছে তার উচ্চতা হল $\text{osc}(f, I) = 5$. তার মানে এই rectangle-টার area হল $5|I|$, যেটা অবশ্যই সবগুলো rectangle-এর মোট area-র থেকে বড় হবে না। তার মানে $5|I| \leq 1$. সুতরাং $|I| \leq \frac{1}{5}$, অর্থাৎ I-এর দৈর্ঘ্য $\frac{1}{5}$-এর চেয়ে বেশী হতে পারে না।

এইখান থেকে শিক্ষণীয় এই যে, $U(P, f) - L(P, f)$ যদি ছোটো হয় তবে যেসব subinterval-এর উপর oscillation বেশী তাদের দৈর্ঘ্য কম হতে বাধ্য।

এই কথাটা মাথায় রেখে আমরা Riemann-Lebesgue theorem-এর প্রথম অর্ধেকটা প্রমাণ করব। এটাই নীচের theorem-টা--

Fig 23

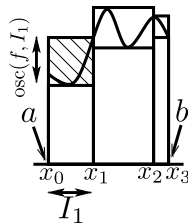
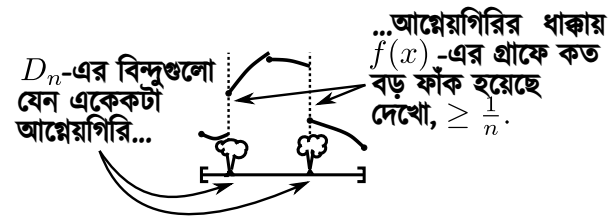



Fig 24

THEOREM

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be Riemann integrable on $[a, b]$. Then the set of all discontinuity points of f in $[a, b]$ must have measure zero.

Proof:

Let $D =$ the set of all discontinuity points of f in $[a, b]$.

Let, for $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n = \left\{x \in [a, b] \ : \ \operatorname{osc}(f, x) \geq \tfrac{1}{n}\right\}.$$

Then

$$D = \cup_n D_n.$$

এবার আমরা সরাসরি D-কে measure zero না দেখিয়ে, প্রতিটা D_n-কে আলাদা করে measure zero দেখাব। তাতেই কাজ হবে, কারণ $D = \cup D_n$, এবং এই union-টা একটা countable union. আমরা জানি যে countable-সংখ্যক measure zero set-এর union-এরও measure zero হয়, তাই D-এরও measure zero হতে বাধ্য।

Shall show $\forall n \in \mathbb{N} \quad D_n$ has measure zero.

This will complete the proof, as countable union of measure zero sets has measure zero.

অংকের ভাষায় লিখে নিই--

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists$ countably many open intervals U_k such that $D_n \subseteq \cup U_k$ and $\sum |U_k| < \epsilon$.

গোড়ায় দুটো $\forall$ আছে, তাই--

$\forall n, \epsilon$ Take any $n \in \mathbb{N}$ and any $\epsilon > 0$.

এবার আমরা countably many open interval খুঁজতে বেরোব। এখানে আসলে finitely many open interval দিয়েই কাজ চলবে।

$\because f$ is Riemann integrable on $[a, b]$,

$$\therefore \exists P \in \mathbb{P}([a, b]) \quad U(P, f) - L(P, f) < \frac{\epsilon}{2n}.$$

Suppose that P is

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b.$$

এইবার আমরা কী করতে চলেছি সেটার মূল ধারণাটা দিয়ে রাখি। D_n-এর প্রতিটি বিন্দু যেন একেকটা আগ্নেয়গিরি, তার ধাক্কায় f-টা উত্তেজিত হয়ে উঠছে, তাই সেইসব বিন্দুতে fএর oscillation বেড়ে $\geq \frac{1}{n}$ হয়ে যাচ্ছে। Fig 24 দ্যাখো। ছবিতে খালি দুটো আগ্নেয়গিরি এঁকেছি, কিন্তু এরকম infinitely many-ও থাকতে পারে। আমাদের হাতে একটা partition

a b
x_0 $x_1 x_2$ x_3 x_4

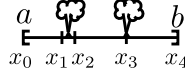



Fig 25

আছে--P. কোনো কোনো আগ্নেয়গিরি পড়বে P-এর কোনো subinterval-এর ভিতরে (মানে interior-এ), যেমন Fig 25-এর বাঁদিকের আগ্নেয়গিরিটা। আবার কোনো আগ্নেয়গিরি হয়তো পড়বে একটা subinterval-এর একেবারে প্রান্তে (মানে কোনো একটা x_i-তে), যেমন Fig 25-এর ডানদিকের আগ্নেয়গিরিটা।
অবশ্য দ্বিতীয় ধরণের আগ্নেয়গিরির সংখ্যা খুব বেশী হতে পারে না--বড়জোর $p+1$ খানা, কারণ ঠিক $p+1$-খানাই x_i আছে--$x_0, ..., x_p$.
আবার যেসব subinterval-এর ভিতরে আগ্নেয়গিরি থাকবে, তাদের দৈর্ঘ্য খুব বেশী হতে পারে না। কারণ $U(P, f) - L(P, f)$-কে আমরা বেশী বাড়তে দিচ্ছি না, তাই যেসব subinterval-এর উপর oscillation বেশী, তাদের দৈর্ঘ্য কম হতে বাধ্য। সুতরাং প্রথম ধরণের আগ্নেয়গিরিগুলোও খুব বেশী জায়গায় ছড়িয়ে থাকতে পারে না। সুতরাং যাবতীয় আগ্নেয়গিরির set (মানে D_n)-এর বিস্তার খুব বেশী হতে পারে না। এই যুক্তিটাকেই এবার গুছিয়ে লিখে দেখাব যে D_n-এর measure zero হতে বাধ্য।
প্রথমে দেখি কোন কোন subinterval-এর ভিতরে আগ্নেয়গিরি পড়েছে। মনে রেখো যে k-th subinterval-টা হল $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. এর ভিতরে (মানে interior-এ) কোনো আগ্নেয়গিরি পড়া মানে $(x_{k-1}, x_k) \cap D_n \neq \phi$ হওয়া, অর্থাৎ $I_k^\circ \cap D \neq \phi$ হওয়া। এখানে I_k° হল I_k-র interior মানে (x_{k-1}, x_k).

Let a set $K \subseteq \{1, ..., p\}$ be defined as

$$K = \{k \ : \ (x_{k-1}, x_k) \cap D_n \neq \phi\}.$$

যেমন Fig 25-এর বেলায় $K = \{2\}$ হবে, কারণ 2 নম্বর subinterval-টার ভিতরেই খালি আগ্নেয়গিরি আছে।

Then

$$D_n \subseteq [\cup_{k \in K} I_k^\circ] \bigcup \{x_0, ..., x_p\}.$$

এর মানে হল D_n-এর মধ্যে যে দুধরণের আগ্নেয়গিরি আছে, তাদেরকে দুটো আলাদা ভাগ করলাম। যে গুলো subinterval-দের interior-এ আছে তারা রয়েছে $\cup_{k \in K} I_k^\circ$-এর মধ্যে, আর যে সব আগ্নেয়গিরি প্রান্তে পড়েছে তারা থাকতে বাধ্য $\{x_0, ..., x_p\}$-এর মধ্যে।
আমাদের কাজ ছিল এমন সব open interval U_n পাওয়া, যাতে $D \subseteq \cup_n U_n$ হয়, এবং U_n-গুলোর মোট দৈর্ঘ্য $< \epsilon$ হয়। কিছু U_n তো পেয়েই গেলাম--I_k°-গুলো। বাকি রয়েছে $x_0, ..., x_p$. এদেরকেও এবার ছোটো ছোটো open interval-র তলায় চাপা দেব, যাদের মোট দৈর্ঘ্য $= \frac{\epsilon}{2}$ হয়।

Let $\delta = \frac{\epsilon}{4(p+1)} > 0$.

$\exists U_n$ Choose the countable (finite) collection $\{U_n\}$ as

$$\{I_k^\circ \ : \ k \in K\} \cup \{N(x_0, \delta), ..., N(x_p, \delta)\}.$$

Then
$$D_n \subseteq [\cup_{k\in K} I_k^\circ] \bigcup [\cup_{i=0}^{p} N(x_i,\delta)] .$$

সুতরাং D_n-কে চাপা দেওয়া নিয়ে চিন্তা নেই। এবার দেখাব মোট দৈর্ঘ্য $< \epsilon$ হবে। আমরা এটাকে দুভাগে ভেঙে দেখাব-- $N(x_i,\delta)$-গুলোর মোট দৈর্ঘ্য $= \frac{\epsilon}{2}$ এবং I_k°-দের মোট দৈর্ঘ্য $< \frac{\epsilon}{2}$.

Now
$$\sum_{i=0}^{p} |N(x_i,\delta)| = 2(p+1)\delta = \tfrac{\epsilon}{2}.$$
So it is enough to show that
$$\sum_{k\in K} (x_k - x_{k-1}) < \tfrac{\epsilon}{2}.$$
Now $\forall k \in K \quad \mathrm{osc}(f, I_k) \geq \frac{1}{n}$.
Now
$$\begin{aligned} U(P,f) - L(P,f) &< \frac{\epsilon}{2n} \\ \text{or, } \sum_{k=1}^{p} \mathrm{osc}(f,I_k)|I_k| &< \frac{\epsilon}{2n} \\ \text{or, } \sum_{k\in K} \mathrm{osc}(f,I_k)|I_k| &< \frac{\epsilon}{2n} \\ \text{or, } \frac{1}{n}\sum_{k\in K} |I_k| &< \frac{\epsilon}{2n} \\ \text{or, } \sum_{k\in K} |I_k| &< \frac{\epsilon}{2} \\ \text{or, } \sum_{k\in K} |I_k^\circ| &< \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

শেষ ধাপটা হল কারণ I_k এবং I_k°-এর দৈর্ঘ্য সমান, যেমন $[1,3]$ আর $(1,3)$ দুজনেরই দৈর্ঘ্য হল $3-1=2$. ব্যস্ প্রমাণ শেষ, খালি উপসংহারটুকু লেখা বাকি--

So D_n has measure zero, completing the proof.

[Q.E.D]

DAY 26
Riemann-Lebesgue theorem (part 3)

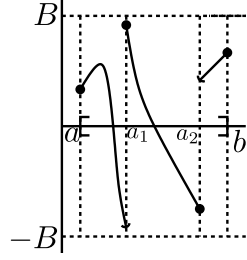
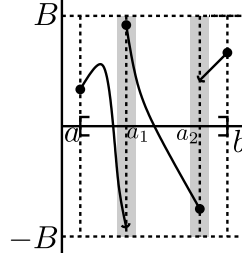



Fig 26

Fig 27

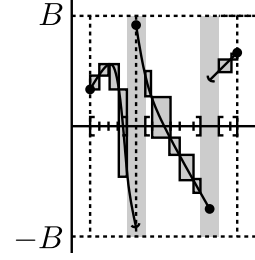



Fig 28

26.1 D has measure zero $\implies f$ integrable

আমরা আগে প্রমাণ করেছিলাম যে D finite হলে f-টা Riemann integrable হতে বাধ্য। মোটামুটি একই কায়দা D-এর measure zero হলেও খাটবে। চট্ করে মনে করে নিই সেখানে কী করে এগিয়েছিলাম (Fig 26)। D যেহেতু finite, তাই আমরা সেই finite সংখ্যক discontinuity point-কে খুব ছোটো ছোটো খাব্‌লা বসিয়ে বাদ দিয়ে দিয়েছিলাম (Fig 27)। এই খাব্‌লাগুলোর বাইরে তো f-টা দিব্যি continuous, তাই Riemann integrable-ও বটে। সেই কারণে খাব্‌লাগুলো বাদ দিলে মাঝের যে জায়গাগুলো পড়ে থাকে সেখানে এমন partition নেওয়া সম্ভব যাতে $U(P,f) - L(P,f)$ খুব ছোটো হয় (Fig 28)। এইবার এই সব partition মিলিয়ে পুরো $[a,b]$-র একটা partition বানিয়েছিলাম। সেটার ক্ষেত্রেও $U(P,f) - L(P,f)$ খুব ছোটো হয়েছিল।
ঠিক একই কাজ এখানেও করব। এখানে অবশ্য D finite নাও হতে পারে, কিন্তু যেহেতু measure zero, তাই আমরা D-কে countably many open interval-এর মধ্যে বেঁধে ফেলতে পারি, যাদের মোট দৈর্ঘ্য যত খুশী ছোটো নেওয়া যায়। খালি একটাই অসুবিধা, সেটা হল ওই countably many কথাটা, যদি finitely many হত তবেই আমরা আগের মত এগোতে পারতাম। কিন্তু যদি infinitely many হয়ে যায় তবেই মুস্কিল, partition-এ তো infinitely many বিন্দু থাকতে পারে না! এই সমস্যাটা আমরা সামলাব এইভাবে--
যাবতীয় discontinuity-কে আমরা দুইভাগে ভাগ করব, বড়ো বড়ো discontinuity আর ছোটো ছোটো discontinuity. বড় discontinuity মানে যেসব x-এ $\operatorname{osc}(f,x)$ বড়, আর বাকিরা হল ছোটো discontinuity. ধর একটা সংখ্যা নিলাম $r > 0$. এবার $\operatorname{osc}(f,x) \geq r$ হলে বলব যে x-এ f-এর একটা বড়ো discontinuity আছে, আর যদি $0 < \operatorname{osc}(f,x) < r$ হয়, তবে বলব x-এ f-এর একটা ছোটো discontinuity আছে। তাহলে দেখানো যাবে যে বড় বড় discontinuity-র জায়গাগুলোকে finite সংখ্যক open interval-এর মধ্যে বেঁধে ফেলা যাবে। আর বাকী discontinuity-গুলো তো ছোটোই আছে, তাই ওগুলো নিয়েও কোনো সমস্যা হবে না। এই হল গিয়ে মূল ধারণাটা, এবার খুঁটিনাটিগুলো শেখা যাক।

26.1.1 More on oscillation

এই যে বললাম বড় discontinuity-গুলোকে খালি finite সংখ্যক open interval-এর মধ্যে বেঁধে ফেলা যাবে, তার কারণটা রয়েছে নীচের theorem-টায়। এখানে আমরা দেখাব যে, বড় বড় discontinuity-গুলোর set হল compact. সেই কারণে যদি infinite সংখ্যক open interval দিয়ে ওদের cover করা যায়, তবে তার থেকে একটা finite subcover বার করে নেওয়া যাবে।

THEOREM

Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be any bounded function. Let $r > 0$ be any number. Then the set

$$A_r = \{x \in [a,b] \;:\; \operatorname{osc}(f,x) \geq r\}$$

is a compact set.

Proof: এই A_r-ই হল যাকে আমরা বড় বড় discontinuity-র set বলছিলাম। এটাকে compact দেখাতে হবে। মনে

আছে নিশ্চয়ই যে $\mathbb{R}$-এর কোনো subset-এর পক্ষে compact হওয়া এবং closed আর bounded হওয়া একই জিনিস। তাই--

Shall show that A_r is closed and bounded.
Since $A_r \subseteq [a, b]$ so A_r is bounded.
Shall show that A_r is a closed set in $\mathbb{R}$,

কোনো set-কে closed দেখানো মানে তার complement-কে open দেখানো--

ie, A_r^c is an open set in $\mathbb{R}$,
ie,

$$\forall x \in A_r^c \quad \exists \delta > 0 \quad N(x, \delta) \subseteq A_r^c.$$

$\forall x$ Take any $x \in A_r^c$.

যে সব point-এ f-এর oscillation-টা $\geq r$, তাদের নিয়েই A_r তৈরী। যেহেতু $x \notin A_r$, তাই $\text{osc}(f, x) \not\geq r$, অর্থাৎ--

Then $\text{osc}(f, x) < r$.

$$\therefore \lim_{\delta \to 0+} \text{osc}(f, (x - \delta, x + \delta)) < r.$$

কারণ $\text{osc}(f, x)$ মানেই তো হল $\lim_{\delta \to 0+} \text{osc}(f, (x - \delta, x + \delta))$.

So

$$\exists \delta > 0 \quad \text{osc}(f, (x - \delta, x + \delta)) < r.$$

এইটা কী করে হল বুঝলে? যতই δ কমতে কমতে 0-র দিকে যাচ্ছে, ততই $\text{osc}(f, (x - \delta, x + \delta))$ কমছে, এবং এক সময়ে r-এর থেকে ছোটো কোনো একটা limit-এর দিকে এগোচ্ছে। তার মানে কোনো একটা পর্যায়ে সেটা অবশ্যই r-এর নীচে নেমে যেতে বাধ্য। এই δ দিয়েই আমাদের কাজ চলবে।

$\exists \delta$ Choose this $\delta > 0$.

To show that $N(x, \delta) \subseteq A_r^c$,
ie,

$$\forall y \in N(x, \delta) \quad \text{osc}(f, y) < r.$$

$\forall y$ Take any $y \in N(x, \delta)$.

যেহেতু $y \in N(x, \delta)$, তাই--

Then $\text{osc}(f, y) \leq \text{osc}(f, (x - \delta, x + \delta)) < r$, as required.

[Q.E.D]

যথেষ্ট অস্ত্র-শস্ত্র সংগ্রহ হয়েছে, এবার Riemann-Lebesgue theorem-এর বাকি অর্ধেক প্রমাণ করার পালা।

26.1.2 The proof

পড়ার সুবিধার জন্য Riemann-Lebesgue theorem-এর বাকি অর্ধেকটাকে নীচের theorem-টার আকারে লিখে নিয়েছি--

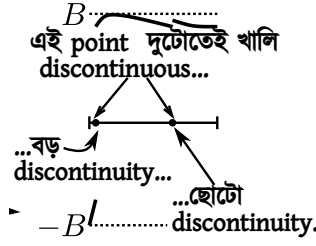



Fig 29

> **THEOREM**
>
> Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a bounded function. Let the set of all discontinuity points of f in $[a, b]$ have measure zero. Then f must be Riemann integrable on $[a, b]$.

Proof:

To show

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([a, b]) \quad U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

Take any $\epsilon > 0$.

Let $D =$ set of all discontinuity points of f in $[a, b]$.

এইবার D-এর মধ্যে থেকে বড় বড় discontinuity-গুলোকে ছেঁকে বার করে নেব। তার জন্য একটা $r > 0$ নিতে হবে। তাহলে $A_r = \{x \in [a, b] \ : \ \text{osc}(f, x) \geq r\}$ হবে বড় বড় discontinuity-দের set. প্রশ্ন হল r-টা কী নেব!
সেটা বোঝা যাবে আমরা এর পর কী করতে চলেছি সে বিষয়ে একটু ধারণা দিলেই। ধরো f-টাতে খালি দুটোই discontinuity আছে (Fig 29)। আমাদের উদ্দেশ্য হল একটা partition P জোগাড় করা যাতে $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$ হয়। P-এর মধ্যে বিভিন্ন subinterval আছে, তাদের কারোর মধ্যে বড় বড় discontinuity-গুলো পড়বে, বাকীগুলোতে হয় discontinuity নেই, বা থাকলেও ছোটো ছোটো। বোঝানোর সুবিধার জন্য ধরো P-এর খালি দুটোই subinterval আছে (Fig 30), তার মধ্যে বড় discontinuity-গুলো আছে I-এর মধ্যে, আর J-এর মধ্যে হয় discontinuity নেই বা কেবল ছোটো discontinuity-রা আছে। এখন $U(P, f) - L(P, f)$ হল দুটো rectangle-এর area-র যোগফল--

$$\text{osc}(f, I)|I| + \text{osc}(f, J)|J|.$$

আমরা চাই যেন দুটো area-ই আলাদা করে $< \frac{\epsilon}{2}$ হয়, তাহলেই মোট area হবে $< \epsilon$. আমরা জানি যে বড় বড় discontinuity-গুলোকে খুব অল্প জায়গায় বেঁধে ফেলা যায়। তাই I-এর উপরের rectangle-টাকে যত খুশী রোগা নেওয়া

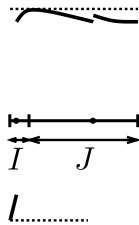
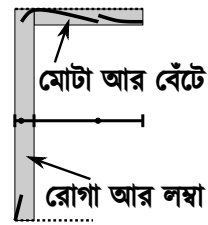



Fig 30 **Fig 31**

যায় (Fig 31)। কিন্তু $\text{osc}(f, I)$ বেশী হওয়ায় ওটার উচ্চতাকে কম করা যাবে না। তবে $\text{osc}(f, I)$ আর কত বেশী হবে? যদি $B > 0$ হয় f-এর একটা bound, তবে $\text{osc}(f, I)$ তো আর $2B$-এর চেয়ে বেশী হতে পারে না! সুতরাং $|I| \times 2B = \frac{\epsilon}{2}$ নিলেই মানে

$$|I| = \tfrac{\epsilon}{4B}$$

নিলেই কাজ হবে।

J-র উপরে যে rectangle-টা তার চিত্রটা সম্পূর্ণ বিপরীত-- সেটার উচ্চতা যত খুশী কম নেওয়া যায়, কারণ $\text{osc}(f, J) < r$, এবং $r > 0$ তো আমাদের হাতে। কিন্তু J-টা খুব সরু নাও হতে পারে। I-এর rectangle-টা ছিল রোগা আর লম্বা, J-এর rectangle-টা বেঁটে আর মোটা। কিন্তু $|J|$ আর কত বড় হবে, $b - a$-র চেয়ে তো বড় হতে পারে না! তাই যদি $\text{osc}(f, J)|J| < r(b - a) = \frac{\epsilon}{2}$ নিই, মানে

$$r = \tfrac{\epsilon}{2(b-a)}$$

নিই তবেই কাজ হবে।

Let $r = \frac{\epsilon}{2(b-a)} > 0$.

Then A_r is compact and $A_r \subseteq D$.

$\because A_r \subseteq D$ and D has measure zero,

$\therefore A_r$ has measure zero.

There exists countably many open intervals $U_n \subseteq [a, b]$ such that

$$A_r \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} U_n \text{ and } \sum |U_n| < \frac{\epsilon}{4B},$$

where $B > 0$ is a bound of f on $[a, b]$.

$\because A_r$ is compact,

$\therefore$ There exists a finite subcover $\{U_1, ..., U_n\}$, say.

Define $E = [a, b] \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_n)$.

Then E is compact.

⟦ <u>Because:</u>

$E \subseteq [a, b]$ and so bounded.
Also $E = [a, b] \cap (U_1 \cup \cdots \cup U_n)^c$ is an intersection of closed sets, and so closed.

⟧

$\because E \subseteq (A_r)^c$,

$\therefore \forall x \in E \quad x \notin A_r$,

$\therefore \forall x \in E \quad \text{osc}(f, x) < r$,

$$\therefore \forall x \in E \quad \exists \delta_x > 0 \quad \text{osc}(f, (x - \delta_x, x + \delta_x)) < r.$$

Then $\{N(x, \delta_x) \ : \ x \in E\}$ is an open cover of E.

কিন্তু E তো এদিকে compact, তাই একটা finite subcover পাওয়া যাবে।

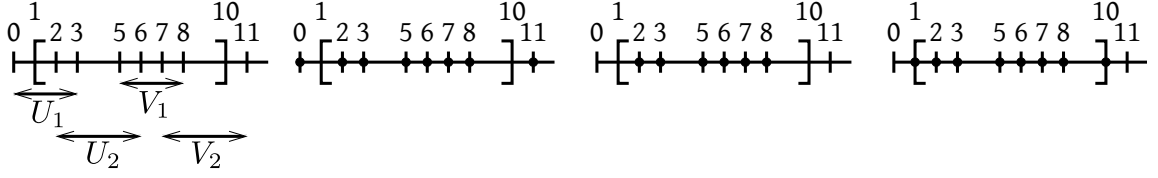



Fig 32

> Let a finite subcover be
> $$\{V_1, ..., V_m\}.$$

আমাদের হাতে এখন দুটো finite subcover– এক, A_r-এর জন্য $\{U_1, ..., U_n\}$, আর দুই, E-এর জন্য $\{V_1, ..., V_m\}$. লক্ষ কর এদের তলায় পুরো $[a, b]$-টাই চাপা পড়ে আছে। এইবার এদের মিলিয়ে আমরা একটা partition বানাব। একটা উদাহরণ নিলে বুঝতে সুবিধা হবে (Fig 32)। ধরো $[a, b] = [1, 10]$. $U_1 = (0, 3), U_2 = (2, 6)$ এবং $V_1 = (5, 8), V_2 = (7, 11)$. আমরা এদের যাবতীয় প্রান্তগুলোকে একত্র করব-- $0, 3, 2, 6, 5, 8, 7$ আর 11. এদের মধ্যে যারা $[a, b]$-এর বাইরে পড়েছে, তাদের বাদ দিয়ে দেব--0 আর 11. তার মানে রইল $3, 2, 6, 5, 8, 7$. আমরা চাইছি $[1, 10]$-এর partition, তাই 1 আর 10 তো থাকতেই হবে, সুতরাং সব মিলিয়ে দাঁড়ালো $3, 2, 6, 5, 8, 7, 1, 10$, বা ছোটো থেকে বড় সাজালে $1 < 2 < 3 < 5 < 6 < 7 < 8 < 10$. এইটাই আমাদের প্রয়োজনীয় partition. ঠিক এই কাজটাই এবার আমরা করব। তার জন্য U_i আর V_j-দের দুই প্রান্তের কিছু নাম দিয়ে রাখলে সুবিধা হবে--

$\exists P$

> Let $U_i = (a_i, b_i)$ for $i = 1, ..., n$, and $V_j = (c_j, d_j)$ for $j = 1, ..., m$.
> Choose $P \in \mathbb{P}([a, b])$ as
> $$P = \{a, b\} \cup \{a_1, b_1, ..., a_n, b_n\} \cup \{c_1, d_1, ..., c_m, d_m\} \cap [a, b].$$

এবার দেখাতে হবে যে এই P দিয়ে আমাদের কাজ চলবে, অর্থাৎ $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$ হবে। P-এর subinterval-গুলোকে লক্ষ কর। আমাদের উদাহরণে এরা হল

$$[1, 2], \quad [2, 3], \quad [3, 5], \quad [5, 6], \quad [6, 7], \quad [7, 8], \quad [8, 10].$$

একটু ভাবলেই বুঝবে যে এদের প্রত্যেকেই হয় কোনো U_i-এর মধ্যে আছে, নয়তো সব U_i-এর বাইরে আছে, খানিকটা ভিতরে খানিকটা বাইরে এইভাবে কেউই নেই। যেমন $[1, 2], [2, 3]$ আছে U_1-এর মধ্যে, $[3, 5], [5, 6]$ আছে U_2-র মধ্যে ($[2, 3]$ আসলে U_1, U_2 দুজনের মধ্যেই আছে।) আবার $[6, 7], [7, 8]$ আর $[8, 10]$ এরা সব U_i-এর বাইরে আছে।

> Each subinterval of P is either contained inside some $\overline{U_i}$ or is outside all U_is.

এখানে আবার $\overline{U_i}$ (মানে U_i-এর closure) লিখলাম কেন? কারণ, ভালো করে খুঁটিয়ে দ্যাখো, এক্ষুণি যে বললাম $[2, 3]$ আছে U_1-এর মধ্যে সেটা পুরো ঠিক নয়, কারণ $U_1 = (0, 3)$, ওর মধ্যে 3 নেই, কিন্তু $[2, 3]$-এর মধ্যে 3 আছে। তাই বলা উচিত ছিল $[2, 3] \subseteq \overline{U_1} = [0, 3]$.

> Let the subintervals contained in some $\overline{U_i}$ be called
> $$I_1, ..., I_p$$

and the other subintervals be $J_1, ..., J_q$.

তার মানে আমাদের উদাহরণে I_i-রা হল

$$[1,2], \quad [2,3], \quad [3,5], \quad [5,6],$$

আর J_j-রা হল

$$[6,7], \quad [7,8], \quad [8,10].$$

Then

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum \operatorname{osc}(f, I_i)|I_i| + \sum \operatorname{osc}(f, J_j)|J_j|$$

কারণ P-এর interval-গুলোকে দুই দলে ভাগ করা যায়--I_i আর J_j. এবার দেখাব যে এই দুটো sum-ই $\frac{\epsilon}{2}$-এর চেয়ে ছোটো। প্রথমে I_i-গুলো নিয়ে কাজ করি। যেহেতু I_i-গুলো সবাই আছে $\overline{U_i}$-দের পেটে তাই I_i-দের মোট দৈর্ঘ্য কখনোই U_i-দের মোট দৈর্ঘ্যের চেয়ে বেশী হতে পারে না। মনে রেখো যে $\overline{U_i}$ আর U_i-এর একই দৈর্ঘ্য (যেমন $(0,2)$ আর $[0,2]$ দুজনেই লম্বায় 2). এদিকে আমরা U_i-গুলো এমনভাবে নিয়েছিলাম যাতে ওদের মোট দৈর্ঘ্য হয় $< \frac{\epsilon}{4B}$. আর মনে রেখো যে I_i যাই হোক না কেন $\operatorname{osc}(f, I_i)$ কখনোই $2B (= B - (-B))$-কে ছাড়িয়ে যেতে পারে না, কারণ f নিজেই $-B$ থেকে B-এর মধ্যে রয়েছে। অতএব--

$$\begin{aligned} \sum \operatorname{osc}(f, I_i)|I_i| &\leq 2B \sum |I_i| \\ &\leq 2B \times \frac{\epsilon}{4B} \\ &= \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

এবার কাজ করব J_j-গুলোকে নিয়ে। এরা প্রত্যেকেই রয়েছে সব U_i-এর বাইরে, তাই A_r-এর বাইরে। তার মানে $\operatorname{osc}(f, J_j) < r$ হতে বাধ্য। মনে আছে নিশ্চয়ই যে আমরা $r = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ নিয়েছিলাম। সবগুলোর J_j-এর মোট দৈর্ঘ্য আমরা ঠিক জানি না, তবে এটা অবশ্যই বলতে পারি যে মোট দৈর্ঘ্যটা $b - a$-কে ছাড়িয়ে যেতে পারে না, কারণ ওরা সকলেই $[a,b]$-এর মধ্যে আছে। তাই--

$\because J_j \subseteq A_r^c, \ \therefore \operatorname{osc}(f, J_j) < r = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

So

$$\begin{aligned} \sum \operatorname{osc}(f, J_j)|J_j| &< \sum \frac{\epsilon}{2(b-a)} |J_j| \\ &= \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum |J_j| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} (b-a) \\ &= \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Thus $U(P,f) - L(P,f) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, as required.

[Q.E.D]

Answers

4. হ্যাঁ, প্রথমে limit point-গুলোকে $\frac{\epsilon}{2}$-এর তলায় চাপা দাও। A-র যে অংশটা চাপা পড়ল না, তার limit point-এর সংখ্যা 0, যেটা একটা finite সংখ্যা। এবার আগের অংকটা লাগাও। **5.** হ্যাঁ, হ্যাঁ, হ্যাঁ, না। **7.** **(1)** $RLLL...$, **(2)** নেই, **(3)** $LRLRLR...$, **(4)** $RRLLL...$, **(5)** $RLRRR...$ **10.** না। ধরো $f \equiv 0$, আর $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ **11.** না, $a = 0, b = 2\pi, f \equiv 0$ আর $g(x) = \sin x$.

Chapter V
Improper integrals

DAY 27
গোড়ার কথা

আমরা এতক্ষণ যে সব $f:[a,b]\to\mathbb{R}$-কে integrate করেছি, তাদের প্রত্যেকের ক্ষেত্রেই তিনটে বৈশিষ্ট্য ছিল--

1. f-টা যেখানে defined, সেই $[a,b]$ ছিল closed,
2. $[a,b]$ ছিল bounded, এবং
3. f নিজেও ছিল bounded,

এই তিনটে শর্ত যদি পালিত না হয়, তবে আমরা সরাসরি Riemann integration-এর সংজ্ঞা লাগাতে পারি না। কিন্তু এরকম ক্ষেত্রে কি আমরা integration-এর কথা ভাবতেই পারি না? উত্তর হল, হ্যাঁ পারি, এই শর্তগুলো পালিত না হলেও কিছু কিছু ক্ষেত্রে integration করা যায়। এবার আমরা সেটাই শিখব।
একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে তিনটে শর্তের মধ্যে প্রথমটা সবচেয়ে কম দরকারী। কারণ আমরা জানি যে, কোনো function-কে finite-সংখ্যক জায়গায় বদলে দিলেও তার Riemann integrability (এবং Riemann integrable হলে integral-টা) অক্ষুণ্ণ থাকে। সুতরাং যদি f-টা (a,b)-র উপরে defined হয়, তবে $x=a$ আর $x=b$-তে যে কোনোভাবে $f(x)$-কে define করে দিলেই চলবে। কয়েকটা উদাহরণ দেখলে বুঝতে পারবে।

Example 1: যদি $f(x)=x+1$ হয় তবে $f(x)$-কে $(1,2)$-এর উপরে integrate করলে কী পাবে?

SOLUTION: এখানে integration-টা হচ্ছে $(1,2)$-এর উপর, যেটা bounded হলেও closed নয়। কিন্তু তাতে খুব একটা অসুবিধা নেই, কারণ যদি আমরা $[1,2]$-এর উপরে integrate করতাম, তবে পেতাম

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x+1)\,dx=\frac{1}{2}x^2+x\Big|_1^2=\frac{5}{2}.$$

Fig 1

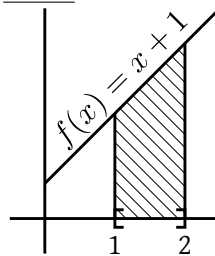
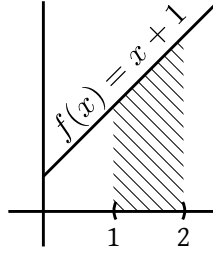



Fig 2

তার মানে $[1, 2]$-এর উপরে গ্রাফের নীচের মোট area হল 2 (Fig 1). যদি খালি $(1, 2)$-র উপরের area বার করতে চাই তবে বাদ যাবে খালি দুদিকের vertical লাইনদুটো (Fig 2), যাদের area এমনিতেই শূন্য। তাই মোট area আগের মতই থাকবে। ■

এই অংকে আমাদের কাজ করতে বলেছিল $(1, 2)$-র উপরে, কিন্তু আমরা Riemann integration লাগাবার জন্য $(1, 2)$-কে একটু বাড়িয়ে $[1, 2]$ করে নিয়েছিলাম। এটা করা গেল কারণ $f(x) = x + 1$ ফর্মুলাটা $x = 1$ আর $x = 2$-তে ব্যবহার করতে কোনো অসুবিধা ছিল না।
কিন্তু দুই প্রান্তে যে $f(x)$-এর একই ফর্মুলা লাগাতে হবে এমন কোনোই মানে নেই। যেমন নীচের উদাহরণে--

Example 2: $f(x) = \frac{1}{\sin x}$-কে (0,1]-এর উপরে integrate কর।

SOLUTION: এখানেও সেই একই কায়দা লাগানোর চেষ্টা করি-- $(0, 1]$-কে একটু বাড়িয়ে $[0, 1]$ করে নিই। বুঝতেই পারছ যে $x = 0$-তে $\frac{1}{\sin x}$ ফর্মুলাটা undefined. কিন্তু তাতে আমাদের কোনো মাথা ব্যথা নেই। আমরা $x = 0$-তে যা খুশী একটা value নেব, ধরো 2. তার মানে পেলাম--

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in (0, 1] \\ 2 & \text{if } x = 0 \end{cases}.$$

লক্ষ কর যে এই $g(x)$-টা পুরো $[0, 1]$-এর উপরেই defined. এটার খালি একটাই discontinuity আছে ($x = 0$-তে)। তাই $g(x)$-কে $[0, 1]$-এর উপরে Riemann integration করতে কোনোই বাধা নেই। সুতরাং আগের অংকের যুক্তি অনুসারে $g(x)$-কে $(0, 1]$-এর উপরে integrate করলেও একই উত্তর আসবে। কিন্তু $(0, 1]$-এর উপরে $f(x)$ আর $g(x)$ আসলে একই জিনিস। সুতরাং $f(x)$-কে $(0, 1]$-এর উপর integrate করলেও একই উত্তর আসবে। এই উত্তরটা ঠিক কত, সেটা নিয়ে আপাততঃ মাথা ঘামাচ্ছি না, integration-টা এখানে আদৌ করা সম্ভব সেটা দেখানোই আমাদের মূল উদ্দেশ্য ছিল। ■

বুঝতেই পারছ যে $f : [a, b] \to \mathbb{R}$-কে integrate করার জন্য $[a, b]$-র closed হওয়াটা ভীষণ গুরুত্বপূর্ণ কিছু নয়। কিন্তু বাকি দুটো শর্ত (মানে $[a, b]$-টা যে bounded, এবং f-ও যে bounded), এরা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এদের মধ্যে কোনোটা যদি পালিত না হয় তবেও কিন্তু কোনো কোনো ক্ষেত্রে integration করা সম্ভব। কিন্তু তখন আমরা Riemann integration কথাটা ব্যবহার না করে বলি improper integration. এবার তার কিছু উদাহরণ দেখি।

Example 3: ধরো $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. একে $(0, 1]$-এর উপরে integrate কর।

SOLUTION: এখানেও $(0, 1]$-কে বাড়িয়ে $[0, 1]$ করে দেওয়া কঠিন নয়, $f(0)$-কে যা হোক কিছু একটা define করে দিলেই হল। কিন্তু আসল সমস্যা অন্যখানে f-টা মোটেই bounded নয়! সুতরাং $f(0)$-কে যাই নিই না কেন $f(x)$-কে $[0, 1]$-এর উপরে Riemann integration করা যাবে না।
এইবার সমস্যা সত্যিই গুরুতর। সমাধানটাও জবরদস্ত্। ভালো করে বুঝে বুঝে পড়।
আমরা প্রথমেই একেবারে পুরো $(0, 1]$-এর দিকে হাত বাড়াব না। সমস্যাটা যেহেতু $x = 0$-তে, তাই ওটাকে একটু এড়িয়ে খালি $[0.1, 1]$-এর উপর integration করব। লক্ষ কর যে $[0.1, 1]$-এর উপরে $f(x)$-টা দিব্যি continuous, তাই Riemann

integration করতে কোনো অসুবিধা নেই। করে পাব

$$\int_{0.1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}|_{0.1}^{1} = 2(1 - 0.1^2).$$

এটা করতে পেরে আমাদের সাহস বেড়ে গেছে, এবার আমরা শূন্যর আরেকটুখানি কাছে এগোব--0.1-এর বদলে ধরো 0.01. তাহলে Riemann integration করলে পাব

$$\int_{0.01}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \cdots = 2(1 - 0.01^2).$$

যদি শূন্যর আরো আরো কাছে এগোতে থাকি, $0.001, \quad 0.0001, \ldots$ এইভাবে তবে বুঝতেই পারছ যে Riemann integral-টা

$$2(1 - 0.001^2), \quad 2(1 - 0.0001^2), \ldots$$

এইভাবে ক্রমশঃই 2-এর দিকে এগোবে। এইটা থেকে আমরা বুক ঠুকে দাবী করব যে গোড়ার improper integral-টা নিশ্চয়ই 2 হতে বাধ্য-- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$. ■

এখানে আমরা গুটি গুটি পায় শূন্যর দিকে এগোচ্ছিলাম $0.1, 0.01, 0.001, \ldots$ এইভাবে। অন্যভাবেও এগোতে পারতাম, যেমন $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ উত্তর সব ক্ষেত্রেই ওই 2-ই আসত। তাই আমরা যেটা করলাম সেটাকে এইভাবে লিখতে পারি--

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

ডানদিকের integral-টা হল Riemann integral, ওটার limit নিয়ে বার করছি বাঁদিকের improper integral-টা। জিনিসটা দেখতে একটু বিটকেল লাগতে পারে, ঘাবড়ে যেও না।
এখানে অবশ্য একটা প্রশ্ন উঠতেই পারে--যদি ডানদিকের ওই limit-টা exist না করে (বা ∞ কিংবা $-\infty$ হয়) তবে কী করব? এর সহজ উত্তর হল--তবে হাল ছেড়ে দেব, বলব, নাঃ এখানে improper integral -টা exist করে না (বা ∞ কিংবা $-\infty$-তে diverge করে)। এরকম একটা উদাহরণ দেখি।

Example 4: এই integral-টা বার কর--

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}.$$

SOLUTION: এখানে integrate করছি $f(x) = \frac{1}{x}$-কে, কিন্তু এটা স্পষ্ট করে বলে দেয় নি, যে integration-টা ঠিক কোন interval-এর উপরে হবে--$[0,1]$, নাকি $(0,1)$ নাকি $[0,1)$ নাকি $(0,1]$! সেটা বুঝে নেওয়া অবশ্য কঠিন নয়। যেহেতু $f(0)$ মোটেই defined নয়, তাই $[0,1]$ বা $[0,1)$ ব্যবহার করার প্রশ্নই ওঠে না। যেহেতু $f(1)$ নিয়ে সেরকম কোনো সমস্যা নেই, তাই $(0,1)$ বা $(0,1]$ যেটাই নিই একই ফল পাব। ধরো $(0,1]$ নিলাম।
এবার সেই limit-এর কায়দাটা করব--একটা কোনো $\epsilon > 0$ নিয়ে

$$\int_{\epsilon}^{1} f(x)dx$$

বার করব, তারপর $\epsilon \to 0+$ নিয়ে দেখব কী হয়! এখানে

$$\int_{\epsilon}^{1} f(x)dx = \int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{x} = -\log \epsilon.$$

তাই $\epsilon \to 0+$ নিলে পাব

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0+} -\log\epsilon = \infty.$$

তাই আমরা ঘোষণা করব যে এই improper integral-টা divergent to ∞. ■

Divergent to ∞ শুনে তোমার হয়তো infinite series-এর কথা মনে পড়ছে। এই মিলটা কাকতালীয় নয়, improper integral আর infinite series-এর মধ্যে সত্যিই আরো নানারকম মিল আছে। সেসব আমরা শীঘ্রই দেখব। কিন্তু তার আগে আরেক রকম improper integral-এর কথা জেনে রাখি।

Example 5: এই integral-টা বার কর--

$$\int_1^\infty e^{-x}dx.$$

SOLUTION: এখানে integrate করছি $f(x) = e^{-x}$-কে। Interval-টা হল $[1,\infty)$ বা $(1,\infty)$. এ দুটোর মধ্যে কোনটা নেব তাতে কিছু এসে যায় না, কারণ $x = 1$-এ $f(x)$-টার right hand limit দিব্যি exist করে--$f(1+) = e$. কিন্তু এখানে সমস্যা হল এই যে interval-টা ডানদিকে একেবারে ∞ অব্দি গেছে। এখানে আমরা প্রথমে integration-টা ∞-কে এড়িয়ে খালি $[1, M]$-এর উপরে করব, যেখানে $M > 1$ কোনো একটা সংখ্যা। এবার $M \to \infty$ নিয়ে দেখব কী হয়। $[1, M]$-এর উপরে তো চমৎকার Riemann integration করা যাবে--

$$\int_1^M e^{-x}dx = e - e^{-M}.$$

এবার $M \to \infty$ হলে পাব

$$\lim_{M\to\infty}\int_1^M e^{-x}dx = \lim_{M\to\infty}\left(e^{-1} - e^{-M}\right) = e^{-1} - 0 = e^{-1}.$$

তাই বলব যে আমাদের improper integral-টার value হল--

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = e^{-1}.$$

■

বুঝতেই পারছো যে একইভাবে limit নিয়ে $\int_{-\infty}^0 e^x dx$-ও বার করা যাবে। যদি limit-টা ∞ বা $-\infty$ হয়, তবে বলব যে improper integral-টা divergent to ∞ বা $-\infty$. আর যদি limit-টা আদৌ না exist করে, তবে তো ল্যাঠা চুকেই গেল, স্রেফ বলে দেব যে improper integral-টাও exist করে না!
এবার তবে যা যা শিখলাম সবকিছু অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখে নেওয়া যাক।

DEFINITION: **Improper integral (unbounded function)**

Let $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ be a function such that $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$ (or $-\infty$) and $\forall\epsilon > 0$ $f(x)$ is Riemann integrable on $[a + \epsilon, b]$. Then the **improper integral** $\int_a^b f(x)dx$ is defined as

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx.$$

If the RHS does not exist, then we say that the improper integral also does not exist.

DEFINITION: Improper integral (unbounded domain)

Let $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ be a function such that $\forall M>a \quad f(x)$ is Riemann integrable on $[a,M]$. Then the **improper integral** $\int_a^\infty f(x)dx$ is defined as

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)dx.$$

If the RHS does not exist, then we say that the improper integral also does not exist.

Exercise 1: বুঝতেই পারছ যে domain-টা যদি $(-\infty,a]$ নিতাম তবেও একইভাবে একটা সংজ্ঞা দেওয়া যাবে। সেটা লিখতে পারো? আর যদি $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ এমন হয় যে, $\lim_{x\to b-}f(x)=\infty$, তবে? ■

এবার নীচের অংকগুলো করে একটু হাত পাকিয়ে নাও।

Exercise 2: Find the following improper integrals.
(1) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2}$, **(2)** $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$, **(3)** $\int_1^\infty dx$, **(4)** $\int_{-1}^{-\infty}\frac{dx}{x^3}$.
■

Exercise 3: Find all possible values of $p\in\mathbb{R}$ for which $\int_0^1\frac{dx}{x^p}$ is finite. Also find all values of $p\in\mathbb{R}$ for which $\int_1^\infty\frac{dx}{x^p}$ is finite. ■

Exercise 4: Prove that $\int_0^a \log x dx$ converges for any $a>0$. ■

নীচের অংকদুটোয় একটু বুদ্ধি খাটাতে হবে।

Exercise 5: এই দুটো improper integral কি converge করে না diverge করে?
(1) $\int_1^\infty \frac{1}{x}+e^{-x^2}dx$. **(2)** $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$.
HINT:
আমরা জানি যে $\int_1^\infty\frac{dx}{x}=\infty$. আবার এটাও জানি যে $\int_1^\infty e^{-x}dx$-টা converge করে। এই দুটো তথ্য কাজে লাগিয়ে চেষ্টা কর। ■

Exercise 6: Find a value of the constant k for which the integral

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}-\frac{k}{x+1}\right)dx$$

is convergent. Evaluate the integral for that k.[2+2] **(2013.IV.1c)**
HINT: অংকটা দেখতে কঠিন লাগলেও আসলে সরাসরি সংজ্ঞা থেকেই করে ফেলা যাবে। প্রথমে লক্ষ করো যে integration-টা যদি ∞ পর্যন্ত না হয়ে কোনো $M\in\mathbb{R}$ পর্যন্ত হত তবে কাজটা হায়ার সেকণ্ডারীর বিদ্যে দিয়েই হয়ে যেত। সেটা করলেই পাবে--

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(x\sqrt{2}+\sqrt{1+2x^2})+c_1.$$

আর

$$\int \frac{dx}{x+1} = \log(x+1) + c_2.$$

সুতরাং integration-টা 0 থেকে কোনো $M > 0$ অব্ধি করলে হত

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \log(M\sqrt{2} + \sqrt{1+2M^2}) - k\log(M+1).$$

সব কিছুকে log-এর পেটে ভরে দিলে হবে log(কিছু একটা), যেখানে "কিছু একটা"-টা হল

$$\frac{(M\sqrt{2} + \sqrt{1+2M^2})^{1/\sqrt{2}}}{(M+1)^k}.$$

তুমি চাও এমন k যাতে এই জিনিসটার log একটা finite limit-এ যায়। তার জন্য এই জিনিসটাকে একটা finite positive limit-এ যেতে হবে। সেটা হতে পারে একমাত্র তখনই যখন উপর আর নীচের তলায় M-এর সবচেয়ে বড় power দুটো সমান হবে। উপর তলায় M-র সবচেয়ে বড় power হল $M^{1/\sqrt{2}}$. আর নীচের তলায় M^k. সুতরাং $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলেই আমাদের কাজ হবে।
এই অবস্থায় উপর আর নীচ থেকে $M^{1/\sqrt{2}}$ "কমন" নিয়ে নিলে--

$$\frac{M^{1/\sqrt{2}}(\sqrt{2} + \sqrt{M^{-2}+2})^{1/\sqrt{2}}}{M^{1/\sqrt{2}}(1+M^{-1})^{1/\sqrt{2}}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{M^{-2}+2})^{1/\sqrt{2}}}{(1+M^{-1})^{1/\sqrt{2}}} \to (2\sqrt{2})^{1/\sqrt{2}}.$$

সুতরাং উত্তরটা হল এর log, অর্থাৎ

$$\log(2\sqrt{2})^{1/\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \log 2.$$

■

যারা হায়ার সেকেণ্ডারীর বিচ্ছিরি বিচ্ছিরি substitution-ওয়ালা integration করতে একটুও ভালো বাসো না, তারা হয়তো এই অংকটা দেখে দমে গিয়ে ভাবছ--সেরেছে, improper integral মানেই বুঝি এরকম জগঝম্প লড়াই। তাদের অভয় দিয়ে বলি যে, ব্যাপারটা মোটেই তা নয়। Improper integral শেখার সময়ে আমরা integral-গুলোকে কষে ফেলার জন্য সাধারণতঃ ব্যস্ত হই না (কারণ বেশীর ভাগ সময়েই সেটা অসম্ভব)। আমরা মাথা ঘামাই খালি ওদের convergence নিয়ে। এবং সে কাজটা প্রায়শঃই অনেক সহজে করা যায়। সেদিক দিয়ে দেখলে এই অংকটা একটা ব্যতিক্রমী অংক।

Example 6: Let a function f be integrable on $[a, X]$ for all $X > a$ and $f(x) > 0$ for all $x \geq a$.

Prove that a necessary and sufficient condition for the convergence of the improper integral $\int_a^\infty f(x)dx$ is that there exists $K > 0$ such that $\int_a^X f(x)dx < K$ for all $X > a$.[3] **(2013.IV.1a)**
SOLUTION:

Let $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Then $F(x)$ is a nondecreasng function.

⟦ Because:

If $x < y$ then $F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt \geq 0, \because f(t) \geq 0.$

⟧

From standard result we know that a nondecreasing function converges if and only if it is bounded from above.

Hence the result.

■

27.1 Cauchy criterion

Analysis-এ আমাদের বিভিন্নরকমের limit নিয়ে কাজ করতে হয়--

- sequence-এর limit,
- function-এর limit,
- infinite series-এর limit,
- function-এর sequence-এর limit, ইত্যাদি।

এদের সবার ক্ষেত্রেই একটা করে Cauchy criterion আছে। Cauchy criterion-রা হল একটা limit কখন finitely exist করে তার necessary and sufficient condition. সরাসরি limit-এর সংজ্ঞা লাগিয়ে কোনো অংক করতে গেলে আমাদের limit-এর value-টা জানার দরকার হয়, কিন্তু Cauchy criterion লাগানোর জন্য সেটা না জানলেও চলে। তাই যেসব অংকে limit-টা বার করা কঠিন, কিন্তু খালি limit-টা যে কিছু একটা finite সংখ্যা সেটা দেখালেই চলে, সেখানে Cauchy criterion আদর্শ হাতিয়ার।
Improper integral-এর সংজ্ঞার মধ্যেও limit আছে, সুতরাং বলাই বাহুল্য যে এরও একটা Cauchy criterion থাকবে। Unbounded domain-এর বেলায় improper integral-এর Cauchy criterion-টা রয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 7: Let $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ be a function such that f is bounded and Riemann integrable over $[a, X]$ $\forall X > a$. Prove that the improper integral $\int_a^\infty f$ is convergent if and only if to every $\epsilon > 0$ there corresponds a positive number x_0 such that $\left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| < \epsilon$ for all $x_1, x_2 > x_0$.[3] **(2010.8a)**

SOLUTION: প্রথমে গুছিয়ে লিখে নিই--

Let

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

To show that $\lim_{x\to\infty} F(x)$ exists (finitely) iff

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x_0 > a \quad \forall x_1, x_2 > x_0 \quad \left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| < \epsilon. \qquad (\mathbf{1})$$

প্রমাণটার দুটো অংশ আছে--only if এবং if. আমরা only if দিয়ে শুরু করি।

Only if part: Let $\ell = \lim_{x\to\infty} F(x)$. To show

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x_0 > a \quad \forall x_1, x_2 > x_0 \quad |F(x_2) - F(x_1)| < \epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because \ell = \lim_{x\to\infty} F(x)$,

$\therefore \exists x_0 > a \quad \forall x > x_0 \quad |F(x) - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$.

$\exists x_0$ Choose this x_0.

Take any $x_1, x_2 > x_0$.

Then
$$|F(x_2) - F(x_1)| \leq |F(x_2) - \ell| + |F(x_1) - \ell| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$
as required.

এবার উল্টো দিকটা--

If part: Given
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x_0 > a \quad \forall x_1, x_2 > x_0 \quad |F(x_2) - F(x_1)| < \epsilon. \qquad (\mathbf{1})$$

To show that $\lim_{x\to\infty} F(x)$ exists (finitely).

By the sequential criterion of limit, enough to show that for every sequence $\{a_n\}_n$ with $a_n \to \infty$ the sequence $\{F(a_n)\}_n$ converges.

Take any sequence $\{a_n\}_n$ with $a_n \to \infty$.

By Cauchy criterion for convergence of sequences, enough to show that the sequence $\{F(a_n)\}_n$ is Cauchy, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |F(a_m) - F(a_n)| < \epsilon.$$

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because a_n \to \infty$,

$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n > x_0$.

Choose this $N \in \mathbb{N}$.

Take any $m, n \geq N$.

$\because a_m, a_n > x_0$,

$\therefore$ By $(\mathbf{1})$, $|F(a_n) - F(a_m)| < \epsilon$, as required.

■

Exercise 7: উপরের অংকে আমরা domain-টা নিয়েছিলাম $[a, \infty)$. যদি
$$(-\infty, a]$$
নিতাম তবে Cauchy criterion-টা কী হত? ■

যদি কোনো unbounded f-এর improper integral নিয়ে কাজ করি, তবে তার জন্যও Cauchy criterion আছে। সেটা এইরকম--

> Let $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ be a function such that $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$ (or $-\infty$) and $\forall \epsilon > 0 \;\; f(x)$ is Riemann integrable on $[a+\epsilon, b]$. Then the improper integral $\int_a^b f(x)dx$ exists finitely

iff

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in (a, a+\delta) \quad \left| \int_x^y f(t)dt \right| < \epsilon.$$

Exercise 8: আগের প্রমাণটার অনুকরণে এটা প্রমাণ করতে পারো? একেবারে একইভাবে করে গেলেই হবে। ■

DAY 28
উভয়সংকট

এতক্ষণ যে improper integral-গুলো বার করেছি, সেখানে সব সময়েই একটা করেই সমস্যা ছিল। কিন্তু কখনো কখনো একই integral-এ একাধিক সমস্যা থাকে। কয়েকটা উদাহরণ দেখি।

Example 8: বার কর--

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

SOLUTION: বুঝতেই পারছো যে এখানে দু প্রান্তেই বিপদ। ডানদিকে ∞, আর বাঁদিকে $x = 0$-র কাছে $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ক্রমশঃই unbounded রকমভাবে বেড়ে চলেছে। এরকম ক্ষেত্রে কায়দা হল দুটো সমস্যাকে আলাদা করে মোকাবিলা করা, মাঝখানে কোথাও একটা ভেঙে নিয়ে। যেমন যদি $x = 1$-এ ভাঙি তবে দুটো improper integral পাব--

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ আর } \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

এরা দুজনেই improper integral, কিন্তু প্রত্যেকেরই খালি একটা করেই সমস্যা। প্রথম improper integral-টা একটু আগের একটা অংকে বার করেছিলাম--

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

দ্বিতীয়টা বার করার চেষ্টা করব এইভাবে

$$\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{M\to\infty} 2(\sqrt{M} - 1) = \infty.$$

সুতরাং সব মিলিয়ে দাঁড়ালো

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \infty.$$

■

এইখানে একটু সাবধান। দুটো অংশে ভেঙে একটা দেখালাম 2, আর অন্যটা ∞. এ থেকে কী করে চট্ করে বলে দিলাম যে দুটো মিলিয়ে ∞ হবে? আশা করি তুমি ভুল করে ভাবছ না যে $2 + \infty = \infty$ হয়? মনে রেখো ∞ একটা চিহ্নমাত্র, কোনো সংখ্যা নয়। তাই ∞-র সঙ্গে কোনো যোগ-বিয়োগ চলে না। অর্থাৎ ∞-র সঙ্গে যাই যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ কর না কেন সবসময়েই উত্তর হবে undefined. কিন্তু তাহলে আমাদের improper integral-টা undefined না হয়ে ∞ হল কী করে? তার উত্তর আছে নীচের সংজ্ঞাটায়--

DEFINITION: Improper integral (domain, fn both unbdd)

Let $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ be any function such that $\forall M_1 < M_2 \in (a,\infty)$ $f(x)$ is Riemann integrable on $[M_1, M_2]$.
Let $f(x)\to\infty$ (or $-\infty$) as $x\to a+$. Then we define the **improper integral** $\int_a^\infty f(x)dx$ as

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{M_1\to a+\\ M_2\to\infty}} \int_{M_1}^{M_2} f(x)dx.$$

লক্ষ কর যে এখানে কিন্তু দুটো আলাদা integral-এর limit নিই নি, একটার উপরেই দুটো limit লাগিয়েছি। একটার মধ্যে এরকম দুটো limit আমরা এই বইয়ে আগে কোথাও করি নি। এই জিনিসটার অর্থ কী সেটা বলে নিই। যদি আমরা বলি

$$\lim_{\substack{M_1\to a+\\ M_2\to\infty}} F(M_1, M_2) = \ell \quad (\in\mathbb{R}),$$

তার মানে হল

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \exists B>0 \quad \forall M_1\in(a,a+\delta) \quad \forall M_2>B \quad |F(M_1,M_2)-\ell|<\epsilon.$$

এই রকম একসাথে দুটো limit নেওয়াকে বলে double limit. ব্যাপারটা মোটামুটিভাবে আমরা যে সাধারণ limit-এর কথা শিখেছি তারই মত, খালি একটা গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে-- যদি $f(x)$ আর $g(x)$ দুটো function হয় যেখানে $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ আর $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, তবে $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ সম্পর্কে কিছুই বলা যায় না, ∞ হতে পারে, $-\infty$ হতে পারে, যে কোনো finite সংখ্যা হতে পারে, এমন কি exist নাও করতে পারে। (এরকম একটা করে উদাহরণ দিতে পারো?)। কিন্তু double limit-এর বেলায় ব্যাপারটা একটু অন্যরকম--যদি $f(x), g(x)$ এমন দুটো function হয়, যাতে

$$\lim_{M_1\to a+} f(M_1)=\infty \quad \text{আর} \quad \lim_{M_2\to\infty} g(M_2) = -\infty,$$

তবে নির্দ্বিধায় বলা যায় যে

$\lim_{\substack{M_1\to a+\\ M_2\to\infty}} \big(f(M_1)+g(M_2)\big)$ অবশ্যই undefined হতে বাধ্য!

এই ব্যাপারটা হয় বলেই আমরা আগের উদাহরণের মত সব সময়েই কাজটা দুটো integral-এ ভেঙে করতে পারি। যদি দুটো integral-ই finite আসে তবে এমনি যোগ করে দিলেই হয়, যদি একজন ∞ (বা $-\infty$) হয়, আর অন্যজন finite হয়, তবে দুটো মিলে হবে ∞ (বা $-\infty$). যদি দুজনেই ∞ (বা $-\infty$) হয়, তবেও তাই। আর যদি একজন ∞, অন্যজন $-\infty$ হয়, তবে দুজনে মিলে হবে undefined. নীচের টেবিলটা দেখলে বুঝতে সুবিধা হবে।

	$\mathbb{R}$	∞	$-\infty$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	∞	$-\infty$
∞	∞	∞	$\times$
$-\infty$	$-\infty$	$\times$	$-\infty$

এরকম একটা উদাহরণ দেখি।

Example 9: বার কর

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx.$$

SOLUTION: প্রথমে দুটো integral-এ ভাঙি, ধরো 0-তে ভাঙলাম। তবে পাব

$$\int_{-\infty}^{0} x\,dx \text{ আর } \int_{0}^{\infty} x\,dx.$$

প্রথমটা হল

$$\lim_{M\to-\infty}\int_{M}^{0} x\,dx = \lim_{M\to-\infty} -\frac{M^2}{2} = -\infty$$

দ্বিতীয়টা হবে

$$\lim_{N\to-\infty}\int_{0}^{N} x\,dx = \lim_{N\to-\infty} \frac{N^2}{2} = \infty.$$

একটা এলে ∞ অন্যটা $-\infty$. তাই এক্ষেত্রে বলব যে মূল improper integral-টা ছিল undefined. ■

আরেকটা উদাহরণ দেখা যাক। এটা একটু অন্যরকম।

Example 10: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} =?$

SOLUTION: এখানে সমস্যাটা দুই প্রান্তে নয়, সমস্যা হল মধ্যিখানে--$x = 0$-তে, কারণ ওখানে $\frac{1}{x}$ তো defined নয়ই এমন কি ওর limit-ও বাঁদিক থেকে $-\infty$ আর ডানদিক থেকে ∞. যেহেতু এখানে interval-টা হল $[-1, 1]$ (বা $(-1, 1)$, তাতে কিছু এসে যায় না), সুতরাং এখানে আসলে দুটো সমস্যা একটা $x = 0$-র বাঁদিকে, অন্যটা ডানদিকে। সেই মত দুটো ভাগে ভাঙি--

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} \text{ আর } \int_{0}^{1} \frac{dx}{x}.$$

এখানে

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{dx}{x} &= \lim_{\epsilon\to0+}\int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{x}\\ &= \lim_{\epsilon\to0+} -\log\epsilon = \infty.\end{aligned}$$

একইভাবে অন্য integral-টা হবে

$$\lim_{\delta\to0+}\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} = \cdots = -\infty.$$

সুতরাং দুটো মিলিয়ে পেলাম

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = \text{ undefined.}$$

■

আমরা একটু আগে যে তালিকাটা দিয়েছি সেটা কিন্তু সম্পূর্ণ নয়। আমরা বলি নি যে দুটো integral-এর মধ্যে কেউ যদি exist না করে তবে মূল integral-টা কী হবে? সেটাও কি exist করবে না? উঁহু! জোর দিয়ে সেটা সব সময়ে বলা যায় না। যদি অন্যটা finite হয়, তবে মূল integral-টা অবশ্যই exist করবে না, কিন্তু যদি অন্যটা $\infty, -\infty$ বা undefined হয়, তবে এক কথায় কিছু বলা যাবে না। হাতে সময় থাকলে এরকম বিভিন্ন উদাহরণ বানানোর চেষ্টা করতে পারো--দুজনেই undefined, কিন্তু মূল integral-টা finite, কিংবা সেটাও undefined ইত্যাদি। এই বইয়ে আমরা আর সে প্রসঙ্গে যাব না। আমরা অনেকগুলো উদাহরণ দেখলাম যেখানে একই integral-এর মধ্যে দুই জায়গায় সমস্যা ছিল। এমন হতেই পারে যে, তিন বা তার চেয়েও বেশী জায়গায় সমস্যা আছে। সে সব ক্ষেত্রেও একই কায়দা খাটবে--আমরা মূল integral-টাকে অনেকগুলো

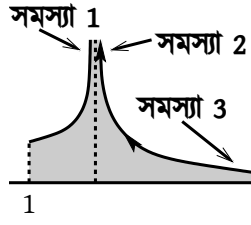
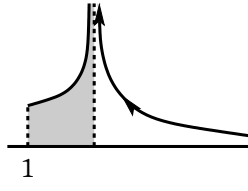



Fig 3 **Fig 4**

টুকরোতে ভেঙে নেব, যাতে প্রত্যেকটা টুকরোতে খালি একটা করেই সমস্যা থাকে। যেমন Fig 3-এর function-টার বেলায় $\int_1^\infty f(x)dx$ বার করতে গেলে তিন জায়গায় সমস্যা। আমরা এটাকে তিন টুকরো করে ভেঙে নিতে পারি Fig 4-এর মত করে।

যদিও প্রায় সব অংকেই এভাবে একটা improper integral-কে টুকরো করে ভেঙে নিলে সুবিধা হয়, অল্প কিছু ক্ষেত্রে সরাসরি double limit লাগানো সহজ হয়। এরকম একটা উদাহরণ নীচের অংকটা।

Example 11: Let ϕ be continuous on $(0,\infty)$ and

$$\lim_{x\to 0+}\phi(x)=\phi_0 \text{ and } \lim_{x\to\infty}\phi(x)=\phi_1.$$

Prove that

$$\int_0^\infty \frac{\phi(ax)-\phi(bx)}{x}dx=(\phi_0-\phi_1)\log\tfrac{b}{a},\quad b>a>0.$$

[4] **(2003.7b)**

SOLUTION:

$$\begin{aligned}
& \int_\epsilon^M \frac{\phi(ax)-\phi(bx)}{x}dx\\
=& \int_\epsilon^M \frac{\phi(ax)}{x}dx-\int_\epsilon^M \frac{\phi(bx)}{x}dx\\
=& \int_{a\epsilon}^{aM} \frac{\phi(t)}{t}dt-\int_{b\epsilon}^{bM} \frac{\phi(t)}{t}dt \quad \left[\text{puting } t=ax \text{ and } t=bx\right]
\end{aligned}$$

এইখানে একবার Fig 5-দের দিকে তাকিয়ে নিলে সুবিধা হবে। তাহলে বুঝতে পারবে দুটো integral-এর মধ্যে মাঝখানে অনেকটা overlap আছে, সেই অংশটা কেটে যাবে। ফলে পড়ে থাকবে--

$$\begin{aligned}
=& \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{\phi(t)}{t}dt-\int_{aM}^{bM} \frac{\phi(t)}{t}dt\\
=& \phi(\xi_1)\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{dt}{t}-\phi(\xi_2)\int_{aM}^{bM} \frac{dt}{t} \quad [\text{ by MVT for } \xi_1\in(a\epsilon,b\epsilon) \text{ and } \xi_2\in(aM,bM).]\\
=& \phi(\xi_1)\log\tfrac{b}{a}-\phi(\xi_2)\log\tfrac{b}{a}\\
=& (\phi(\xi_1)-\phi(\xi_2))\log\tfrac{b}{a}.
\end{aligned}$$

bM

$a\epsilon$ aM

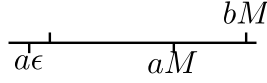



Fig 5

> Letting $\epsilon \to 0+$ and $M \to \infty$ we have, by sandwich law, $\xi_1 \to 0+$ and $\xi_2 \to \infty$.
> So by the given condition $\phi(\xi_1) \to \phi_0$ and $\phi(\xi_2) \to \phi_1$.
> Hence
> $$\int_0^\infty \frac{\phi(ax) - \phi(bx)}{x} dx = (\phi_0 - \phi_1) \log \tfrac{b}{a},$$
> as required.

■

নীচের অংকটা এটারই একটা প্রয়োগ।

Example 12: Assuming that the integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + \alpha^2 x^2}$$

converges uniformly to $\frac{\pi}{2\alpha}$, $(\alpha > 0)$, show that

$$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(bx) - \tan^{-1}(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \log\left(\frac{b}{a}\right), \quad b > a > 0.$$

(2003.8c)

SOLUTION: এখানে "converges uniformly" দেখে ঘাবড়ে যেও না। আগের অংকে $\phi(x) = \tan^{-1} x$ বসালেই এটা পাবে। আমরা পরের অধ্যায়ে গিয়ে শিখব "converges uniformly" মানে কী, এই অংকে মোটেই সেটা লাগবে না। ■

28.1 Cauchy-principal value

ধরো এই improper integral-টা নিলাম--$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$. এটাতে দুটো সমস্যা আছে--এক, 0-র বাঁদিকে, আর দুই, 0-র ডানদিকে। সুতরাং এটাকে 0-তে ভেঙে দুটো integral করে নিতে হবে, অর্থাৎ এই double limit-টা নিয়ে কাজ করতে হবে--

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{\delta \to 0+ \\ \epsilon \to 0+}} \int_{-\delta}^{\epsilon} \frac{dx}{x}.$$

এখানে দুটো limit-ই এগোচ্ছে 0-র দিকে, একজন বাঁদিক থেকে অন্যজন ডানদিক থেকে। ব্যাপারটার মধ্যে একটা symmetry-র গন্ধ আছে। আরেকটা উদাহরণ হল

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx = \lim_{\substack{M \to -\infty \\ N \to \infty}} \int_M^N x\, dx.$$

সবক্ষেত্রেই যে symmetry থাকবে এমন কোনো কথা অবশ্য নেই, যেমন

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{\delta\to 0+\\ N\to\infty}} \int_\delta^N \frac{dx}{x}.$$

যেসব ক্ষেত্রে symmetry থাকে, সেখানে ছাত্রদের মধ্যে একটা প্রবণতা থাকে দুটো limit-কে মিলিয়ে একটা limit করে দেওয়া। মানে,

$$\lim_{\substack{M\to -\infty\\ N\to\infty}} \int_M^N x\,dx$$

না লিখে

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^N x\,dx$$

লেখা। দ্বিতীয় integral-টা কিন্তু মোটেই $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ নয়। সেটা দেখা খুবই সহজ। আমরা আগেই দেখেছি যে $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ হল undefined. কিন্তু

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^N x\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{N^2-(-N)^2}{2} = 0.$$

যাই হোক এই জিনিসটারও একটা নাম আছে, একে বলে Cauchy principal value of $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$. সংজ্ঞাটা এইরকম--

DEFINITION: **Cauchy principal value (type 1)**

Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be such that for all $N>0$ it is Riemann integrable over $[-N,N]$. Then the **Cauchy principal value** of $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. is defined as

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^N f(x)dx.$$

অন্যধরণের symmetric ক্ষেত্রেও Cauchy principal value বার করা যায়--

DEFINITION: **Cauchy principal value (type 2)**

Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ have an infinite discontinuity only at some $c\in(a,b)$. If for all $p\in(a,c)$ and for all $q\in(c,b)$ the function f is Riemann integrable over $[a,p]$ and $[q,b]$, then the **Cauchy principal value** of $\int_a^b f(x)dx$ is defined as

$$\lim_{\epsilon\to\infty}\left[\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx\right].$$

মনে রেখো যে, কোনো improper integral যদি exist নাও করে, তাও তার Cauchy principal value কিন্তু exist করতেই পারে। একটা উদাহরণ তো এক্ষুণি দেখলাম। আরেকটা উদাহরণ রয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 13: Show that

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$$

does not exist. Does its Cauchy-principal value exist? Justify your answer.[3] **(2009.7ci)**

SOLUTION:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$$

exists iff

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3} \text{ and } \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3}$$

both exist.

Now

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3} &= \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{x^3} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon\to 0+} \left[\frac{1}{x^2}\right]_{\epsilon}^{1} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon\to 0+} \left[\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right],\end{aligned}$$

which is not finite. So the given integral does not exist.

However, the Cauchy-principal value is

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0+} \left[\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{x^3}\right] \\ =& \lim_{\epsilon\to 0+} \left[\int_{1}^{\epsilon} \frac{dy}{y^3} + \int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{x^3}\right] \quad \left[\text{putting } y = -x\right] \\ =& \lim_{\epsilon\to 0+} \left[-\int_{\epsilon}^{1} \frac{dy}{y^3} + \int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{x^3}\right] \\ =& \lim_{\epsilon\to 0+} 0 = 0.\end{aligned}$$

So the Cauchy-principal value exists and equals 0.

■

একইরকম আরেকটা অংক।

Exercise 9: Does the following improper integral exist?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Does its Cauchy principal value exist? ■

এই অংকটা যদি করতে পেরে থাকো তবে একটা ঠকানো প্রশ্ন চেষ্টা করে দ্যাখো--

Exercise 10: এমন একটা $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ দিতে পারো যেটা যে কোনো $N>0$-এর জন্যই $[-N,N]$-এর উপর Riemann integrable, কিন্তু $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$-টা exist করে না, আবার Cauchy principal value হয় 1? ■

Cauchy principal value শিখে আমাদের লাভ কী? উত্তর হল--এর সাহায্যে কোনো কোনো ক্ষেত্রে একটা improper integral-এর value খুব সহজে বার করা যায়। যেমন নীচের অংকটায়।

Exercise 11: যদি $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ একটা odd function হয় (মানে $f(-x)=-f(x)$ হয়), যেটা যেকোনো closed, bounded interval-এর উপরেই Riemann integrable, এবং $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge করে, তবে দেখাও যে improper integral-টা 0 হতে বাধ্য। ■

DAY 29
Infinite series-এর সঙ্গে তুলনা

Infinite series-এর সঙ্গে যে improper integral-এর যে বেশ মিল আছে তার আভাস আমরা ইতিমধ্যেই পেয়েছি। কেন মিল আছে সেটা আন্দাজ করা কঠিন নয়। Riemann integral-এর সঙ্গে sum ব্যাপারটার ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক (Darboux sum, Riemann sum ইত্যাদি)। Riemann integral-এর limit নিয়ে তৈরী হয় improper integral, আর একইভাবে partial sum-দের limit নিলে পাই infinite series. সুতরাং দুয়ের মধ্যে মিল না থাকলেই আশ্চর্য হত।
এই মিলটা খুব ভালোভাবে ধরা পড়েছে নীচের অংকটায়, যেটা আসলে একটা theorem.

Example 14: Suppose $f\geq 0$ and f is monotonically decreasing on $[1,\infty)$. Prove that the improper integral $\int_1^{\infty} f$ and the series $\sum_1^{\infty} f(n)$ converge or diverge together.[3] **(2010.8b)**

SOLUTION: এই অংকটা ছবি দিয়ে বুঝতে খুব সহজ। আমাদের একটা function দিয়েছে f যেটা $[1,\infty)$-র উপরে defined, এবং decreasing. এরকম একটা গ্রাফ এঁকেছি Fig 6-এ। আমাদের কাজ করতে হবে $\int_1^{\infty} f(t)dt$ নিয়ে, তার মানে গ্রাফের নীচের মোট area. এবার Fig 7-এর rectangle-গুলোকে দ্যাখো। প্রথমটার উচ্চতা $f(1)$, দ্বিতীয়টার $f(2)$, ইত্যাদি। যেহেতু চওড়ায় এরা সকলেই 1, তাই এদের area-ও হল $f(1),f(2),...$ ইত্যাদি। সুতরাং এদের মোট area হল

$$\sum_1^{\infty} f(n).$$

দেখতেই পাচ্ছ যে rectangle-গুলো সবাই গ্রাফের উপরে মাথা তুলেছে (কারণ f হল decreasing). তাই rectangle-গুলোর মোট area অবশ্যই f-এর নীচের মোট area-র থেকে বেশী হবে। সুতরাং $\sum_1^{\infty} f(n)<\infty$ হলে $\int_1^{\infty} f(x)dx<\infty$ হতে বাধ্য।
আবার যদি rectangle-গুলো Fig 8-এর মত করে নিতাম, তবে ওদের মোট area হল

$$f(2)+f(3)+\cdots=\sum_2^{\infty} f(n)<\int_1^{\infty} f(t)dt.$$

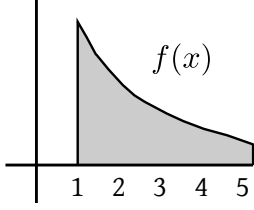
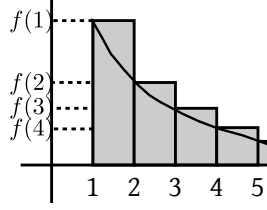
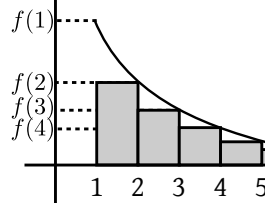
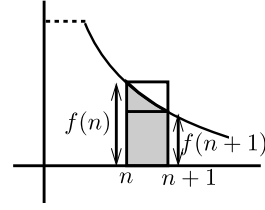



Fig 6 **Fig 7** **Fig 8** **Fig 9**

সুতরাং improper integral-টা converge করলে infinite series-টাও converge করতে বাধ্য।
এবার সেটা গুছিয়ে লিখি। আমাদের কাজ করতে হবে $\int_1^\infty f(t)dt = \lim_{x\to\infty} F(x)$ নিয়ে, যেখানে--

> Let $F(x) = \int_1^x f(t)dt$,
> It is well-defined, because $f(t) \geq 0$ is monotone and hence Riemann integrable on $[0, x]$.

Closed, bounded interval-এর উপরে monotone function-রা যে Riemann integrable হয়, সেটা নিশ্চয়ই ভুলে যাও নি?
আমাদের নাটকের দ্বিতীয় চরিত্র হল $\sum_1^\infty f(n) = \lim_{n\to\infty} S_n$, যেখানে--

> Let $S_n = \sum_1^n f(k)$.

আমাদের দেখাতে হবে যে $\lim_{x\to\infty} F(x)$ আর $\lim_{n\to\infty} S_n$-এর মধ্যে যে কোনোটা exist করলেই অন্যটাও করবে। এবার লক্ষ করো যে $f \geq 0$ হওয়ায় $F(x)$ একটা nondecreasing function আর $\{S_n\}_n$ একটা nondecreasing sequence. তাই ওদের convergence দেখানোর জন্য bounded from above দেখানোই যথেষ্ট।

> $\because f \geq 0$,
> $\therefore F(x)$ and $\{S_n\}_n$ are nondecreasing.

তার মানে দেখাতে হবে যে এদের মধ্যে একজন bounded from above হলেই অন্যজনও তাই হবে।

> Enough to show that
>
> $$F(x) \text{ bounded from above} \iff \{S_n\}_n \text{ bounded from above.}$$

ছবিগুলো থেকে যা বুঝেছিলাম এবার সেটা কাজে লাগবে। তাই সেটাকে অংকের ভাষায় লিখে নিই। Fig 9 দ্যাখো। এখানে গ্রাফের নীচে n থেকে $n+1$ পর্যন্ত area-টুকু নিয়ে কাজ করছি। এর উপরে নীচে দুটো rectangle এঁকেছি, বড়টার area হল $f(n)$, ছোটোটার $f(n+1)$.

> Define $a_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.
> Since $f(t)$ is decreasing,
>
> $$\therefore \forall t \in [n, n+1] \quad f(n) \geq f(t) \geq f(n+1).$$

Integrating,

$$\int_n^{n+1} f(n)dt \geq \int_n^{n+1} f(t)dt \geq \int_n^{n+1} f(n+1)dt,$$

ie,

$$f(n) \geq a_n \geq f(n+1).$$

ব্যস্, মঞ্চ নির্মাণ শেষ। এবার একে একে দুটো দিক প্রমাণ করি--

$\Longleftarrow$ part: Let $\{S_n\}_n$ be bounded from above by A, say.

Shall show that $F(x)$ is bounded from above, ie,

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [1,\infty) \quad F(x) \leq M.$$

$\boxed{\exists M}$ Choose $M = A$.

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in [1,\infty)$.

Let $n \in \mathbb{N}$ be any integer $\geq x$.

Then

$$\begin{aligned} F(x) &\leq F(n) \quad \left[\because F \text{ is nondecreasing}\right] \\ &= \sum_1^{n-1} a_k \\ &\leq \sum_1^{n-1} f(k) \\ &= S_{n-1} \\ &\leq M. \end{aligned}$$

as required.

এবার অন্যদিকটা একইভাবে প্রমাণ করব।

$\Longrightarrow$ part: Let $F(x)$ be bounded from above by B, say.

To show: $\{S_n\}_n$ is bounded from above, ie,

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \leq K.$$

$\boxed{\exists K}$ Choose $K = f(1) + B$.

$\boxed{\forall n}$ Take any $n \in \mathbb{N}$.

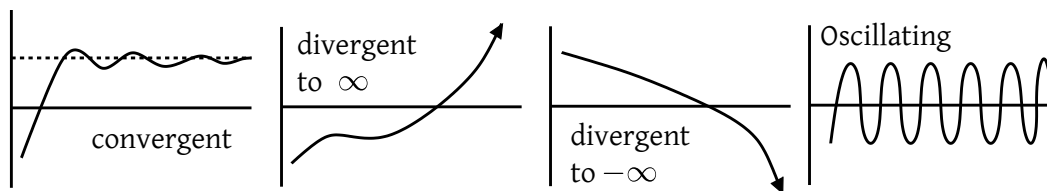



Fig 10

$$\begin{aligned} S_n &= f(1)+f(2)+\cdots+f(n) \\ &\le f(1)+a_1+\cdots+a_{n-1} \\ &= f(1)+F(n-1) \\ &\le f(1)+B, \end{aligned}$$

■

29.1 Absolute and conditional convergence

Improper integral বার করা মানে হল প্রথমে Riemann integration করে তারপর limit নেওয়া। এখানে গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্নটা হল limit-টা কখন exist করবে। আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম যে, limit চার রকমের হয়--হয় কোনো সংখ্যা, নয় তো ∞ বা $-\infty$, আর নয় তো function-টা oscillate করে, কোনো কিছুর দিকেই এগোয় না। Fig 10-এ একটা করে উদাহরণ দেখানো আছে। এই চার রকমের মধ্যে সবচেয়ে ঝামেলার হল ওই শেষের কেসটা, যাকে ইংরাজীতে বলে oscillating. কিন্তু একধরণের function আছে যাদের limit-এর বেলায় কখনও এই oscillation-এর সমস্যা হয় না, এরা হল monotone function, যারা এই বইয়ের আগের দুই খণ্ডে ইতিমধ্যেই আমাদের বার বার সাহায্য করেছে। Monotone function-দের সুবিধা হল এরা সব সময়েই এক দিকে এগোয়, যদি ওঠে তো উঠেই চলে, কখনো নামে না; আবার যেগুলো নামে সেগুলো ভুলেও কখনও ওঠে না। সেই কারণে এরা কখনো oscillate করতে পারে না। এবার দেখি improper integral-এর বেলায় এরা কী উপকারে আসে।
ধরো আমরা $\int_0^\infty f(t)dt$ বার করতে চাই, তার মানে এই limit-টা--

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to\infty} F(x),$$

যেখানে

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Limit-টা চাররকমের যেকোনো একটা রকমের হতে পারে--কোনো finite সংখ্যা, বা ∞ বা $-\infty$ বা oscillating.
কিন্তু যদি $f(t)$ একটা nonnegative function হয়, মানে $\forall t \quad f(t)\ge 0$ হয়, তবে লক্ষ কর যে $F(x)$ হবে একটা monotone function (nondecreasing). কারণ, যদি যে কোনো $0<a<b$ নাও, তবে--

$$F(b) = \int_0^b f(t)dt = \int_0^a f(t)dt + \int_a^b f(t)dt = F(a) + \int_a^b f(t)dt \ge F(a),$$

যেহেতু f এখানে nonnegative হওয়াতে $\int_a^b f(t)dt \geq 0$ হবে $(a < b)$.
সুতরাং $\lim_{x\to\infty} F(x)$ হবে হয় একটা finite সংখ্যা নয় তো ∞.
একইভাবে যদি $f(t)$ হত একটা non-positive function তবে limit-টা হত একটা finite সংখ্যা বা $-\infty$.
এই কারণে non-negative বা non-positive function-দের improper integral বার করার কাজটা অপেক্ষাকৃত সহজ। কিন্তু যেসব function কখনো positive কখনো negative হয়, তাদের বেলায় কী করব? তাদের বেলাতে oscillation-এর সমস্যা হতেই পারে। কিন্তু সেখানেও কোনো কোনো ক্ষেত্রে একটা কায়দা করা যায়--absolute value নিয়ে নেওয়া। যেমন যদি $\int_0^\infty f(x)dx$ দিয়ে exist করে কি না দেখাতে বলে, যেখানে $f(x)$-টা positive, negative দুরকম value-ই নেয়, তবে আমরা প্রথমে $|f(x)|$-এর improper integral-টা exist করে কি না দেখব (সেটা দেখা সহজ, কারণ $|f(x)|$ অবশ্যই nonnegative). যদি

$$\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty$$

হয়, তবে দেখানো যায় যে $\int_0^\infty f(x)dx$-ও finite হতে বাধ্য, এক্ষেত্রে আমরা বলি $\int_0^\infty f(x)dx$ হল absolutely convergent. অবশ্য যদি $\int_0^\infty |f(x)|dx = \infty$ হয়, তবে $\int_0^\infty f(x)dx$-এর বিষয়ে জোর দিয়ে কিছু বলা যায় না, সেটা চার রকমের যে কোনোটাই হতে পারে।

DEFINITION: Absolutely/conditionally convergent

Let $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ be a function such that $\forall x > a$ it is Riemann integrable over $[a, x]$. Then the improper integral is called **absolutely convergent** if

$$\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty.$$

The improper integral is called **conditionally convergent** if

$$\int_0^\infty |f(x)|dx = \infty \text{ but } \int_0^\infty f(x)dx \text{ is finite.}$$

তার মানে শিক্ষণীয় এই যে nonnegative function-দের (বা nonpositive-দের) improper integral নিয়ে কাজ করাটা সবচেয়ে সুবিধাজনক। বাকীদের মধ্যে যে সব ক্ষেত্রে absolute convergence হয়, তাদের নিয়ে কাজ করাও খুব কঠিন নয়। বাকীদের বেলায় oscillation-এর সম্ভাবনা থেকেই যায়, তাই সেগুলো সবচেয়ে ঝামেলাজনক। এরকম একটা ঝামেলার একটা ছোট্টো উদাহরণ দেখা যাক। ধরো এই function-টা--

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x > 0.$$

Fig 11

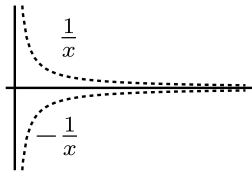



Fig 12

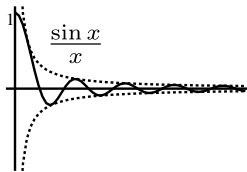
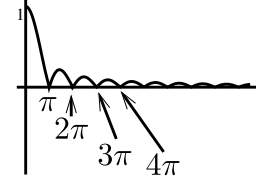



Fig 13

দেখাব যে, এটার improper integral হল conditionally convergent, মানে convergent কিন্তু absolutely convergent নয়। প্রথমে বুঝে রাখি যে $f(x)$-এর গ্রাফটা কি রকম হবে। আমরা জানি $\sin x$-এর গ্রাফ হয় ঢেউ খেলানো, -1 থেকে 1-এর মধ্যে ওঠানামা করে। এখানে

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \sin x,$$

তাই এই গ্রাফটাও হবে ঢেউ খেলানো, কিন্তু ওঠানামা করবে $-\frac{1}{x}$ থেকে $\frac{1}{x}$-এর মধ্যে। আগে তাই $-\frac{1}{x}$ এবং $\frac{1}{x}$-এর গ্রাফ দুটো ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইন দিয়ে এঁকে নিই (Fig 11). আমরা আরো জানি যে $x \to 0$ হলে $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ হয়। তাই আমরা y-axis-এর উপর 1 বিন্দু থেকে শুরু করে একটা ঢেউ খেলানো লাইন এঁকেছি, ঠিক $\sin x$-এর মত করেই, খালি নীচে $-\frac{1}{x}$ থেকে উপরে $\frac{1}{x}$ পর্যন্ত (Fig 12)।
গ্রাফটার চেহারা ভালো করে বুঝে নিয়ে এবার নীচের অংক দুটো দ্যাখো।

Example 15: Show that

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

is not absolutely convergent.[3] **(2009,2013)**
SOLUTION: এখানে আমরা কাজ করব

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin x}{x}\right|$$

নিয়ে। সেটার গ্রাফটা আঁকা সোজা, $f(x)$-এর গ্রাফে x-axis-এর নীচে যা যা অংশ আছে সেগুলোকে ভাঁজ করে উপরে তুলে দিলেই হবে (Fig 13). আমরা দেখাব যে এই গ্রাফের নীচের মোট area-টা হল infinite. লক্ষ কর যে এই area-টা অনেকগুলো ঢিপি জুড়ে জুড়ে তৈরী। আমরা দেখাব যে এই ঢিপিগুলোর মোট area হবে infinite. এখানে প্রথম ঢিপিটা আছে 0 থেকে π পর্যন্ত, দ্বিতীয়টা π থেকে 2π পর্যন্ত, এইরকম। সুতরাং k নম্বর ঢিপিটার area হল

Let $a_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx.$

এই integral-টা বার করার কোনো সহজ কায়দা মাথায় আসছে না। সুতরাং একটা approximation করার চেষ্টা করি--

Then

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\
&\geq \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx \\
&= \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi |\sin x| dx \quad [\because |\sin x| \text{ has period } \pi.] \\
&= \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \sin x dx \quad [\because x \in [0,\pi] \implies \sin x \geq 0] \\
&= \frac{1}{k\pi} \big[-\cos x\big]_0^\pi = \frac{2}{k\pi}.
\end{aligned}$$

সুতরাং বুঝতেই পারছ যে

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdot\right].$$

এই ডানদিকের series-টা আমাদের অপরিচিত নয়--harmonic series, যেটা ∞-তে diverge করে। সুতরাং আমাদের গ্রাফের নীচের মোট area-টাও ∞-তে diverge করে বাধ্য। এবার এই কথাটাই গুছিয়ে লিখতে হবে।

Let

$$F(y) = \int_0^y \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx, \quad y > 0.$$

Shall show that

$$\lim_{y\to\infty} F(y) = \infty.$$

For any $y > 0$ let $n \geq 0$ be the largest integer such that $n\pi \leq y$.

Then

$$\begin{aligned} F(y) &= a_1 + \cdots + a_n + \int_{n\pi}^y \left|\tfrac{\sin x}{x}\right| dx \\ &\geq a_1 + \cdots + a_n \\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_1^n \frac{1}{k} \to \infty, \end{aligned}$$

as required ($\because \sum_1^\infty \frac{1}{k} = \infty$).

■

এবার দেখাব যে $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ হল convergent. এখানেও ঢিপি ধরে ধরে এগোব, খালি এবার ঢিপিগুলো একবার x-axis-এর উপরে, তারপর নীচে, তারপর ফের উপরে, তারপর ফের নীচে--এইভাবে চলছে।

Example 16: Show that $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ is convergent.

SOLUTION:

$\because \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$, which is finite,

$\therefore$ the integral is proper at $x = 0$.

Let

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

and

$$a_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt.$$

Fig 14 দেখে নাও। এইবার ঢিপিগুলোর signed area-গুলো যোগ করব। লক্ষ কর যে ঢিপিগুলো ক্রমশঃই ছোটো হতে হতে শূন্যে মিলিয়ে যাচ্ছে। এবং signed area-গুলো $+, -, +, -, \ldots$ এইভাবে alternate করছে। সুতরাং Leibnitz test বলে যে $\sum(-1)^{k+1}a_k$ converge করতে বাধ্য। এই কথাটা আগে গুছিয়ে লিখে নিই--

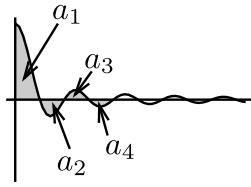



Fig 14

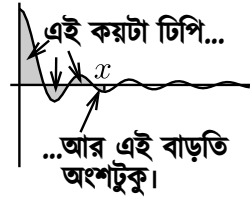



Fig 15

Then putting $u = t - (k-1)\pi$,

$$a_k = \int_0^\pi \frac{|\sin u|}{u + (k-1)\pi} du,$$

which decreases to 0 as $k \to \infty$.
So, by Leibnitz's test, $\sum (-1)^{k+1} a_k$ converges, to some ℓ, say.

এইবার দেখাব যে গ্রাফের নীচের পুরো signed area-টাও ℓ হতে বাধ্য।

Shall show that $\lim_{x\to\infty} F(x) = \ell$, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x \geq A \quad |F(x) - \ell| < \epsilon.$$

Take any $\epsilon > 0$.

এবার যা করব সেটা খুবই সহজ--$F(x)$-এর মধ্যে আছেটা কী? কয়েকটা ঢিপি আর শেষ ঢিপিটার পরে হয়তো খানিকটা বাড়তি (signed) area. Fig 15 দ্যাখো। ঢিপিগুলোর মোট signed area তো ℓ-এর দিকে যাচ্ছেই, আর ওই বাড়তি অংশটুকু তো পুরো একটা ঢিপির চেয়েও কম। যেহেতু ঢিপিগুলো ক্রমশঃই ছোটো ছোটো হতে হতে শূন্যে মিলিয়ে যাচ্ছে, তাই ওই বাড়তি অংশটুকুও খুব ছোটো হতে বাধ্য। তার মানে $F(x)$ অবশ্যই ℓ-এর খুব কাছে থাকবে। গুছিয়ে লিখি--

We know

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad \left| \sum_1^n (-1)^k a_k \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Also $\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad a_n < \frac{\epsilon}{2}$.
Choose $A = \max\{N_1\pi, N_2\pi\} > 0$.
Take any $x \geq A$.
Let n be the largest integer such that $n\pi \leq x$.
Clearly, $n \geq N_1$.

Then

$$
\begin{aligned}
& |F(x)| \\
= \quad & \left|\sum_1^n (-1)^{k+1} a_k + F(x) - F(n\pi)\right| \\
\leq \quad & \left|\sum_1^n (-1)^{k+1} a_k\right| + |F(x) - F(n\pi)| \\
< \quad & \tfrac{\epsilon}{2} + a_n \quad [\because |F(x) - F(n\pi) \leq a_n] \\
< \quad & \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}
$$

as required.

■

DAY 30
Comparison test (theory)

আগেই বলেছি যে, non-negative বা non-positive function-দের improper limit বার করার কাজটা অপেক্ষাকৃত সহজ, কারণ oscillation-এর সম্ভাবনা নেই।
এবং সেই কাজের প্রধান হাতিয়ার হল comparison test, যেটা এবার আমরা শিখব।
এর জন্য $\int_0^\infty f(x)dx$-কে একটু ছবি দিয়ে ভাবলে সুবিধা হবে। ধরো $f(x)$ একটা nonnegative function. মানে ওর গ্রাফটা কখনো x-axis-এর নীচে যাচ্ছে না (Fig 16). তাহলে ওই গ্রাফের নীচে আর x-axis-এর উপরের পুরো জায়গাটার মোট area হল $\int_0^\infty f(x)dx$.
এবার Fig 17 দ্যাখো। এখানে দুটো function-এর গ্রাফ দেখানো আছে, দুজনেই positive. লক্ষ কর যে সব সময়েই $f(x) \geq g(x)$. আশা করি এতে কোনো সন্দেহ নেই যে $f(x)$-এর নীচের area-টা $g(x)$-এর নীচের area-র চেয়ে বড়। সুতরাং যদি $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$ হয় তবে $\int_0^\infty g(x)dx < \infty$ হতে বাধ্য! ঘুরিয়ে বললে--যদি $\int_0^\infty g(x)dx = \infty$ হয় তবে $\int_0^\infty f(x)dx = \infty$ হতে বাধ্য।
এবার Fig 18-এর function দুটোকে লক্ষ কর। এখানে কিন্তু সব সময়েই $f(x) \geq g(x)$ নয়, তবে

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \geq M \quad f(x) \geq g(x) \geq 0.$$

এক্ষেত্রেও কিন্তু একই সিদ্ধান্ত করা যায়--$\int_0^\infty f(x)dx < \infty$ হলে $\int_0^\infty g(x)dx < \infty$ হবেই। অন্যভাবে বললে $\int_0^\infty g(x)dx = \infty$ হলে $\int_0^\infty f(x)dx = \infty$ হবেই।

Fig 16

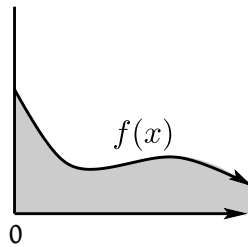



Fig 17

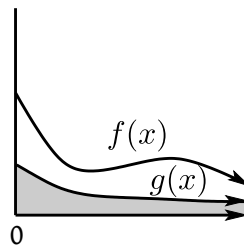
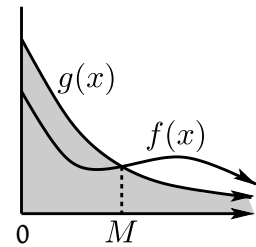



Fig 18

ঠিক একই যুক্তিতে পাওয়া যায় নীচের theorem-টা।

Comparison test (inequality form)

Let f, g be two nonnegative functions on $[a, \infty)$ such that

1. $\forall b > a$ they are Riemann integrable on $[a, b]$,
2. $\exists M \geq a \quad \exists K > 0 \quad \forall x \geq M \quad f(x) \geq Kg(x) \geq 0$.

Then
$$\int_a^\infty f(x)dx < \infty \implies \int_a^\infty g(x)dx < \infty,$$
or, equivalently,
$$\int_a^\infty g(x)dx = \infty \implies \int_a^\infty f(x)dx = \infty.$$

Proof: প্রমাণটা খুবই সহজ--

Define, for $b \geq M$,
$$\begin{aligned} F(b) &= \int_a^b f(x)dx = \int_a^M f(x)dx + \int_M^b f(x)dx, \\ G(b) &= \int_a^b g(x)dx = \int_a^M g(x)dx + \int_M^b g(x)dx. \end{aligned}$$

Then
$$\forall b \geq M \quad \int_M^b f(x)dx \geq \int_M^b K \cdot g(x)dx = K \cdot \int_M^b g(x)dx.$$

Taking limit as $b \to \infty$,
$$\int_M^\infty f(x)dx \geq K \cdot \int_M^\infty g(x)dx \quad (\geq 0). \tag{*}$$

By assumption (1), f is Riemann integrable on $[a, M]$.

Now $\because \int_a^\infty f(x)dx < \infty$, $\therefore \int_M^\infty f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx - \int_a^M f(x)dx < \infty$.

$\therefore$ By (*), $\int_M^\infty g(x)dx < \infty$.

Again, by assumption (1), g is Riemann integrable on $[a, M]$.

So $\int_a^\infty g(x)dx = \int_a^M g(x)dx + \int_M^\infty g(x)dx < \infty$, as required.

[Q.E.D]

আশা করি এই comparison test-টা দেখে তোমার infinite series-এর comparison test-এর কথা মনে পড়ছে। ওখানে comparison test-এর একটা limit form-ও ছিল, এখানেও অন্যথা হবে না।

Comparison test (limit form)

Let $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ be two positive functions such that

1. $\forall b > a$ they are Riemann integrable on $[a, b]$,
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ is finite and nonzero.

Then

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ and } \int_a^\infty g(x)dx$$

converge or diverge together.

নীচের অংকে এটাই প্রমাণ করতে দিয়েছে।

Example 17: Let f and g be positive-valued functions in $[a, x]$ and let $\int_a^x f dx, \int_a^x g dx$ exist for all $x > a > 0$. If

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell,$$

where ℓ is a nonzero, finite number, prove that

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ and } \int_a^\infty g(x)dx$$

converge or diverge together.[5] **(2004.7a)**

SOLUTION:

We shall show

$$\int_a^\infty g(t)dt = \infty \iff \int_a^\infty f(t)dt = \infty.$$

$\implies$ part: Shall show that

$$\int_a^\infty g(t)dt = \infty \implies \int_a^\infty f(t)dt = \infty$$

$\because \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in (0, \infty)$,

এবার আমরা ℓ-এর চেয়ে ছোটো যে কোনো একটা positive সংখ্যা নেব, যেমন ধরো $\frac{\ell}{2}$. তাহলে একটা সময়ের পরে $\frac{f(x)}{g(x)}$ অবশ্যই $\frac{\ell}{2}$-এর উপরে উঠতে বাধ্য।

> $\therefore \exists M > a \quad \forall x \geq M \quad \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{\ell}{2}$.
> So for $x \geq M$
> $$\int_M^x f(t)dt > \int_M^x \frac{\ell}{2} g(t)dt = \frac{\ell}{2}\int_M^x g(t)dt.$$
> So if $\int_a^\infty g(x) = \lim_{K\to\infty}\int_a^K g(x) = \infty$,
> then $\int_a^\infty f(x) = \lim_{K\to\infty}\int_a^K f(x) = \infty$, as required.
> $\Longleftarrow$ part: Shall show that
> $$\int_a^\infty g(t)dt = \infty \Longleftarrow \int_a^\infty f(t)dt = \infty.$$
> Since f, g are positive, so this is the same as proving
> $$\int_a^\infty g(t)dt < \infty \Longrightarrow \int_a^\infty f(t)dt < \infty$$
> $\because \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in (0, \infty)$,

এবার ℓ-এর থেকে বড় কোনো একটা finite সংখ্যা নেব, যেমন ধরো $\frac{3\ell}{2}$. তাহলে একটা সময়ের পরে $\frac{f(x)}{g(x)}$ অবশ্যই $\frac{3\ell}{2}$-এর নীচে নামতে বাধ্য।

> $\therefore \exists M > a \quad \forall x \geq M \quad \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3\ell}{2}$.
> So for $x \geq M$
> $$\int_M^x f(t)dt < \int_M^x \frac{3\ell}{2} g(t)dt = \frac{3\ell}{2}\int_M^x g(t)dt.$$
> So if $\int_a^\infty g(x) = \lim_{K\to\infty}\int_a^K g(x) < \infty$,
> then $\int_a^\infty f(x) = \lim_{K\to\infty}\int_a^K f(x) < \infty$, as required.

■

প্রমাণটা ভালো করে খুঁটিয়ে পড়। এখানে ℓ-এর উপরে দুটো শর্ত দেওয়া ছিল, $\ell > 0$ এবং $\ell < \infty$. দেখবে যে প্রথম অংশটায় খালি $\ell > 0$ ব্যবহার করেছি। যদি $\ell = \infty$-ও হত, তাতেও মূল যুক্তি একই থাকত (যদিও সেক্ষেত্রে আর $\frac{\ell}{2}$ লিখতে পারতে না)। দ্বিতীয় অংশটায় খালি $\ell < \infty$ ব্যবহার করেছি। ভালো করে ভেবে দ্যাখো কথাটা বুঝলে কি না। তাহলে নীচের অংকদুটো সহজেই হয়ে যাবে।

Exercise 12: Let f, g be positive-valued functions on $[a, \infty)$. For all $x > a$ they are Riemann integrable on $[a, x]$. If
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$
and $\int_a^\infty g(x)dx = \infty$, then prove that $\int_a^\infty f(x)dx = \infty$. ■

Exercise 13: Let f, g be positive-valued functions on $[a, \infty)$. For all $x > a$ they are Riemann integrable on $[a, x]$. If

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

and $\int_a^\infty g(x)dx < \infty$, then prove that $\int_a^\infty f(x)dx < \infty$. ■

এই comparison test-গুলো সবই হল সেই সব improper integral-এর জন্য যেখানে domain-টা হল unbounded. যদি function-টা নিজেই unbounded হয় (যেমন $\int_0^1 \frac{dx}{x}$) সেরকম improper integral-এর জন্যও একইরকমভাবে comparison test সম্ভব। নীচের অংকে সেটারই প্রমাণ চেয়েছে।

Example 18: If f and g are two positive valued functions in $[a, b]$ such that both have infinite discontinuity at a only, both are integrable in $[a + \epsilon, b]$, $0 < \epsilon < b - a$ and

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell,$$

where ℓ is a nonzero finite number, prove that $\int_a^b f(x)dx$ and $\int_a^b g(x)dx$ converge of diverge together.[4] **(2012.8a,2007.7a,2003.7a)**

SOLUTION:

Since

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in (0, \infty),$$

hence, taking $\epsilon = \frac{\ell}{2} > 0$,

$$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in (a, a + \delta) \quad \frac{f(x)}{g(x)} \in N(\ell, \epsilon) = \left(\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}\right).$$

Define for $x \in (a, a + \delta)$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^b f(t)dt \\ G(x) &= \int_x^b g(t)dt. \end{aligned}$$

So

$$0 \le F(x) \le \tfrac{3\ell}{2} G(x) \qquad (\mathbf{1})$$

and

$$\tfrac{\ell}{2} G(x) \le F(x). \qquad (\mathbf{2})$$

<u>Case I:</u> If $\int_a^b g(x)dx < \infty$, then $G(a+) < \infty$. So by $(\mathbf{1})$ and sandwich law, $F(a+) < \infty$. Hence $\int_a^b f(x)dx < \infty$.

> Case 2: If $\int_a^b g(x)dx = \infty$, then $G(a+) = \infty$. So by $(\mathbf{2})$ $F(a+) = \infty$. Hence $\int_a^b f(x)dx = \infty$.

■

একটা প্রয়োগ দেখি।

Example 19: Prove that the improper integral

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \quad (a > 0)$$

is convergent.[5] **(2011.8b)**
SOLUTION:

> Let
> $$f(x) = e^{-ax} \frac{\sin x}{x}.$$

চট্ করে দেখে মনে হচ্ছে যে এখানে দুটো সমস্যা আছে--যেহেতু denominator-এ x আছে, তাই x যখন 0-র কাছে যাবে তখন ঝামেলা হতে পারে। আর দ্বিতীয় সমস্যা হল domain-টা unbounded. সুতরাং দুইভাগে ভেঙে নিই-- 0 থেকে 1, আর 1 থেকে ∞.

> Then $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$, which is finite.
> So the integral
> $$\int_0^1 f(x)dx$$
> is proper.

যাক, মিথ্যাই ভয় পেয়েছিলাম, প্রথম integral-টায় কোনোই সমস্যা নেই! এবার দ্বিতীয়টার দিকে তাকাই। Comparison test লাগাতে পারলে খুশি হতাম, কিন্তু তার জন্য function-টাকে nonnegative হতে হবে। আমাদের $f(x)$-এর numerator-এ $\sin x$ থাকায় ওটা positive, negative দুরকম value-ই নিতে পারে। এরকম অবস্থায় $|f(x)|$ নিয়ে পরীক্ষা করে দেখা বুদ্ধিমানের কাজ, কারণ absolutely convergent integral-রা অবশ্যই convergent-ও হবে।

> Also
> $$\forall x \geq 1 \quad |f(x)| = \left| e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-ax}.$$
> Now we know that $\int_1^\infty e^{-ax} dx < \infty$.
> So, by comparison test, $\int_1^\infty |f(x)| dx < \infty$.
> Hence $\int_1^\infty f(x)dx$ is absolutely convergent, and so convergent.
> So
> $$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$$

is convergent.

■

30.1 কার সাথে compare করব?

ধরো তোমাকে একটা positive function $f(x)$ দিয়ে পরীক্ষা করতে বলা হল $\int_a^\infty f(x)dx$ converge করে কি না $(a > 0)$. এই কাজে comparison test তোমাকে কী ভাবে সাহায্য করতে পারে? Comparison test লাগানোর জন্য প্রথমে তোমাকে এমন একটা $g(x)$ ভেবে বার করতে হবে যার দুটো গুণ আছে--

1. $\int_a^\infty g(x)dx$-টার আচরণ কি রকম, মানে converge করে নাকি diverge করে, সেটা জানা আছে,
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ একটা finite, nonzero সংখ্যা।

এমন একটা $g(x)$ যদি ভেবে বার করতে পারো, তবে $\int_a^\infty g(x)dx$-এর যে আচরণটা জানা আছে সেটাই হবে $\int_a^\infty f(x)dx$-এরও আচরণ।
সমস্যা হল একটা $f(x)$ দেওয়া থাকলে সেটা দেখে চট্ করে এরকম একটা জুৎসই $g(x)$ ভাবতে পারাটা। এর জন্য এক ধরণের $g(x)$-এর সঙ্গে পরিচয় থাকলে খুব সুবিধা হয়, এরা হল

$$g(x) = \frac{1}{x^p},$$

যেখানে $p > 0$ কোনো একটা সংখ্যা। বিভিন্ন p-এর জন্য $\int_a^\infty g(x)dx$-এর আচরণ বিভিন্ন হবে। সেটা কষে দেখলেই বুঝবে। মনে করো $p = 1$. তাহলে

$$\begin{aligned}\int_a^\infty g(x)dx &= \int_a^\infty \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{b\to\infty} \log x\Big|_a^b \\ &= \lim_{b\to\infty} (\log b - \log a) = \infty.\end{aligned}$$

যদি $p \neq 1$ হয়--

$$\begin{aligned}\int_a^\infty g(x)dx &= \int_a^\infty \frac{dx}{x^p} \\ &= \int_a^\infty x^{-p}dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\Big|_a^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{b^{-p+1} - a^{-p+1}}{-p+1}.\end{aligned}$$

এই limit-টার আচরণ নির্ভর করছে b^{-p+1}-এর আচরণের উপর। আমরা জানি যে

$$\lim_{b\to\infty} b^n \text{ finite হয় } \iff n \leq 0,$$

অর্থাৎ

$$\lim_{b\to\infty} b^{-p+1} \text{ finite হয় } \iff p \geq 1.$$

এখানে আমরা $p \neq 1$ নিয়ে কাজ করছি। আর $p = 1$ হলে যে divergence হয় সেটা তো দেখেইছি। তাই বলতে পারি--

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} < \infty \iff p > 1.$$

নীচের অংকে বলা আছে কী ভাবে এই তথ্যটা আমাদের comparison test লাগাতে সাহায্য করবে।

Example 20: If $f(x)$ is continuous for all $x \geq a$ and

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = A,$$

where $p > 1$ and A is finite, show that

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

is absolutely convergent.[3] **(2008.7a)**
SOLUTION:

$\because \lim_{x\to\infty} x^p f(x) = A,$
$\because \lim_{x\to\infty} x^p |f(x)| = |A|$. So

$$\exists M > 0 \quad \forall x \geq M \quad |f(x)| \leq (|A| + 1)x^{-p}.$$

Now, $\because p > 1,\ \therefore \int_M^\infty \frac{dx}{x^p} < \infty.$
Hence, by comparison test, $\int_M^\infty |f(x)|dx < \infty.$
Also, by continuity of $f(x)$, $\int_a^M |f(x)|dx < \infty.$
So

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^M f(x)dx + \int_M^\infty f(x)dx < \infty,$$

as required.

■

এই অংকটায় বলা ছিল যে f হল continuous. বস্তুতঃ continuity-টা খালি এক জায়গাতেই কাজে লাগল--Riemann integrability দেখাতে। আর $f(x)$-কে positive বলা ছিল না, তাই comparison test লাগানোর জন্য $|f(x)|$ নিয়ে কাজ করতে হয়েছিল, সেই কারণে absolute convergence-এর প্রসঙ্গ এসে পড়ল। এই দুটো ঝামেলা বাদ দিয়ে অংকটা দিলে আমরা পেতাম নীচের অংকটা, যেটা করে ফেলা এখন খুবই সহজ।

Exercise 14: Let $f(x)$ be a positive function defined on $[a, \infty)$ such that for all $b > a$ it is Riemann integrable on $[a, b]$. Let there be a number $p > 1$ such that

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) \text{ is finite (may be 0).}$$

Then show that

$$\int_a^\infty f(x)dx < \infty.$$

■

এর উল্টো দিকটাও করে ফেলতে পারা উচিত একই যুক্তিতে--

Exercise 15: Let $f(x)$ be a positive function defined on $[a, \infty)$ such that for all $b > a$ it is Riemann integrable on $[a, b]$. Let there be a number $p \leq 1$ such that

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) > 0(\text{ may be } \infty).$$

Then show that

$$\int_a^\infty f(x)dx = \infty.$$

■

Unbounded domain-ওয়ালা improper integral-দের বেলায় কিভাবে $\frac{1}{x^p}$-এর সঙ্গে comparison করলে সুবিধা হয় সেটা দেখলাম। Unbounded function-ওয়ালা improper integral-দের বেলাতেও $\frac{1}{x^p}$ জাতীয় function-দের সঙ্গে comparison করলে কাজ দেয়। ধাপগুলো একেবারেই এক্ষুণি যেরকম করলাম সেরকমই। তাই নতুন করে বিস্তারিত বিবরণে যাচ্ছি না। নীচের তিনটে অংক করলে নিজেই বুঝতে পারবে।

Exercise 16: দেখাও যে $a > 0$ হলে

$$\int_0^a \frac{dx}{x^p} < \infty \iff p < 1.$$

■

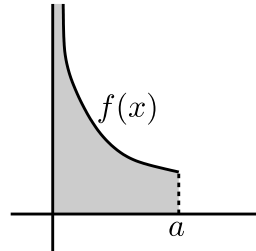
Exercise 17: Let $f(x)$ be a positive function defined on $(0, a]$ such that for all $\epsilon > 0$ it is Riemann integrable on $[\epsilon, a]$, and $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$ (or $-\infty$). Let there be a number $p < 1$ such that

$$\lim_{x\to 0+} x^p f(x) \text{ is finite (may be 0)}.$$

then show that

$$\int_0^a f(x)dx < \infty.$$

Fig 19

■

Exercise 18: Let $f(x)$ be a positive function defined on $(0, a]$ such that for all $\epsilon > 0$ it is Riemann integrable on $[\epsilon, a]$, and $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$ (or $-\infty$). Let there be a number $p > 1$ such that

$$\lim_{x\to 0+} x^p f(x) > 0 \text{ (may be } \infty).$$

then show that

$$\int_0^a f(x)dx = \infty.$$

■

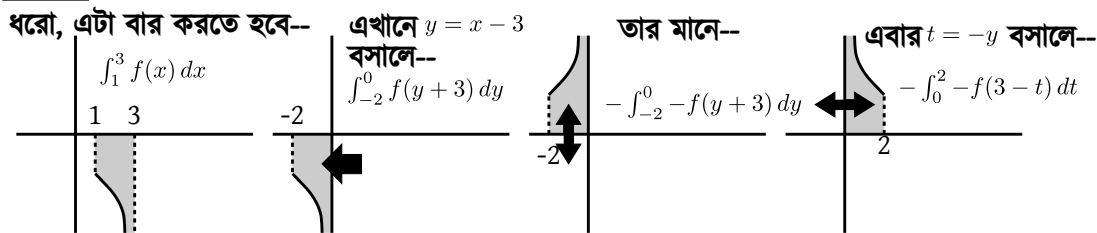
DAY 31 Comparison test (application)

গতকাল আমরা নানা রকম comparison test-এর ফুলঝুরি ছুটিয়েছিলাম। কখনও unbounded domain-এর জন্য, কখনও unbounded function-এর জন্য, কখনও $\frac{1}{x^p}$-এর সঙ্গে যেখানে $p > 1$ আবার কখনো কাজ করেছিলাম $p \leq 1$ নিয়ে। প্রয়োগ করার সময়ে সব কিছু মিলিয়ে মাথায় গোল বেঁধে যাওয়া বিচিত্র নয়। সুতরাং প্রথমে ব্যাপারটাকে একটু গুছিয়ে নিই। একটা improper integral-এ নানা জায়গায় সমস্যা থাকতে পারে। আমাদের প্রথম কাজ হল সম্ভাব্য সমস্যার জায়গাগুলো বুঝে নিয়ে integral-টাকে টুকরো টুকরো করে ভাঙা যাতে কোনো টুকরোয় একাধিক সমস্যা না থাকে। এবার প্রত্যেকটা টুকরোয় যা সমস্যা থাকবে সেটা হয় unbounded domain জাতীয়, নয়তো unbounded function জাতীয়।

- Unbounded domain-টাকে আমরা সব সময়েই $[a, \infty)$ নিতে পারি (কারণ যদি সেটা $(-\infty, b]$ হয়, তবে x-এর জায়গায় $-x$ নিয়ে কাজ করলেই সেটা $[-b, \infty)$-তে পরিণত হবে)।

- Unbounded function-এর সমস্যা ক্ষেত্রে আমরা সব সময়েই মনে করতে পারি যেন integral-টা $(0, a]$-র উপরে হচ্ছে, এবং $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$, অর্থাৎ Fig 19-এর মত। অন্য কোনো রকমের যদি হয় তাহলে x-কে খানিকটা আগুপিছু সরিয়ে এবং x বা $f(x)$-এর চিহ্ন উল্টে সেটাকে Fig 19-এর মত করে নেওয়া যাবে। একটা উদাহরণ রয়েছে Fig 20-তে।

সুতরাং খালি দুইধরণের improper integral-এর মোকাবিলা করতে পারলেই হল। এই ধরণের কোন কোন improper integral-এর আচরণ আমরা ইতিমধ্যেই জেনেছি তাদের একটা তালিকা বানিয়ে রাখি।

Fig 20

Unbounded domain-এর বেলায়--	Unbounded function-এর বেলায়--
• Converge করে-- – $\int_a^\infty e^{-bx}dx$ যেখানে $b > 0$, – $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ যেখানে $p > 1$. • Diverge করে-- – $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ যেখানে $p \leq 1$.	• Converge করে-- – $\int_0^a \log x dx$, – $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ যেখানে $p < 1$. • Diverge করে-- – $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ যেখানে $p \geq 1$.

এবার আমাদের কাজ হল আমাদের যে function-কে integrate করতে হবে সেটার সঙ্গে এই পরিচিতদের কারুর একটা সাদৃশ্য খুঁজে পাওয়া। সাদৃশ্য বলতে কী বোঝাচ্ছি? যদি $f(x)$ হয় আমাদের function-টা আর $g(x)$ হয় পরিচিত function-গুলোর একটা, তবে যদি $f(x)/g(x)$-এর limit দেখতে হবে যখন x সমস্যার জায়গাটার দিকে এগোচ্ছে (মানে unbounded domain-এর ক্ষেত্রে $x \to \infty$, এবং unbounded function-এর ক্ষেত্রে $x \to 0+$). যদি limit-টা exist করে এবং nonzero, finite হয়, তবে আমরা বলব যে $f(x)$ আর $g(x)$ একই রকম। এখানে যে comparison test লাগাচ্ছি বুঝতেই পারছ। কিন্তু সেখানে একটা শর্ত ছিল যে $f(x), g(x)$ দুজনকেই positive হতে হবে। একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে positive না হয়ে negative হলেও কিছু মাত্র অসুবিধা নেই, খালি দরকার হল ওরা যেন সমস্যাটার কাছে গিয়ে চিহ্ন না বদলায়। এই কথাটা বিশেষভাবে গুরুত্বপূর্ণ $\log x$ নিয়ে কাজ করার সময়ে। এই গ্রাফটা (Fig 21) দেখলেই বুঝবে যে এটা চিহ্ন বদলায় এবং negative-ও হয়। কিন্তু তাতেও কোনো অসুবিধা নেই, কারণ x যখন 0-র খুব কাছে (ডানদিকে থেকে, কারণ $x \to 0+$ নিয়ে কাজ করছি), তখন $\log bx$ সব সময়েই একই চিহ্ন (negative) বজায় রাখে।

যদি $f(x)$ আর $g(x)$-এর মধ্যে এই অর্থে সাদৃশ্য থাকে তবে আমরা লিখব $f(x) \sim g(x)$. এই '$\sim$' চিহ্নটা খুব প্রচলিত নয়, তাই গুছিয়ে উত্তর লেখার সময়ে এটা ব্যবহার করব না। কিন্তু রাফ্ করার সময়ে এটা খুব কাজে দেবে।

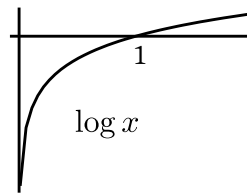
এইবার কয়েকটা অংক করা যাক।

Example 21: Examine the convergence of

$$\int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}} dx.$$

[3] **(2007.7ci)**

SOLUTION: লক্ষ কর যে এখানে integrand-টা $(0, 2)$-এর উপরে সর্বত্রই continuous, কিন্তু $x \to 2-$ হলে নীচের $2-x$-টা $0+$-এর দিকে যায়, ফলে integrand-টা unbounded হয়ে ∞-র দিকে ছুটে চলে। অতএব 2-এর ওখানে একটা সমস্যা আছে। আবার $x \to 0+$ হলে উপরের $\log x$-টা $-\infty$-র দিকে চলে যায়, সুতরাং এখানে আরেকটা সমস্যা। মাঝখানে আর কোনো সমস্যা নেই, কারণ continuous. প্রথম কাজ হল দু টুকরো করে ভাঙা। ধরো $x = 1$-এ ভাঙলাম। তার মানে

Fig 21

এই দুটো integral নিয়ে আলাদা করে কাজ করব--

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}}dx \quad \text{আর} \quad \int_1^2 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}}dx.$$

প্রথমটার ক্ষেত্রে আমাদের মাথাব্যথা $x \to 0+$ হলে কী হয় সেটা নিয়ে। বুঝতেই পারছ যে নীচের $\sqrt{2-x}$-টা তাহলে ভদ্রলোকের মত দিব্যি $\sqrt{2}$-তে যাবে। সুতরাং integrand-টার আচরণ হবে $\frac{1}{\sqrt{2}}\log x$-এর মত, মানে ওই constant-টাকে বাদ দিলে $\log x$-এর মত। অর্থাৎ integrand-টাকে $f(x)$ বললে $f(x) \sim \log x$ যখন $x \to 0+$. আমরা জানি যে, $\log x$-কে $(0,2]$-এর উপর integrate করলে convergence পাওয়া যায়। অতএব--

> Step 1: Shall show that $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}}dx$ converges.
>
> Let $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{2-x}}$
>
> and $g(x) = \log x$.
>
> By standard result we know that $\int_0^1 \log x dx$ converges.
>
> Also as $x \to 0+$
>
> $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{2-x}} \to 1,$$
>
> which is finite.
>
> $\because f$ and g preserve their signs in $(0,1)$,
>
> $\therefore$ By comparison test, $\int_0^1 f(x)dx$ must converge.

এবার অন্য অংশটা নিয়ে পড়ি।

> Step 2: Next we consider $J = \int_1^2 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}}dx$

এখানে সমস্যা হবে যখন $x \to 2-$. আগে এটাকে $x \to 0+$-এর আকারে নিয়ে আসি, যাতে পরিচিত function-দের তালিকাটা ব্যবহার করতে সুবিধা হয়।

> Putting $y = 2-x,\ J = \int_0^1 \frac{\log(2-y)}{\sqrt{y}}dy$.
>
> Let $f(x) = \frac{\log(2-y)}{\sqrt{y}}$.

এবার লক্ষ কর যে $y \to 0+$ হলে উপরের $\log(2-y)$-টা দিব্যি ভদ্রলোকের মত $\log 2$-র দিকে যাবে, যেটা একটা constant. সুতরাং integrand-টা আচরণ করবে $\frac{1}{\sqrt{y}}$-এর মত, অর্থাৎ

$$\frac{\log(2-y)}{\sqrt{y}} \sim \frac{1}{\sqrt{y}} \text{ যখন } y \to 0+.$$

> Let $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$.
>
> By standard result, $\int_0^1 g(y)dy$ converges.

Also as $y \to 0+$

$$\frac{f(y)}{g(y)} = \log(2-y) \to \log 2,$$

which finite.

$\because f, g$ preserve their signs on $(0,1)$,

$\therefore$ By comparison test, $\int_0^1 f(y)dy$ converges.

So the given integral converges.

■

এবার তুমি একটা অংক কর।

Exercise 19: Examine for convergence

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

■

Example 22: Examine for convergence:

$$\int_0^\infty \frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^4)^{1/3}} dx.$$

[4] **(2005.7cii)**

SOLUTION: যখন $x \to \infty$ হবে তখন

$$\frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^4)^{1/3}} \sim \frac{1}{x^{1/3}}.$$

আমরা জানি যে $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/3}} = \infty$. তাই আমাদের integral-টাও diverge করবে।

We know that

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/3}} = \infty.$$

Also

$$\frac{\frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^4)^{1/3}}}{1/x^{1/3}} \to \frac{\pi}{2} > 0.$$

So by comparison test

$$\int_1^\infty \frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^4)^{1/3}} dx = \infty.$$

So

$$\int_0^\infty \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^4)^{1/3}}dx = \infty.$$

■

Example 23: Examine the convergence of

$$\int_2^\infty \left(1-\cos\tfrac{4}{x}\right)dx.$$

(2012.8ci)

SOLUTION: দেখেই বুঝতে পারছ যে এখানে আমরা একটা positive function-কে integrate করছি, তাই comparison test লাগানো চলবে। আমরা প্রথমে $\frac{1}{x^p}$ জাতীয় কোনো কিছুর সঙ্গে comparison করার চেষ্টা করব। প্রশ্ন হল p ঠিক কত নিলে কাজ হবে! এ রকম ক্ষেত্রে Maclaurin series খুব কাজে লাগে। অংকটা করতে Maclaurin series লাগবে বলছি না, বলছি একটা জুৎসই p আন্দাজ করার জন্য Maclaurin series কাজে দেবে। কিভাবে বলি। আমরা জানি $\cos x$-এর Maclaurin series হল

$$\cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - + - + \cdots.$$

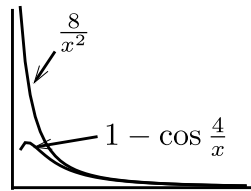
এখানে x-এর জায়গায় $\frac{4}{x}$ বসিয়ে দিলে পাই

$$\cos\tfrac{4}{x} = 1 - \tfrac{4^2}{2!x^2} + \tfrac{4^4}{4!x^4} - + - + \cdots.$$

সুতরাং

$$1-\cos\tfrac{4}{x} = \tfrac{4^2}{2!x^2} - \tfrac{4^4}{4!x^4} + - + - \cdots.$$

যখন $x\to\infty$ হবে তখন ডানদিকের সব term-ই শূন্যর দিকে যাবে, কিন্তু এদের মধ্যে সবচেয়ে ধীরে ধীরে যাবে প্রথম term-টা, কারণ ওটার নীচে আছে x-এর সবচেয়ে ছোটো power--x^2, বাকীদের নীচে x-এর $4, 6,$ ইত্যাদি আরও বড় বড় power আছে। সুতরাং খুব বড় x-এর জন্য $1-\cos\frac{4}{x}$-এর আচরণ হবে $\frac{1}{x^2}$-এর মত (সঙ্গে যে $\frac{4^2}{2!}$-টা আছে ওটাতে limit-এর আচরণ বদলাবে না, কারণ ওটা একটা constant মাত্র)। Fig 22 দেখলে এই সাদৃশ্যটা স্পষ্ট বুঝতে পারবে। সুতরাং $\int_2^\infty(1-\cos\frac{4}{x})dx$ নিশ্চয়ই $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx$-এর মতই আচরণ করবে, অর্থাৎ $g(x)=\frac{1}{x^2}$-এর সঙ্গে comparison করলে কাজ হবে।

Fig 22

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos\frac{4}{x}}{\frac{1}{x^2}} &= x^2\left(1-\cos\tfrac{4}{x}\right)\\
&= x^2\frac{\left(1-\cos\frac{4}{x}\right)\times\left(1+\cos\frac{4}{x}\right)}{1+\cos\frac{4}{x}}\\
&= x^2\frac{1-\cos^2\frac{4}{x}}{1+\cos\frac{4}{x}}\\
&= \frac{\sin^2\frac{4}{x}}{\frac{1}{x^2}}\times\frac{1}{1+\cos\frac{4}{x}}\\
&= \left(\frac{\sin\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos\frac{4}{x}}\\
&= 16\left(\frac{\sin\frac{4}{x}}{\frac{4}{x}}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos\frac{4}{x}}\\
&\to 8 \quad (\text{as } x\to 0),
\end{aligned}$$

which is a nonzero, finite number. We know that $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$ converges. So, by comparison test, the given integral also converges.

■

Example 24: Examine the convergence of

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\log x}dx.$$

(2012.8cii)

SOLUTION:

Putting $t = 1-x$,

$$\frac{\sqrt{x}}{\log x} = \frac{\sqrt{1-t}}{\log(1-t)}.$$

So we are to test convergence of

$$\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{1-t}}{\log(1-t)}dt.$$

Now

$$\frac{\sqrt{1-t}}{\log(1-t)}\Big/\frac{1}{t} = \sqrt{1-t}\times\frac{t}{\log(1-t)} \to 1 \text{ as } t\to 0-.$$

Since this limit is nonzero and finite, our improper integral will behave like

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x} = -\int_{0}^{1}\frac{dx}{x},$$

which is divergent. So the given improper integral is also divergent.

■

Example 25: Show that the integral

$$\int_0^{\pi/2}\log\sin x dx$$

is convergent.[2] **(2011.8b)**

Solution:

Shall show that

$$\int_0^{\pi/2}\log\sin x dx$$

converges.

We substitute $\sin x = u$. Then $x\to 0+$ means $u\to 0+$ and $x\to\frac{\pi}{2}-$ means $u\to 1-$.

So enough to show convergence of

$$\int_0^1\frac{\log u}{\sqrt{1-u^2}}du.$$

From standard result we know that

$$\int_0^1\log u du \text{ converges.}$$

Also both $\log u$ and $\frac{\log u}{\sqrt{1-u^2}}$ preserve their signs (negative) for $u\in(0,1)$, and

$$\frac{\log u}{\sqrt{1-u^2}}\times\frac{1}{\log u}\to 1$$

as $u \to 0+$.
So, by comparison test, the given improper integral converges, as required.

■

Example 26: Show that

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\log x dx$$

is convergent for $m > 0,\ n > 1$.[4] **(2005.7b)**
SOLUTION: প্রথমে দেখি কোথায় কোথায় সমস্যা আছে।

Let $f(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1}\log x$.
Then $f(x)$ is continuous everywhere on $(0,1)$.
As $x \to 1-$ $f(x) \to 0$ since $n > 1$.
We know that

$$x^{\text{any positive number}}\log x \to 0 \text{ as } x \to 0+. \tag{*}$$

$\therefore$ As $x \to 0+$, we have

$$f(x) \to \begin{cases} 0 & \text{if } m > 1 \\ -\infty & \text{if } m \in (0,1] \end{cases}$$

Thus the integral is proper if $m, n > 1$.
If $m \in (0,1]$ and $n > 1$, then let $g(x) = \frac{1}{x^{1-\frac{m}{2}}}$.
Then $f(x), g(x)$ preserve their signs on $(0,1)$.
$\because m > 0,\ \therefore 1 - \frac{m}{2} < 1$. So

$$\int_0^1 g(x)dx$$

converges. Now

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}\log x}{x^{\frac{m}{2}-1}} = x^{m/2}(1-x)^{n-1}\log x \to 0$$

as $x \to 0+$, using (*).
So by comparison test the improper integral converges when $m \in (0,1], n > 1$, completing the proof.

■

DAY 32
More applications

32.1 Comparison test

এরপরের অংকটা সহজ, কিন্তু ছোটো ছোটো অনেকগুলো ধাপ আছে।

Example 27: Examine whether

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

is absolutely convergent.[3] **(2007.7cii)**

SOLUTION: এখানে সমস্যা খালি ∞-তে। বাকি সর্বত্রই function-টা continuous.

> Let $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^3}}$.
>
> Then $f(x)$ is continuous and hence integrable on $[0, M]$ for every $M > 0$.

অতএব টুকরো করার দরকার নেই। যতই $x \to \infty$ হবে ততই $x^3 \to \infty$ হবে, তাই নীচে $\frac{1+x^3}{x^3} \to 1$ ব্যবহার করব। এটাকে এইভাবে ভাবতে পারো--যখন x^3 খুব বড় তখন x^3 এবং x^3+1-এর পার্থক্য x^3-এর তুলনায় নগণ্য। একজন ভিখারীকে এক টাকা দিলে তার পক্ষে অনেক, কিন্তু একজন বড়লোকের পক্ষে একটাকা কিছুই নয়। সুতরাং

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}.$$

যেহেতু $\frac{3}{2} > 1$, তাই খালি এই function-টাকে integrate করলে converge করত। অবশ্য এখানে একটা বাড়তি $\cos x$ আছে, কিন্তু সেটা তো সব সময়েই -1 থেকে 1-এর মধ্যে থাকবে।
সুতরাং comparison test লাগানোর পক্ষে সব কিছুই প্রস্তুত খালি এখানে integrand-টা ওই $\cos x$-টার জন্য বার বার চিহ্ন পরিবর্তন করছে। তাই আমরা এখানে absolute convergence দেখাব।

> Let $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ and $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

এবার একটু সাবধান। আমরা কিন্তু পুরো $[0, \infty)$-র উপরেই $|f(x)|$ আর $g(x)$-এর মধ্যে তুলনা করতে যাব না, কারণ $x = 0$-র কাছে $g(x)$-এর সমস্যা আছে। সুতরাং এইভাবে এগোব--

> Then as $x \to \infty$
>
> $$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{1+x^3}} \to 1,$$
>
> which is finite.
>
> From standard result we know that $\int_1^\infty g(x)dx$ converges.
>
> $\because g, h$ preserve their signs on $[1, \infty)$,
>
> $\therefore$ By comparison test, $\int_1^\infty h(x)dx$ converges.

এবার $\cos x$-টাকে হিসেবের মধ্যে নিতে হবে।

> Also $|f(x)| = h(x)|\cos x| \le h(x)$.
> So by comparison test (inequality form) $\int_1^\infty |f(x)|dx$ converges.

এবার 0 থেকে 1 অংশটুকু ব্যবস্থা করি--

> Now $|f(x)|$ is continuous and hence integrable on $[0,1]$.
> So $\int_0^\infty |f(x)|dx$ converges.

এবার অবশেষে absolute value চিহ্নটাকে বিদায় দেবার পালা--

> So $\int_0^\infty f(x)dx$ is absolutely convergent, and hence convergent.

■

মনে রেখো যে comparison test কিন্তু সরাসরি খালি positive function-দের integral-এর ক্ষেত্রেই লাগানো যায়। আগের অংকগুলোতে function-গুলোকে দেখেই দিব্যি positive বলে চেনা যাচ্ছিল। কিন্তু কখনো কখনো সেটা দেখাতেও খানিকটা বেগ পেতে হয়। যেমন নীচের অংকটায়।
এই অংকটায় $\sinh x$-এর উল্লেখ আছে। সেটা কী পদার্থ একবার মনে করে নিই। $\sinh x$ হল hyperbolic sine function–

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

এই প্রসঙ্গে hyperbolic cosine function-এর সংজ্ঞাটাও মনে করা যাক--

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

এই অংকটা করতে আমাদের দুটো তথ্য কাজে লাগবে। এক, $\sinh x$-কে differentiate করলে $\cosh x$ হয় (differentiate করলেই বুঝবে)। দুই, $x \neq 0$ হলে $\cosh x > 1$ হয়। এটা প্রমাণ করাও কঠিন কিছু নয় (চেষ্টা করে দ্যাখো)।

Example 28: Examine for convergence:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sinh x}\right)\frac{dx}{x}.$$

[4] **(2005.7ci)**
SOLUTION: প্রথমে দেখি কোথায় কোথায় সমস্যা থাকতে পারে। একটা সমস্যা তো দেখতেই পাচ্ছি--domain-টা unbounded. আরও দেখছি যে denominator-এ কয়েক জায়গায় x আর $\sinh x$ আছে, তাই $x = 0$-তেও সমস্যা থাকতে পারে। অতএব integral-টাকে দুই টুকরো করে নিই--ধরো 0 থেকে 1, আর 1 থেকে ∞.

> Step 1: We consider
> $$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sinh x}\right)\frac{dx}{x}.$$

এটা কিন্তু স্পষ্ট বোঝা যাচ্ছে না যে $x \to 0+$ হলে integrand-টা সত্যিই ∞-তে যাবে কিনা। তার কারণ হল ওই $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sinh x}$ জিনিসটা। $\frac{1}{x}$ এবং $\frac{1}{\sinh x}$ দুজনেই আলাদা করে ∞-তে যাবে, কিন্তু তা থেকে ওদের পার্থক্যটার আচরণ সম্বন্ধে কিছু সিদ্ধান্ত করা যাচ্ছে না। Integrand-এর limit-টা বার করার একটা কায়দা হল L'Hôpital লাগানো। ধাপগুলো আর দেখালাম না।

By repeated application of L'Hôpital rule,

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sinh x}\right)\frac{1}{x}=\cdots=\frac{1}{6}.$$

L'Hôpital's rule জিনিসটা বেশ কাজের কিন্তু একটাই সমস্যা। অনেক অংকে বার বার করে লাগাতে হয়। এখানে যেমন তিনবার লাগাতে হবে। Differentiation করাটাও উত্তরোত্তর কঠিন হতে থাকে। আর সব সময়েই এই সন্দেহটা থেকেই যায় যে হয় তো শেষ পর্যন্ত করে দেখলে যে শেষ limit-টা exist-ই করে না। সেক্ষেত্রে তো আর L'Hôpital's rule লাগানো যাবে না, অতএব সেক্ষেত্রে পুরো কষ্টটাই জলে যাবে। তাই অনেক সময়ে উত্তরটা আগেভাগে চট্‌জলদি বার করে নেওয়ার একটা কৌশল আছে series ব্যবহার করে। সেটা জেনে রাখা ভালো। আমরা জানি যে

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots,\quad x\in\mathbb{R}.$$

সুতরাং

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots,\quad x\in\mathbb{R}.$$

তাই

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sinh x}\right)\frac{1}{x} &= \frac{\sinh x - x}{x^2\sinh x}\\ &= \frac{\frac{x^3}{3!}+\cdots}{x^3+\frac{x^5}{3!}+\cdots}\\ &= \frac{\frac{1}{3!}+\cdots}{1+\frac{x^2}{3!}+\cdots}\to\frac{1}{6}\end{aligned}$$

যখন $x\to 0+$. লক্ষ কর যে এই কয়টা ধাপ রাফে করা খুবই সহজ, differentiation করার চেয়ে।

So the integral is proper.

যাক, এখানে কোনো সমস্যা হল না। এবার অন্য অংশটা দেখি।

Step 2: Consider

$$\int_1^\infty\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sinh x}\right)\frac{dx}{x}.$$

আমরা comparison test লাগাতে চেষ্টা করব, কিন্তু আগে দেখা দরকার যে integrand-টা (মানে যে function-টাকে integrate করছি) সেটা positive কিনা! অর্থাৎ, যখন $x>0$ তখন কি $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sinh x}\right)\frac{1}{x}$ সব সময়ে positive?

Shall show that the integrand is positive, ie, for $x>0$

$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sinh x}\right)\frac{1}{x}>0,$

ie, $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sinh x}\right)>0,$

ie, $\frac{\sinh x - x}{x\sinh x}>0,$

ie, $\sinh x - x>0,$

> ie, $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots-x>0$
> ie, $\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots>0,$ which is obvious since $x>0.$
> So comparison test applies.

এবার প্রশ্ন হল কিসের সঙ্গে compare করব। $x\to\infty$ হলে

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sinh x}\right) &= \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{2x}{e^x-e^{-x}}\right)\\ &\sim \frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

এই শেষ ধাপটা হল কারণ e^x এবং x দুজনেই ∞-র দিকে যাচ্ছে বটে, কিন্তু e^x অনেক তাড়াতাড়ি বাড়ছে, তাই

$$\frac{2x}{e^x-e^{-x}}\to 0 \text{ as } x\to\infty.$$

সুতরাং আমাদের integrand-টা খুব বড় x-এর জন্য $\frac{1}{x^2}$-এর মত আচরণ করবে।

> Let $g(x)=\frac{1}{x^2}$. We know that
>
> $$\int_1^\infty g(x)dx<\infty.$$
>
> Also
>
> $$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sinh x}\right)}{\frac{1}{x^2}}\\ &= \left(1-\frac{x}{\sinh x}\right)\to 1\end{aligned}$$
>
> as $x\to\infty$.
> Since the limit is finite, hence, by comparison test,
>
> $$\int_1^\infty\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sinh x}\right)\frac{dx}{x}<\infty.$$
>
> Hence, combining the two steps, we conclude that the given integral is convergent.

■

Comparison test দিয়ে খালি কোনো improper integral-এর convergence বা divergence বার করা যায়, value-টা বার করা যায় না। কিন্তু সেই সঙ্গে Cauchy principal value ব্যবহার করলে অনেক সময়ে improper integral-টা কত হবে সেটাও বেরিয়ে আসে। যেমন নীচের অংকটায়।

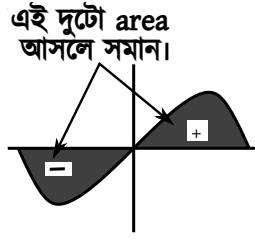



Fig 23

Exercise 20: Show that $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$ converges. Show that its Cauchy principal value is 0. Hence conclude that the integral must be 0. ■

এইখানে একটা সাবধানবাণী বলে রাখি। যদি $f(x)$ কোনো odd function হয় (মানে $f(-x) = -f(x)$ হয়) যেটা $[-a, a]$-র উপরে integrable (এখানে $a > 0$ যেকোনো সংখ্যা), তবে আমরা জানি যে

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

হয়। কারণ $[0, a]$-র উপরে $f(x)$ আর x-axis-এর মাঝখানের signed area যতটা, ঠিক ততটাই signed area আছে $[-a, 0]$-র উপরেও, খালি চিহ্নটা উল্টো। তাই মোট signed area হচ্ছে 0. Fig 23 দেখলে সুবিধা হবে। যুক্তিটাকে লেখা যায় এইভাবে--

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \underbrace{-\int_{0}^{a} f(t)dt}_{t=-x \text{ বসিয়ে}} + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0.$$

দুঃখের বিষয় যে, $a = \infty$ হলে কিন্তু এই যুক্তিটা খাটে না। কারণ যদি $\int_0^\infty f(x)dx = \infty$ হয় তবে $\int_{-\infty}^0 f(x)dx = -\infty$ হবে বটে, কিন্তু তারপর তো আর আমরা $\infty - \infty = 0$ লিখতে পারি না! তবে যদি $\int_0^\infty f(x)dx$ হয় finite কিছু, তবে কোনো সমস্যা নেই।

কিন্তু Cauchy principal value-র ক্ষেত্রে ব্যাপারটা সবসময়েই সহজ। যদি $\int_0^\infty f(x)dx = \infty$-ও হয়, তাহলেও $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$-র Cauchy principal value নিশ্চয়ই 0 হবে। খালি f-টা odd হলেই হল!

32.2 Abel and Dirichlet

আমরা এই বইয়ের দ্বিতীয় খণ্ডে infinite series শেখার সময়ে Abel এবং Dirichlet-র দুটো test শিখেছিলাম। (Dirichlet-র উচ্চারণ কিন্তু "ডিরিচ্‌লে", ভুলে যেন "ডিরিচ্‌লেট" বোলো না)! এখানেও একইরকম দুটো test আছে। দুজনেরই বক্তব্য একইরকম। f এবং ϕ দুটো function-এর উপর নানারকম শর্ত দেওয়া আছে, তা থেকে বলতে হবে $\int_a^\infty \phi(t)f(t)dt$-টা convergent কিনা। বাস্তবে এই test-গুলোর বড় একটা প্রয়োগ দেখা যায় না। যারা এই বইটা অংক শেখার জন্য পড়ছ (খালি পরীক্ষা পাশের জন্য নয়), তারা স্বচ্ছন্দে এই দুটো test বাদ দিয়ে যেতে পারো, তাতে তোমার পাণ্ডিত্যের গুরুতর কিছু ক্ষতি হবে না!

Abel's test

Let $a \in \mathbb{R}$ and $\phi, f : [a, \infty)$ be two functions such that

1. $\phi(t)$ is monotone and bounded on $[a, \infty)$,
2. $\forall x \geq a$ $f(t)$ is Riemann integrable on $[a, x]$,
3. $\int_a^\infty f(t)dt$ is convergent.

Then

$$\int_a^\infty \phi(t) f(t) dt$$

must be convergent.

Dirichlet's test

Let $a \in \mathbb{R}$ and $\phi, f : [a, \infty)$ be two functions such that

1. $\phi(t)$ is monotone,
2. $\phi(t) \to 0$ as $t \to \infty$,
3. $\forall t \geq a$ $f(t)$ is Riemann integrable on $[a, x]$,
4. $\int_a^x f(t)dt$ is a bounded function for $x \in [a, \infty)$, ie,

$$\exists B > 0 \quad \forall x \in [a, \infty) \quad \left| \int_a^x f(t)dt \right| \leq B.$$

Then

$$\int_a^\infty \phi(t) f(t) dt$$

must be convergent.

Exercise 21: A function $\phi : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ is such that $\phi(t) \to 0$ as $t \to \infty$. Then must $\phi(t)$ be bounded on $[a, \infty)$? What if $\phi(t)$ is given to be monotone? ■

Exercise 22: A function $\phi : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ is monotone, and $\phi(t) \to 0$ as $t \to \infty$. Then must $\phi(t)$ be bounded on $[a, \infty)$? ■

Example 29: Using Abel's test or otherwise show that

$$\int_{\pi}^{\infty} e^{-x}\frac{\sin x}{x}dx$$

is convergent.[3] **(2008.7c)**

SOLUTION:

Let $f(x) = e^{-x}\sin x$ and $\phi(x) = \frac{1}{x}$.
Then $\phi(x)$ is bounded and monotone on $[\pi, \infty)$.
Also

$$|f(x)| = |e^{-x}\sin x| \le e^{-x}.$$

Since $\int_\pi^\infty e^{-x}dx < \infty$, so $\int_\pi^\infty f(x)dx$ is absolutely convergent, and hence convergent.

So, by Abel's test, $\int_\pi^\infty f(x)\phi(x)dx$ converges, as required.

■

Example 30: Using Dirichlet's test prove that

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

is convergent. Then use Abel's test to prove that

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx, \quad a > 0$$

is convergent.[3+2] **(2006.5aii)**

SOLUTION:

First part: Since $\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1$, so the integral $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ is proper.
So enough to show that $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ converges.
Let $f(x) = \sin x$ and $\phi(x) = \frac{1}{x}$.
Then $\phi(x)$ is bounded, monotone on $[1, \infty)$ and $\phi(x) \to 0$ as $x \to \infty$.
Also

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x \sin(t)dt = \cos 1 - \cos x$$

is bounded on $[a, \infty)$. So by Dirichlet's test,

$$\int_1^\infty f(x)\phi(x)dx$$

converges.

দ্বিতীয় অংশটা একেবারেই আগের অংকের মত, তাই সংক্ষেপে লিখলাম।

Second part:

Let $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ and $\phi(x) = e^{-x}$.

These satisfy the conditions of Abel's test, completing the proof.

■

Example 31: Applying Dirichlet's test, prove that

$$\int_1^\infty \sin x^3 dx$$

is convergent.[3] **(2011.1h)**

SOLUTION:

Let $f(x) = 3x^2 \sin x^3$ and $\phi(x) = \frac{1}{3x^2}$.

Then $\phi(x)$ is decreasing to 0 on $[1, \infty)$ and $f(x)$ is continuous, and hence Riemann integrable on $[1, x]$ for every $x > 1$.

Also

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x 3t^2 \sin t^3 dt = \cos 1 - \cos x^3,$$

which is a bounded function (since $\cos$ is a bounded function).

So by Dirichlet's test the given integral converges.

■

নীচের অংকটাও একইভাবে হবে।

Exercise 23: State Dirichlet's test in connection with the convergence of improper integral of product of two functions over an unbounded interval. Using it show that $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ is convergent.[2+3] **(2013.IV.2a)** ■

DAY 33
Gamma function

অংক করার সময়ে আমরা নানারকমের function দেখেছি যেমন $\sin x, \cos x, e^x, \log x$ ইত্যাদি। এবার আমরা নতুন দুই ধরণের function-এর কথা শিখব--$\Gamma(x)$ (এখানে Γ হল বড়হাতের গামা), আর Beta(x,y). প্রথমটা $x > 0$ হলেই defined, আর দ্বিতীয়টা $x, y > 0$ হলে। এই function-গুলো বিভিন্ন কাজে লাগে, এবং এদের সঙ্গে পরিচয় থাকা খুবই দরকার।

প্রথমে একটা পরিচিত function-এর কথা দিয়ে শুরু করি, factorial function–

$$f(n) = n!.$$

আমরা জানি যে $f(0) = 1$ এবং তারপর থেকে সব সময়ে

$$f(n+1) = (n+1)f(n)$$

হয়। যদি বলি $f(3)$ বার করতে তুমি তৎক্ষনাৎ উত্তর দেবে $f(3) = 3! = 6$.
যদি বলি $f(1.6)$ কত? তাহলে তুমি মুস্কিলে পড়ে যাবে, কারণ factorial function-টা খালি nonnegative integer-দের জন্যই defined. সুতরাং $f(1.6)$ হল undefined. মজার কথা এই যে, একটা কায়দা আছে যেটা দিয়ে -1-এর থেকে বড় যে কোনো সংখ্যারই factorial-এর মত একটা জিনিস define করা যায়। অর্থাৎ এমন একটা function তৈরী করা যায় যাতে--

- n একটা nonnegative integer হলে $f(n) = n!$ তো হয়ই,
- উপরন্তু যে কোনো $x > -1$-এর জন্যই $f(x+1) = (x+1)f(x)$ হয়।
- শুধু তাই নয়, $f(x)$ আবার দিব্যি একটা continuous function-ও হয়!

এইরকম একটা function হল

$$f(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt, \quad x > -1.$$

সংজ্ঞাটা দেখতে বেশ অদ্ভুত। Improper integral দিয়ে define করা কোনো function আমরা আগে দেখিনি। Integral-টা আদৌ converge করে কিনা সেটাও চট্ করে বোঝা যাচ্ছে না। আর যদিও বা করে, তবে খামোখা কেন উপরের বৈশিষ্ট্য তিনটে থাকবে তারও কোনো কারণ চোখে পড়ছে না। এইসব প্রশ্নের উত্তর আমরা এক্ষুণি দেবার চেষ্টা করব। কিন্তু তার আগে বলে রাখি যে ওই $x > -1$ শর্তটা লোকে পছন্দ করে না। তার চেয়ে $x > 0$ লিখলে বেশী সুন্দর লাগে। তাই আমরা function-টাকে সাধারণতঃ "একঘর সরিয়ে" লিখি, এইভাবে--

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

একেই বলে Gamma function. এর গ্রাফটা এঁকেছি Fig 24-এ। "একঘর সরানো"র জন্য $n \in \mathbb{N}$ হলে $\Gamma(n) = (n-1)!$ এবং

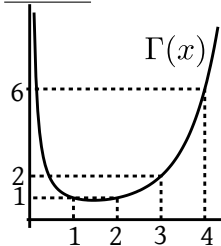
$$\forall x > 0 \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

এবার তবে একে একে বিভিন্ন প্রশ্নের উত্তর দিই। প্রথম প্রশ্ন--converge করে কিনা।

33.1 Convergence

Example 32: Discuss the convergence of

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx, n \in \mathbb{R}.$$

Fig 24

[4] **(2009.7a)**

SOLUTION: Integrand-টা হল nonnegative. তাই হয় integral-টা converge করে, নয়তো ∞-তে diverge করে। আমরা দেখাব যে $n > 0$ হলে converge করে, নইলে diverge করে।
প্রথমে দেখি integral-টার কোথায় কোথায় সমস্যা আছে। একটা সমস্যা হল unbounded domain. আবার যদি $n < 1$ হয় তবে $x^{n-1} = \frac{1}{x^{1-n}}$-টা $x = 0$-র কাছে unbounded হয়ে যাবে। সুতরাং দুই টুকরো করি--0 থেকে 1, আর 1 থেকে ∞.

> Step 1: Shall show that $\int_1^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ converges for every $n \in \mathbb{R}$.
> We know that $\int_1^\infty e^{-x/2}dx$ converges.
> Also
> $$\frac{e^{-x}x^{n-1}}{e^{-x/2}} = \frac{x^{n-1}}{e^{x/2}} \to 0 \text{ as } x \to \infty.$$
> So, by comparison test, $\int_1^\infty e^{-x}x^{n-1}dx < \infty$.

এবার অন্য অংশটা। যদি $n \geq 1$ হয়, তবে এই integral-টা দিব্যি একটা proper integral. সমস্যা হতে পারে $n < 1$ হলে।

> Step 2: Shall show that $\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}dx < \infty$ iff $n > 0$.
> We know that
> $$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} < \infty \iff p < 1,$$
> ie,
> $$\int_0^1 x^{n-1}dx < \infty \iff n > 0.$$
> Now
> $$\frac{e^{-x}x^{n-1}}{x^{n-1}} = e^{-x} \to 1 \in (0,\infty) \text{ as } x \to 0+.$$
> So, by comparison test,
> $$\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}dx < \infty \iff \int_0^1 x^{n-1}dx < \infty.$$
> So
> $$\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}dx < \infty \iff n > 0.$$

■

Example 33: Show that

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$$

is convergent when $n > 0$.[4] **(2007.7b)**

SOLUTION: আগের অংকেই করা হয়েছে। ■

Example 34: Show that

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x} x^{n-1} dx$$

is convergent if and only if $n > 0$. **(2011.8a)**
SOLUTION: আগের মতই। ■

33.2 Factorial-এর সাথে সম্পর্ক

এইবার দেখাব যে $n \in \mathbb{N}$ হলে $\Gamma(n) = (n-1)!$ হয়, এবং যেকোনো $x > 0$-এর জন্যই $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ হয়। নীচের অংকগুলো করে গেলেই এইগুলো অনায়াসে প্রমাণ হয়ে যাবে।

Exercise 24: প্রথমে দেখাও যে $\Gamma(1) = 1$.
HINT:
সরাসরি সংজ্ঞা লাগিয়ে দাও--

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt.$$

এই সহজ integral-টা কী করে বার করতে হবে সেটা নিশ্চয়ই তোমাকে বলে দিতে হবে না! ■

Example 35: এবার দেখাও যে $\forall x > 0 \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

SOLUTION: এটা খালি একটা ছোট্টো integration by parts-এর ব্যাপার। আমরা জানি যে

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^{(x+1)-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^x e^{-t} dt.$$

এবার $\int_0^b t^x e^{-t} dt$-এর উপর integration by parts লাগাও--

$$\int_0^b t^x e^{-t} dt = -\int_{t=0}^b t^x d(e^{-t}) = -t^x e^{-t}\Big|_0^b + \int_{t=0}^b e^{-t} d(t^x) = -b^x e^{-b} + x\int_0^b e^{-t} t^{x-1} dt.$$

সুতরাং $b \to \infty$ করলে

$$\lim_{b\to\infty} b^x e^{-b} = 0,$$

এবং

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x).$$

অতএব সব মিলিয়ে দাঁড়ালো

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

ঠিক যেমনটা চেয়েছিলাম। ■

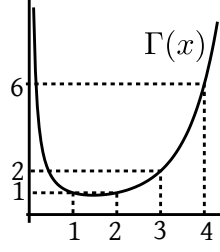



Fig 25

যেহেতু $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, তাই x এবং $\Gamma(x)$ জানলেই $\Gamma(x+1)$ বার করা যায়। আমরা জানি $\Gamma(1) = 1$. সুতরাং

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = 1 \times \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(3) &= \Gamma(2+1) = 2 \times \Gamma(2) = 2 \times 1 \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n \times (n-1) \times 2 \times 1 = n!.\end{aligned}$$

যদি Fig 25 দ্যাখো, তবে $\Gamma(x)$-এর বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য চোখে পড়বে। এটা continuous, differentiable, এবং প্রথমে decreasing আর তারপরে increasing. আরো লক্ষ কর $\lim_{x\to 0+}\Gamma(x) = \infty$ এবং $\lim_{x\to\infty}\Gamma(x) = \infty$. আমরা এত কিছু আলাদা করে আর প্রমাণ করব না। খালি নীচের অংকে দেখাব যে $\lim_{x\to 0+}\Gamma(x) = \infty$.

Example 36: Show that

$$\Gamma(x) > \frac{1}{e}\int_0^1 t^{x-1}dt, \quad x > 0$$

and hence deduce that

$$\lim_{x\to 0+}\Gamma(x) = \infty.$$

[3+1] **(2004.7b)**
SOLUTION:

First part:

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \\ &= \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \\ &> \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt \quad \left[\because \text{the other integral} > 0\right] \\ &> e^{-1}\int_0^1 t^{x-1}dt \quad [\text{ For } t \in [0,1]\ e^{-t} > e^{-1}]\end{aligned}$$

Second part: Thus $\Gamma(x) > \frac{1}{ex}$.

Now $\frac{1}{x} \to \infty$ as $x \to 0+$.
So $\lim_{x\to 0+} \Gamma(x) = \infty$, as required.

■

একই অংক আবার। এখানে প্রথম অংশটা বলে দেয়নি, কিন্তু তোমাকে করে নিতে হবে।

Exercise 25: Prove that $\Gamma(x) \to \infty$ as $x \to 0+$.[3] **(2013.IV.2bi)** ■

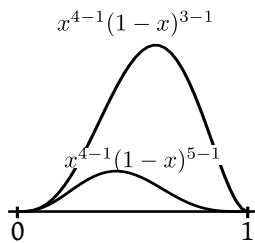
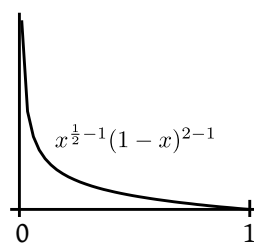
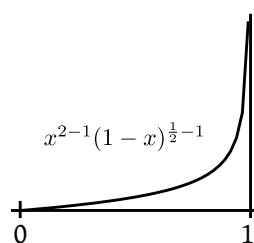
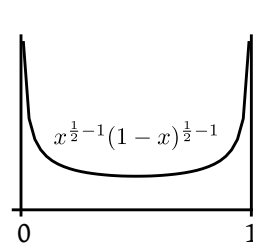
DAY 34
Beta function

34.1 Definition

Example 37: Show that the integral

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

converges if and only if $m, n > 0$.[5] **(2006.6a)**

SOLUTION: প্রথমে integrand-টাকে ভালো করে বুঝে নিই, কোথায় কোথায় সমস্যা আছে। সেই অনুযায়ী ভাঙতে হবে। এতে কোনো সন্দেহ নেই যে $(0,1)$-এর উপর সর্বদাই function-টা continuous. সুতরাং সমস্যা থাকলে দুই প্রান্তে (মানে $x = 0$ আর $x = 1$-তে) থাকবে। বিভিন্ন $m, n > 0$-এর জন্য এর আচরণ বিভিন্ন। যদি $m, n \geq 1$ হয় তবে গ্রাফটা হবে Fig 26-এর মত। এখানে দুই প্রান্তেই গ্রাফটা শূন্যতে নেমে এসেছে, সুতরাং unbounded হবার প্রশ্নই নেই। তাই কোনো improper integration লাগবে না।
কিন্তু যদি $m < 1$ আর $n > 1$ হয়, তবে x-এর power-যে $m - 1$-টা আছে সেটা negative হয়ে যাবে, তাই $x \to 0+$ হলে integrand-টা সটান ∞-র দিকে ছিট্‌কে উঠবে (Fig 27)। এক্ষেত্রে একটাই সমস্যা $x = 0$-র কাছে।
যদি $m > 1$ আর $n < 1$ হয় তবেও ব্যাপারটা একইরকম খালি এবার সমস্যাটা $x = 1$-র কাছে (Fig 28)।
কিন্তু যদি $m, n < 1$ হয় তবে function-টা দুই দিকেই হাত তুলে দেবে, যেমনটা দেখিয়েছি Fig 29-এ। এক্ষেত্রে দুটো টুকরো করে ভাবা ছাড়া পথ নেই।
এতগুলো কেস আলাদা করে আলোচনা না করে আমরা সব সময়েই integral-টাকে দুই টুকরো করেই কাজ করব।

> We know that the given integral converges if and only if
>
> $$\int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \text{ and } \int_{1/2}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$
>
> are both finite.

এবার আমরা দেখাব যে প্রথম integral-টা finite হবে একমাত্র $m > 0$ হলেই, আর দ্বিতীয়টা finite হবে একমাত্র $n > 0$ হলেই। দুটো প্রমাণই একেবারে একইরকম।

> Step 1: Shall show that
>
> $$\int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx < \infty \iff m > 0.$$

যখন $x \to 0+$ হবে তখন $(1-x)^n \to 1$ হবে n যাই হোক না কেন। সুতরাং integrand-টার আচরণ সম্পূর্ণভাবে নির্ধারিত হবে x^{m-1}-এর আচরণ দিয়ে, মানে যখন $x \to 0+$ তখন

$$x^{m-1}(1-x)^{n-1} \sim x^{m-1}.$$

> We know that
>
> $$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^p} < \infty \iff p < 1,$$
>
> ie, putting $p = 1-m$,
>
> $$\int_0^{1/2} x^{m-1}dx < \infty \iff m > 0.$$
>
> Now
>
> $$\frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{x^{m-1}} = (1-x)^{n-1} \to 1 \in (0, \infty)$$
>
> as $x \to 0+$. So, by comparison test,
>
> $$\int_0^{1/2} x^{m-1}dx \text{ and } \int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$
>
> converge or diverge together. So
>
> $$\int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx < \infty \iff m > 0.$$

অন্য টুকরোটার বেলাতেও একই কায়দা খাটবে।

<u>Step 2:</u> Shall show that

$$\int_{1/2}^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx < \infty \iff n > 0.$$

এখানে সমস্যাটা আছে $x = 1$-এর বাঁদিক থেকে, আমরা যথারীতি এটাকে $x = 0$-র ডানদিকে নিয়ে এসে কাজ শুরু করব।

Using the substitution $y = 1 - x$ we see that

$$\int_{1/2}^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx < \infty \iff \int_{0}^{1/2} y^{n-1}(1-y)^{m-1}dx < \infty.$$

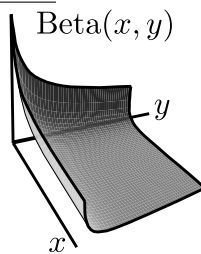
লক্ষ কর যে এই integral-টা একেবারেই step 1-এর integral-টার মতই, খালি x-এর জায়গায় y লিখেছি, আর m, n স্থানবিনিময় করেছে। সুতরাং নতুন করে করার কিছুই নেই।

So the result follows from <u>step 1</u>.

■

এই যে integral-টার অস্তিত্ব নিয়ে আমরা এতক্ষণ মারামারি করলাম, এটারই নাম $Beta(x, y)$. এটা x, y দুটো variable-এর function. এটা খালি $x, y > 0$ হলেই defined. যেহেতু এটা দুটো variable-এর function, তাই এর গ্রাফ হবে একটা surface. এরকম গ্রাফ খালি হাতে আঁকা খুবই কঠিন (তেমন সহজ function না হলে প্রায় অসম্ভব বললেই চলে)। আমরা $Beta(x, y)$-এর গ্রাফটা কম্পিউটারের সাহায্যে এঁকে দেখিয়েছি Fig 30-এ। লক্ষ কর x, y যত 0-র কাছে যাচ্ছে ততই $Beta(x, y)$ কিরকম বাড়তে বাড়তে ∞-র দিকে ছুটছে। আরও লক্ষ কর যে x, y যত বাড়ছে ততই $Beta(x, y)$ কমছে। সেই কারণে surface-টায় একটা ঢাল দেখা যাচ্ছে। যদি Fig 30-তে যেখানে "Beta(x,y)" লেখা আছে সেখান থেকে জল ঢেলে দাও তবে বুঝতেই পারছ যে জলটা গড়িয়ে নীচের দিকে চলে আসবে। খুব ভালো চোখ থাকলে আরও একটা জিনিস লক্ষ করবে। Surface-টা যে ক্রমশঃ ঢালু হয়ে আসছে সেটা x আর y দুই দিকেই সমানভাবে, বাঁদিকে আর ডানদিকে কোনো কম বেশী নেই। এই ব্যাপারটা হয় কারণ $Beta(x, y)$ হল symmetric w.r.t. x, y, অর্থাৎ $Beta(x, y) = Beta(y, x)$. এইটা প্রমাণ করা খুব সোজা।

Exercise 26: প্রমাণ কর যে $\forall x, y > 0 \quad Beta(x, y) = Beta(y, x)$.
HINT:
আমরা জানি $Beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$. এবার খালি $s = 1 - t$ substitute করে দাও। তাহলেই দেখবে হয়ে যাবে! ■

<u>Fig 30</u>

34.2 অন্যান্য চেহারা

Example 38: Prove that

$$B(m,n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx, \quad (m, n > 0).$$

SOLUTION:

Put $t = \frac{x}{1-x}$.

এর পর থেকে একেবারেই সোজা, স্রেফ কষে গেলেই হবে। ■

Example 39: Prove that

$$B(m,n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx, \quad (m, n > 0).$$

[3] **(2005.7a)**
SOLUTION:

$$\begin{aligned} B(m,n) &= \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx \\ &= \int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx. \end{aligned}$$

Put $t = \frac{x}{1-x}$ in the first integral, and $u = \frac{1}{x} - 1$ in the second.

■

Exercise 27: Using the substitution $x = \sin^2\theta$ for $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ show that

$$Beta(a,b) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}\theta \cos^{2b-1}\theta \, d\theta$$

for $a, b > 0$. ■

34.3 $\Gamma(x)$-এর সাথে সম্পর্ক

আমরা $\Gamma(x)$ নিয়ে মাথা ঘামিয়েছিলাম কারণ $\Gamma(x)$ ছিল factorial-এর একরকম generalisation. তেমনি Beta(x,y)-ও একটা পরিচিত জিনিসের generalisation. মনে আছে নিশ্চয়ই হায়ার সেকণ্ডারীর সময়ে ${}^nC_r$ বলে একটা জিনিসের কথা শিখেছিলে। সংজ্ঞাটা ছিল

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

সুতরাং

$$^{m+n}C_m = \frac{(m+n)!}{m!n!}.$$

Beta(x,y) হল এটারই একরকম generalisation, কারণ আমরা দেখাব যে

$$Beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

অবশ্যই x, y-এর জায়গায় m, n বসিয়ে দিলেই এটা অমনি $^{m+n}C_m$ হয়ে যাবে না, দুটো পার্থক্য থাকবে--

- $\Gamma(m)$ তো আর $m!$ নয়, "এক ঘর সরানো" আছে, মানে $\Gamma(m) = (m-1)!$
- $^{m+n}C_m$-এর মধ্যে factorial দুটো গুণফলটা আছে denominator-এ, কিন্তু $Beta(x,y)$ হল তার উল্টো, এখানে $\Gamma(x)\Gamma(y)$ আছে numerator-এ।

নীচের অংকে Beta function এবং Gamma function-এর মধ্যের এই অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ সম্পর্কটা প্রমাণ করতে দিয়েছে। এই প্রমাণটা কিন্তু খুব সোজা নয়। এর জন্য একটা theorem ব্যবহার করতে হবে যেটা আমরা এই বইয়ে প্রমাণ করব না।

Fubini's theorem (change of integration order)

Let $f(x,y)$ be a nonnegative function such that

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(x,y)dy\right] dx \quad < \quad \infty,$$
$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(x,y)dx\right] dy \quad < \quad \infty.$$

Then these two integrals must be equal.

এর প্রমাণ এই বইয়ের নাগালের বাইরে।

Example 40: Prove that

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad m > 0, \quad n > 0.$$

[4] **(2012.8b,2010.8c,2008.7b)**

SOLUTION:

> Step 1: Shall show that for any $x > 0$
>
> $$\frac{1}{(1+x)^{m+n}} = \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty e^{-(1+x)t} t^{m+n-1} dt.$$

এটা দেখানো খুবই সোজা। প্রথমে ডানদিকের integral-টা নিয়ে শুরু কর-- $\int_0^\infty e^{-(1+x)t} t^{m+n-1} dt$. এটা দেখতে খুবই $\Gamma(m+n)$-এর মত খালি e^{-t}-এর বদলে $e^{-(1+x)t}$ থাকায় ঝামেলা হচ্ছে। সেই ঝামেলা দূর করার জন্য আমরা $s = (1+x)t$ বসাব--

Substituting $s=(1+x)t$ we have

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-(1+x)t}t^{m+n-1}dt &= \cdots = \frac{1}{(1+x)^{m+n}}\int_0^\infty e^{-s}s^{m+n-1}ds\\ &= \frac{\Gamma(m+n)}{(1+x)^{m+n}}.\end{aligned}$$

মাঝের কয়েকটা সোজা ধাপ ডট্ ডট্ দিয়ে বাদ দিয়েছি, ওটুকু করে নিও।

Step 2: Putting $t=\frac{x}{1+x}$ we have $t=0$ when $x=0$ and $t\to 1-$ when $x\to\infty$. Also $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{(1+x)^2}$. So

$$\begin{aligned}B(m,n) &= \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt\\ &= \int_0^\infty \left(\frac{x}{1+x}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{n-1}\frac{dx}{(1+x)^2}\\ &= \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx\\ &= \int_0^\infty x^{m-1}\left[\frac{1}{\Gamma(m+n)}\int_0^\infty e^{-(1+x)t}t^{m+n-1}dt\right]dx\\ &= \frac{1}{\Gamma(m+n)}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty x^{m-1}t^{m+n-1}e^{-(1+x)t}dt\right]dx.\end{aligned}$$

এখানে ভিতরে রয়েছে t-এর উপরে integration-টা, আর বাইরে আছে x-এর উপরে integration. এবার আমরা দেখাব যে এই integration দুটোকে আগেপরে করলেও কিছুই বদলায় না। এর জন্যই আমাদের Fubini's theorem লাগবে।

Step 3: Shall show that

$$\int_0^\infty\left[\int_0^\infty x^{m-1}t^{m+n-1}e^{-(1+x)t}dx\right]dt<\infty.$$

Now

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left[\int_0^\infty t^{m+n-1}x^{m-1}e^{-(1+x)t}dx\right]dt\\ =&\int_0^\infty t^{m+n-1}e^{-t}\left[\int_0^\infty x^{m-1}e^{-tx}dx\right]dt\\ =&\int_0^\infty t^{m+n-1}e^{-t}\left[\frac{\Gamma(m)}{t^m}\right]dt\\ =&\ \Gamma(m)\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt\\ =&\ \Gamma(m)\Gamma(n).\end{aligned}$$

> Since both the repeated integrals are finite and the integrand is non-negative, hence by Fubini's theorem on change of order of integration we know that they must be the same. Hence
>
> $$Beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m,n)},$$
>
> as required.

■

কিছু ছাত্রকে একটা গোঁজা দেওয়া প্রমাণ করতে দেখেছি, সেটার সংক্ষিপ্ত আলোচনা করি যাতে এইধরণের গোঁজা থেকে সাবধান থাকতে পারো। প্রমাণটা শুরু হয় $\Gamma(m)\Gamma(n)$ দিয়ে। প্রথমে লক্ষ কর যে $t = x^2$ বসিয়ে

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty t^{m-1}e^{-t}dt = 2\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}dx$$

লিখে নেওয়া যায়। সুতরাং

$$\begin{aligned}\Gamma(m)\Gamma(n) &= \left[2\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}dx\right] \times \left[2\int_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}dy\right] \\ &= 4\int_0^\infty \int_0^\infty x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy.\end{aligned}$$

এই অব্‌ধি দিব্যি ঠিক আছে। কিন্তু এর পরের ধাপে এইটাকে লিখে বসে

$$4\lim_{a\to\infty}\iint\limits_E x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

যেখানে $E = [0,a]\times[0,a]$. এখানে সমস্যা হল এই যে, $x = 0$ বা $y = 0$ হলে integrand-টা defined নাও হতে পারে যদি $2m-1 < 0$ বা $2n-1 < 0$ হয় (মানে যদি $m < \frac{1}{2}$ বা $n < \frac{1}{2}$) হয়। শুধু তাই নয় m বা n যদি $< \frac{1}{2}$ হয় তবে সেখানেও integral-টা improper হবে, অতএব তার জন্যেও একটা limit থাকতে হবে। সুতরাং এই সব ছাত্ররা যে প্রমাণটা করে সেটা $m,n \geq \frac{1}{2}$-এর জন্য ঠিক আছে, নইলে $x = 0$ এবং $y = 0$-র কাছে আরও কিছু বাড়তি limit-এর ঝকমারি করতে হবে। আমরা সে সব ঝকমারি ছাড়াই যখন প্রমাণটা করতে পেরেছি তাই সে প্রসঙ্গে আর যাচ্ছি না।

34.3.1 Special values

আমরা জানি যে $m,n \in \mathbb{N}$ হলে $\Gamma(m)$ এবং $Beta(m,n)$ বার করা সহজ, কারণ সব কিছু factorial দিয়ে লিখে ফেলা যাবে। এছাড়া অন্য কিছু value-তেও Beta এবং Gamma function-দের বার করা সম্ভব। এরকম কিছু উদাহরণ এবার শিখব।

Example 41: দেখাও যে $Beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$.

SOLUTION:

We have

$$\begin{aligned} Beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}dx \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-(x-\frac{1}{2})^2}}, \end{aligned}$$

এবার আমরা জানি যে $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ হয়। এখানে অবশ্য x-এর জায়গায় $x-\frac{1}{2}$ এবং a-র জায়গায় $\frac{1}{2}$ আছে। সুতরাং--

We know that

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-(x-\frac{1}{2})^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) + \text{const} = \sin^{-1}(2x-1) + \text{const}.$$

So $Beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ is

$$\lim_{\substack{a\to 0+\\ b\to 1-}} \sin^{-1}(2b-1) - \sin^{-1}(2a-1) = \sin^{-1}1 - \sin^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

as required.

■

Exercise 28: আমরা জানি যে $x, y > 0$ হলে $Beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ হয়। এবার $x = y = \frac{1}{2}$ বসিয়ে দেখাও যে $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. ■

আমরা জানি যে $x > 0$ হলে $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ হয়। তাই কোনো x-এ যদি $\Gamma(x)$-এর value জানা থাকে তবে $\Gamma(x+1)$-ও বার করে দেওয়া যায়।

Exercise 29: $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ আর $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ কত? যদি $n \in \mathbb{N}$ হয় তবে $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ কত? ■

Example 42: Show that

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}},$$

for each $t > 0$.[3] **(2003.7c)**

SOLUTION:

$$
\begin{aligned}
B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin u \cos u du}{\sin u \cos u} \quad \left[\text{taking } x=\sin^2 u\right] \\
&= \int_0^{\pi/2} 2du = \pi.
\end{aligned}
$$

So

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi,$$

or

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Now let $u = tx^2$ to complete the proof.

■

Exercise 30: এই দুটো improper integral বার কর--
(1) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$, **(2)** $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx$. ■

34.4 দুটো বিশেষ formula

এবার আমা দুটো ফর্মুলার উল্লেখ করব যেগুলোর প্রকৃত সৌন্দর্য অনুভব করা যায় complex analysis শেখার পর। এরা real analysis শেখার পক্ষে তেমন গুরুত্বপূর্ণ কিছু নয়। আমরা এগুলোকে প্রমাণ করার মধ্যে যাব না। দুটোরই মূল বক্তব্য একই রকম--দুটো Gamma-র গুণফলকে কী করে একটু সহজে লেখা যায়।

Legendre duplication formula

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\tfrac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x).$$

এখানে দুটো Gamma-র গুণফলকে আরেকটা Gamma দিয়ে লেখা গেল। নীচের ফর্মুলাটা দুটো Gamma-র গুণফলকে trignometric function দিয়ে লেখার ব্যবস্থা করে দেয়।

Euler reflection formula

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Exercise 31: চট্ করে বল তো $Beta(x, 1-x)$-কে trignometric function দিয়ে লিখলে কী হবে! ■

Example 43: Prove that $\int_0^{\pi/2} \tan^p \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \sec \frac{p\pi}{2}$ if $-1 < p < 1$.[2] **(2013.IV.2bii)**

SOLUTION:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \tan^p \theta d\theta &= \int_0^{\pi/2} \sin^p \theta \cos^{-p} \theta d\theta \\
&= \int_0^1 x^{p/2}(1-x)^{-p/2} \frac{dx}{2x^{1/2}(1-x)^{1/2}} \quad \left[\text{putting } x = \sin^2 \theta\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{(p-1)/2}(1-x)^{-(p+1)/2} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{(p+1)/2-1}(1-x)^{-(p-1)/2-1} dx \\
&= \frac{1}{2} Beta\left(\tfrac{p+1}{2}, \tfrac{1-p}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{1-p}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Gamma(r)\Gamma(1-r) \quad \left[\text{putting } r = \tfrac{p+1}{2}\right] \\
&= \frac{\pi}{2\sin \pi r} \quad \left[\text{by Euler reflection formula}\right] \\
&= \frac{\pi}{2\sin \frac{(p+1)\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2\cos \frac{p\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2\cos \frac{p\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2}\sec \frac{p\pi}{2},
\end{aligned}$$

as required.

■

Answers

1. If $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ is a function such that $\forall M < a \quad f(x)$ is Riemann integrable on $[M, a]$, then the improper integral $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ is defined as

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{M\to-\infty} \int_M^a f(x)dx.$$

দ্বিতীয়ক্ষেত্রে একইভাবে $\lim_{\epsilon\to 0+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$. **2.** **(1)** ∞, **(2)** 1, **(3)** ∞, **(4)** $-\frac{1}{2}$.

3. প্রথম ক্ষেত্রে $p < 1$. দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $p > 1$. **4.** মনে রেখো যে $\int \log x dx = x\log x - x + c$.
7. $\forall\epsilon > 0 \quad \exists x_0 < a \quad \forall x_1, x_2 < x_0 \quad \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| < \epsilon$. **9.** না। হ্যাঁ, Cauchy principal value=0.
10. আমরা জানি $\int_0^1 1\,dx = 1$, সুতরাং আগের অংকের $\frac{x\,dx}{1+x^2}$-এর সাথে একে মেলালেই একটা উত্তর পাবে--

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{1+x^2} & \text{if } x \in [0,1] \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

11. যদি $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$-টা converge করে তবে তার value-টা Cauchy principal value-র সঙ্গে সমান হতে বাধ্য। **19.** Converge করে। **20.** লক্ষ কর যে integrand-টা একটা odd function, অর্থাৎ ওটাকে $f(x)$ বললে $f(-x) = -f(x)$. **21.** না, যেমন $x > 0$ হলে $\phi(x) = \frac{1}{x}$ আর $x = 0$ হলে $\phi(x) = 0$. Monotone হলে উত্তর--হ্যাঁ। **22.** না, যেমন $\phi(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$. **23.** $f(x) = 2x\cos x^2$ আর $\phi(x) = \frac{1}{2x}$ নিয়ে দ্যাখো।
29. $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\pi}/2, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = 3\sqrt{\pi}/4, \ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \times \sqrt{\pi}$. **30.** **(1)** $\sqrt{2\pi}$, **(2)** $\sqrt{2\pi}$.
31. $\frac{\pi}{\sin \pi x}$.

Chapter VI
Uniform convergence

DAY 35
Introduction

35.1 Sequence of functions

যদি $\{a_n\}_n$ একটা sequence হয়, আর a হয় কোনো সংখ্যা তবে $a_n \to a$ মানে কী তা আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডেই শিখেছি। সংজ্ঞাটা ছিল এইরকম--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \epsilon.$$

ব্যাপারটা ছবি দিয়ে ভাবতে গেলে মনে যে ছবিটা আসে সেটা Fig 1-এর মত। এই অধ্যায়ে আমরা একই রকম কাজ করব খালি সংখ্যার sequence-এর বদলে function-এর sequence নিয়ে কাজ করব। Functionএর sequence মানে কী সেটা আগে বুঝে রাখি। সংখ্যার sequence মানে ছিল অসংখ্য সংখ্যার একটা লম্বা তালিকা, যেমন যাবতীয় positive, even number (even number মানে জোড় সংখ্যা)-র sequence

$$2, 4, 6, \ldots$$

একই ভাবে function-এর sequence হল অসংখ্য function-এর একটা লম্বা তালিকা, যেমন ধরো x-এর যাবতীয় power-এর sequence–

$$x, x^2, x^3, \ldots$$

আরেকটা উদাহরণ হতে পারে এরকম--

$$\sin x, \quad \sin 2x, \quad \sin 3x, \quad \ldots$$

সংখ্যার sequence-এর বেলায় দেখেছি যে একটা প্যাটার্ণ পেলে sequence-টাকে সংক্ষেপে লিখতে সুবিধা হয়, যেমন যাবতীয় positive, even সংখ্যার প্যাটার্ণ হল $2n \quad (n \in \mathbb{N})$, তাই আমরা sequence-টাকে $\{2n\}_n$ লিখতে পারি। Function-এর sequence-এর বেলাতেও তাই। উপরের sequence দুটোকে সংক্ষেপে $\{x^n\}_n$ আর $\{\sin nx\}_n$ লিখতে পারি। যদি নেহাত কোনো প্যাটার্ণ না জানা থাকে তবে আমরা সংখ্যার sequence-এর বেলায় সাধারণতঃ $\{a_n\}_n$ বা $\{b_n\}_n$ জাতীয় কিছু লিখে থাকি। Function-এর sequence-এর বেলায় তেমনি $\{f_n(x)\}_n$ বা $\{g_n(x)\}_n$ জাতীয় কিছু লিখি। অনেক সময়ে আরো সংক্ষেপে খালি $\{f_n\}_n$ বা $\{g_n\}_n$-ও লিখে থাকি।

Fig 1

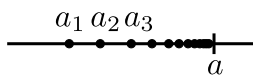
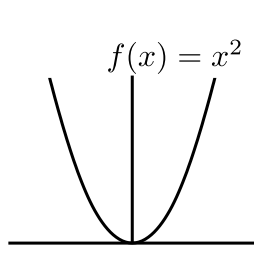
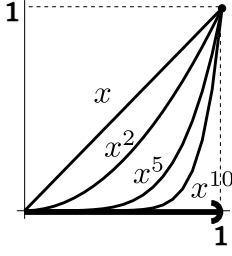
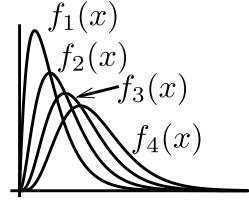
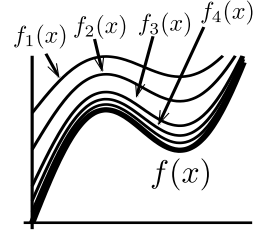



Fig 2 **Fig 3** **Fig 4** **Fig 5**

অনেক সময়েই একটা function-এর sequence-কে ছবি দিয়ে ভাবলে সুবিধা হবে। একটা function-কে ছবি দিয়ে ভাবার সহজতম উপায় হল তার গ্রাফটার কথা ভাবা, যেমন $f(x) = x^2$ শুনলেই আমাদের চোখে Fig 2-এর চিত্রটা ভেসে ওঠে। তেমনি একটা function-এর sequence মানে হল অনেকগুলো গ্রাফ--আলাদা আলাদা নয়, একই গ্রাফ কাগজে একটার উপর একটা আঁকা। হয়তো ভাবছ তাহলে তো সব জগাখিচুড়ি পাকিয়ে যাবে! কিন্তু যদি sequence-টার মধ্যে একটা প্যাটার্ণ থাকে তবে সেই প্যাটার্ণ গ্রাফের মধ্যেও ফুটে ওঠে, এবং জগাখিচুড়ি পাকানো তো দূরের কথা, বরং রীতিমত আল্পনার মত সুন্দর হয়ে ওঠে। অনেক সময়ে প্যাটার্ণটা বরং ফর্মুলার থেকে ছবিতেই বেশী খোলতাই হয়!
কয়েকটা উদাহরণ দেখি।

Example 1: $\{x^n\}_n$-এর ছবিটা দ্যাখো Fig 3-এ। লক্ষ কর x-এর সটান গ্রাফটা কেমন ক্রমশঃ n-এর ভারে নুয়ে পড়ছে। সবগুলো গ্রাফই কিন্তু $(0,0)$ আর $(1,1)$ দিয়ে যাচ্ছে। ■

Example 2: যদি $f_n(x) = x^n e^{-x}$ নিই তবে n পরিবর্তন করলে f_n-এর কি রকম পরিবর্তন হবে সেটা ফর্মুলা দেখে ঠিক বোঝা যাচ্ছে না। অথচ Fig 4-এ $\{f_n(x)\}_n$-এর ছবিটা দ্যাখো, মনে হবে যেন একটা লোক হাঁটু গুটিয়ে বসে ছিল, এখন পা ছড়িয়ে দিচ্ছে। ■

এখানে বলে রাখি যে একটা function-এর sequence দেওয়া থাকলেই ফর্মুলা দেখে তার ছবিটা এঁকে ফেলা সহজ নাও হতে পারে। তবে অনেক সময়েই একটা আদল পাওয়া যায়, তাতেই অনেক কাজ চলে।
এইবার আবার limit-এর প্রসঙ্গে ফিরি। যদি বলি $f_n \to f$ as $n \to \infty$, তবে তোমার মনে কি রকম ছবি ফুটে উঠবে? নিশ্চয়ই Fig 5-র মতো কিছু একটা! যতই n বেড়ে চলেছে ততই f_n-এর গ্রাফগুলো ক্রমশঃ f-এর গ্রাফের সঙ্গে একাকার হয়ে যাচ্ছে। এ তো গেল ছবি দিয়ে ভাবা। এবার যদি তোমাকে $f_n \to f$ কথাটার definition অংকের ভাষায় লিখতে বলি তবে কী করবে? সহজ উত্তর হল

$$f_n \to f$$

বলব যদি

$$\forall c \quad f_n(c) \to f(c)$$

হয়, অর্থাৎ যাই c নাও না কেন $f_n(c)$ সংখ্যাগুলো $f(c)$ সংখ্যার দিকে যাবে।
তার মানে আমরা এখন $f_n \to f$ ব্যাপারটা বোঝার দুটো উপায় পেলাম--এক, ছবি দিয়ে, আর দুই অংকের ভাষায়। ভালো করে ঠাণ্ডা মাথায় চিন্তা করে নাও যে এই দুটো পদ্ধতিই তুমি বুঝেছ কিনা!
এইবার একটা অদ্ভুত কথা বলি-- এই দুটো পদ্ধতি কিন্তু আসলে একই জিনিসের দুটো রূপ নয়। মানে "$\forall x \quad f_n(x) \to f(x)$ হওয়া" আর "f_n-এর গ্রাফটা ক্রমশঃ f-এর সঙ্গে মিশে একাকার হয়ে যাওয়া" মোটেই এক জিনিস নয়! এমনটা হতেই পারে যে $\forall x \quad f_n(x) \to f(x)$ হয়, কিন্তু তাও f_n-এর গ্রাফটা কিছু মাত্র f-এর গ্রাফের কাছে এগোয় না! নীচের উদাহরণ কয়টা দেখার আগে প্রথমে ছবি দিয়ে ভাবার চেষ্টা করে দেখতে পারো যে এমনটা কী করে সম্ভব!
ধরো $f_n(x)$ হল এই রকম--

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [n, n+1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

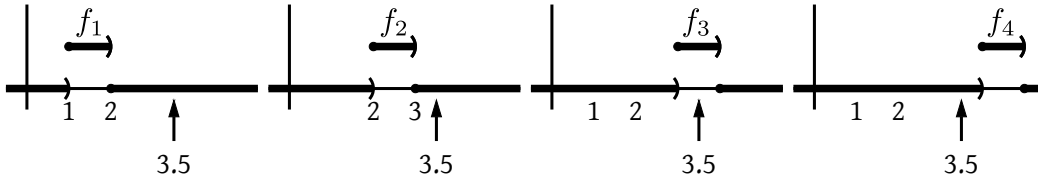



Fig 6

আর $f(x) \equiv 0$. প্রথমে দেখাব যে

$$\forall x \quad f_n(x) \to f(x)$$

হয়। যে কোনো একটা x নাও। বোঝার সুবিধার জন্য $x = 3.5$ নিলাম। $f_1(3.5)$ কত হবে? উত্তর হল 0, কারণ f_1 খালি $[1, 2)$-এর উপরে 1, বাকী সব জায়গায় 0. একইভাবে $f_2(3.5)$-ও 0 হবে, কারণ f_2 খালি $[2, 3]$-এর উপরে 1. এইভাবে চলতে চলতে সব $f_n(3.5)$-ই 0 হবে খালি একজন ছাড়া সে হল $f_3(3.5)$. সেটা হবে 1, কারণ $3.5 \in [3, 4)$. সুতরাং $x = 3.5$-এর জন্য এই যে সংখ্যার sequence-টা পেলাম--$\{f_n(3.5)\}_n$ সেটা হল

$$0, 0, 1, 0, 0, ...$$

আশা করি বুঝতে অসুবিধা নেই যে এই sequence-টার limit হল 0. সুতরাং

$$f_n(3.5) \to f(3.5)$$

হচ্ছে। নিশ্চয়ই বুঝতে পারছ যে এখানে $x = 3.5$ নেওয়ার মধ্যে কোনো যাদুমন্ত্র নেই, অন্য যে কোনো x নিলেও একই ঘটনা ঘটত। সুতরাং আমরা পেলাম--

$$\forall x \quad f_n(x) \to f(x).$$

এবার ছবি এঁকে দেখি f_n-এর গ্রাফগুলো f-এর গ্রাফের সঙ্গে ক্রমশঃ মিশে একাকার হয়ে যাচ্ছে কি না! এখানে গ্রাফগুলো আঁকা সহজ, $f(x) \equiv 0$-র গ্রাফ তো স্রেফ x-axis-টা। আর f_n-এর গ্রাফও প্রায় সর্বত্রই x-axis-এ গায় লেপ্টে আছে, খালি $[n, n+1)$-এর উপরটায় একটা টেবিলের মত 1 হয়ে রয়েছে। Fig 6 দ্যাখো। সুতরাং f_n-এর সঙ্গে f-এর দূরত্ব খালি ওই টেবিলের জায়গাটাতেই, দূরত্বটা হল $1 - 0 = 1$. লক্ষ কর এই দূরত্বটা সব f_n-এর ক্ষেত্রেই 1, সুতরাং f_n-এর গ্রাফটা f-এর গ্রাফের কাছে এগোচ্ছে এমন কথা এক্কেবারেই ঠিক নয়! কিন্তু তবে $\forall x \quad f_n(x) \to f(x)$ হল কী করে? তার কারণ টেবিলটা ক্রমশঃই সরে সরে যাচ্ছে। ফলে যখন x-এর কোনো একটা value নিয়ে কাজ করছি, তখন টেবিলটা যেই সেই value-র ডানদিকে চলে যাচ্ছে, তারপর থেকে আর টেবিলের কোনো প্রভাব সেই point-এ পড়ছে না। কিন্তু তা বলে তো টেবিলটা আর "নেই" হয়ে যায় নি! ওটা সব সময়েই গ্রাফের মধ্যে দিব্যি বহাল তবিয়তে বর্তমান। তাই f_n-এর পুরো গ্রাফটা কোনো মতেই f-এর গ্রাফের সঙ্গে মিশে একাকার হয়ে যেতে পারছে না।
এখানে টেবিলটা চ্যাপটা নিয়েছিলাম (যেমন সত্যিকারের টেবিল হয়)। কিন্তু অন্য যে কোনো আকার নিলেও উদাহরণ বানানো যেত যেমন Fig 7-এ দেখানো ঢেউয়ের মত।

Fig 7

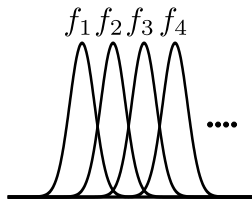
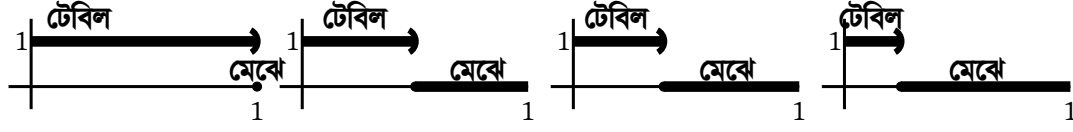



Fig 8

এবার আরেক রকম উদাহরণ দেখি। এবার f_n আর f সবার domain নেব $(0,1)$. এটা যেহেতু bounded, তাই টেবিলটাকে ক্রমাগত সরাতে থাকার ফন্দিটা আর খাটবে না। কিন্তু এখানেও একই কাজ করা যায়, একটু অন্যভাবে। এবার টেবিলটাকে সরাব না, খালি আস্তে আস্তে সরু করতে থাকব, এইভাবে--

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \text{if } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right) \end{cases}$$

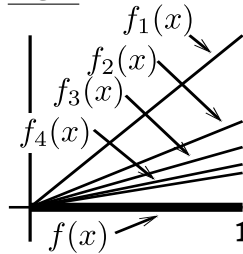
এখানেও $f(x)$-টা আগের মতই নেব--$f(x) \equiv 0$. Fig 8 দেখলেই বুঝবে টেবিলটার ক্রমশঃ সরু করা মানে কী। লক্ষ কর যে টেবিলটা যতই সরু হোক, প্রতিটি f_n-এর গ্রাফেই কিন্তু টেবিলটা আছে, তাই f_n আর f-এর গ্রাফের দূরত্ব কিন্তু সেই 1-ই থাকছে। কিন্তু তুমি যদি যে কোনো একটা $x \in (0,1)$ নাও, তবে যেই $\frac{1}{n} < x$ হবে (হবেই, কারণ $\frac{1}{n} \to 0$) তখন আর x বিন্দুতে টেবিলের কোনো প্রভাব পড়বে না।
দুটো ঝামেলাজনক উদাহরণ দেখলাম, এবার একটা ভদ্রসভ্য উদাহরণ দেখি। এখানেও $f(x) \equiv 0$ নেব কিন্তু f_n নেব অন্যরকম--

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \quad x \in [0,1].$$

এই উদাহরণে domain নিচ্ছি $[0,1]$. Fig 9-এ গ্রাফগুলো এঁকেছি। এখানে কিন্তু f_n-এর গ্রাফগুলো সত্যিই f-এর গ্রাফের সঙ্গে ক্রমশঃ মিশে একাকার হয়ে যাচ্ছে। এখানে কি $\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) \to f(x)$ হবে? অবশ্যই হবে, কারণ f_n-এর পুরো গ্রাফটাই যদি f-এর পুরো গ্রাফের সঙ্গে মিশে যায়, তবে তো প্রতিটা point-এ f_n-এর value-ও সেই point-এ f-এর value-র দিকে এগোতে বাধ্য!
ব্যাপারটা বুঝলে? প্রতিটি point আলাদা আলাদা করে ভদ্র আচরণ করলেও পুরো গ্রাফের আচরণ ভদ্র নাও হতে পারে, কিন্তু পুরো গ্রাফের আচরণটা ভদ্র হলে প্রতিটা point-ই ভদ্র হতে বাধ্য! প্রতিটা point-এর আচরণ ভদ্র হওয়াকে, মানে

$$\forall c \quad f_n(c) \to f(c)$$

হওয়াকে বলে pointwise convergence. আর f_n-এর পুরো গ্রাফটাই ক্রমশঃ f-এর পুরো গ্রাফের সঙ্গে মিশে যাওয়াকে বলে uniform convergence.
এইবার এই ব্যাপারটা অংকের ভাষায় লিখব।

Fig 9

35.2 Definitions

যখন আমরা $f_n \to f$ নিয়ে আলোচনা করি তখন সব সময়ে এরকম $\{f_n\}_n$ আর f নিয়েই কাজ করি যাদের সবারই domain একই হয়। ধরো এই domain-টার নাম দিলাম D. তবে pointwise convergence মানে হল

$$\forall c \in D \quad f_n(c) \to f(c).$$

সুতরাং $\forall, \exists$ ইত্যাদি দিয়ে লিখলে হয়--

$$\forall c \in D \quad \underbrace{\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |f_n(c) \to f(c)| < \epsilon}_{f_n(c) \to f(c)}.$$

এইটাই লিখেছি নীচের definition-এ।

> DEFINITION: **Pointwise convergence**
>
> Let $D \subseteq \mathbb{R}$ and let $\{f_n\}_n$ be a sequence of functions from D to $\mathbb{R}$. Let f be some function from D to $\mathbb{R}$. Then we say that f_n **converges pointwise** to f on D and write
>
> $$f_n \to f \text{ \textbf{pointwise} on } D$$
>
> if
>
> $$\forall \epsilon > 0 \quad \forall c \in D \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |f_n(c) - f(c)| < \epsilon.$$

এই বইয়ের প্রথম খণ্ডের প্রথম অধ্যায়ে আমরা শিখেছিলাম যে দুটো পরপর $\forall$-এর ক্রমপরিবর্তন করলে অর্থ কিছু বদলায় না। তাই আমরা "$\forall \epsilon > 0 \quad \forall c \in D$" বা "$\forall c \in D \quad \forall \epsilon > 0$" যেটা খুশী লিখতে পারি।

একটু আগেও দেখেছি যে pointwise convergence হলেও এমন কথা জোর দিয়ে বলা যায় না যে f_n-এর পুরো গ্রাফটা f-এর পুরো গ্রাফের সঙ্গে মিশে একাকার হয়ে যাবে। "পুরো গ্রাফটা ক্রমশঃ মিশে একাকার হয়ে যাওয়া" মানে কী? যদি কোনো $\epsilon > 0$ দিই তবে এমন একটা N পাব যাতে $f_N, f_{N+1}, f_{N+2}, \ldots$ ইত্যাদির পুরো গ্রাফটাই f-এর গ্রাফের ϵ দূরত্বের মধ্যে থাকবে, অর্থাৎ

$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ f_n$-এর গ্রাফটা f-এর গ্রাফের ϵ দূরত্বের মধ্যে থাকবে,

মানে

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall c \in D \quad |f_n(c) - f(c)| < \epsilon.$$

ঠিক এই জিনিসটাই জানতে চেয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 3: Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions on a set $E \subseteq \mathbb{R}$. When is it said to be uniformly convergent over E? [1] **(2008.3a)**

SOLUTION:

DEFINITION: Uniform convergence

Let $\{f_n\}_n$ be a sequence of functions defined on a set $E \subseteq \mathbb{R}$. Let $f : E \to \mathbb{R}$. $\{f_n\}_n$ is said to be uniformly convergent to f over E if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall c \in E \quad |f_n(c) - f(c)| < \epsilon.$$

■

একটু ভালো করে বুঝে নেওয়া যাক pointwise convergence আর uniform convergence-এর সংজ্ঞার পার্থক্যটা কোথায়। দুটোই দেখতে প্রায় একইরকম, খালি pointwise convergence-এর বেলায় যেখানে "$\forall c \in E \quad \exists N \in \mathbb{N}$" ছিল, uniform convergence-এর বেলায় সেখানে রয়েছে "$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall c \in E$." আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম যে, পরপর $\forall\exists$ থাকলে তাদের ক্রমপরিবর্তন করলে অর্থ বদলে যায়। এখানে ঠিক সেইটাই হয়েছে। প্রথম খণ্ডে আমরা যে উপমা দিয়েছিলাম সেটা একবার মনে করে নিই। নীচের বাক্যটার মানে হল সব মেয়েই কুকুর পোষে--

$$\forall g \in \text{GIRL} \quad \exists d \in \text{DOG} \quad g \text{ has } d.$$

কিন্তু যদি বলি

$$\exists d \in \text{DOG} \quad \forall g \in \text{GIRL} \quad g \text{ has } d,$$

তবে মানে হবে যে এমন একটা কুকুর আছে যেটাকে সব মেয়েই পোষে। প্রথম ক্ষেত্রে $\exists d$-টা ছিল $\forall g$-এর পরে, তাই বিভিন্ন g-এর জন্য বিভিন্ন d নেওয়া চলত। কিন্তু দ্বিতীয়ক্ষেত্রে $\exists d$ চলে এসেছে $\forall g$-এর আগে, তাই আগে একটা কুকুর d নির্বাচন করতে হবে, এবং সেই একটা d-কেই সব মেয়ে (g) পুষবে।

এখানেও ব্যাপারটা একইরকম। Pointwise convergence-এর বেলায় $\exists N$-টা ছিল $\forall \epsilon$ আর $\forall c$-এর পরে, তাই বিভিন্ন c আর ϵ-এর জন্য বিভিন্ন N নেওয়া চলত। কিন্তু uniform convergence-এর বেলায় $\exists N$ চলে এসেছে $\forall c$-এর আগে। তাই এখানে খালি ϵ-এর উপর নির্ভর করেই তোমাকে N নির্বাচন করতে হবে। আগের একটা উদাহরণের সঙ্গে কথাটা মিলিয়ে দেখি। সেই টেবিল সরে যাওয়ার অংকটাই নাও--

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [n, n+1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

আর $f(x) \equiv 0$. এখানে domain হল $E = [0, \infty)$. আমরা প্রথমে pointwise convergence প্রমাণ করব--

To show $f_n \to f$ pointwise on $[0, \infty)$, ie

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall c \geq 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |f_n(c)| < \epsilon.$$

যেহেতু $f(x) \equiv 0$, তাই $|f_n(c) - f(c)|$ না লিখে $|f_n(c)|$ লিখেছি।

$\forall \epsilon, c$ Take any $\epsilon > 0$ and any $c \geq 0$.

এবার একটা $\exists$ আছে, তার মানে একটু রাফ করতে হবে। টেবিলের ছবিটা ভেবে নি। যত n বাড়ছে ততই টেবিলটা ডানদিকে এক ঘর করে সরে যাচ্ছে, একবার যেই টেবিলটা আমাদের c-এর ডানদিকে চলে যাবে, অমনি নিশ্চিন্ত, তার পর থেকে আর $f_n(c)$ আর $f(c)$-এর মধ্যে তফাৎ ϵ-এর চেয়ে বেশী হতে পারবে না। আর টেবিলটা যেহেতু সরেই চলেছে, সুতরাং কোনো না কোনো সময়ে তো c-এর ডানদিকে যাবেই--

$\because \mathbb{N}$ is unbounded above, $\exists N \in \mathbb{N} \quad N > c$.

 Choose this $N \in \mathbb{N}$.

 Take any $n \geq N$.

 Then $c \notin [n, n+1)$. So $f_n(c) = 0$.

$\therefore |f_n(c)| = 0 < \epsilon$, as required.

লক্ষ কর N-টা কী ভাবে c-এর উপর নির্ভর করল। (N-টা ϵ-এর উপরেও নির্ভর করতে পারত, তবে এই অংকটা খুব সোজা নিয়েছিলাম তাই এখানে ϵ-টা লাগল না।) যদি $c = 99.1$ নিতাম তবে $N = 100$ নিলেই চলত (বা ≥ 100 কিছু একটা নিলেও চলত)। কিন্তু যাই N নাও না কেন, তা দিয়ে সব c-এর কাজ চলবে না। যেমন যদি তুমি $N = 10000$-ও নাও, তবে $c = 10000.3$ করে দিলেই ফের টেবিলে ধাক্কা খাবে। অর্থাৎ একটা N দিয়েই যে সব c-এর ব্যবস্থা করে দেবে, সেটি হবার জো নেই! অংকের ভাষায়--

Shall show f_n does not converge uniformly to f on $[0, \infty)$,

uniformly converge না করাকে অংকের ভাষায় কিভাবে লিখব দেখি। যদি uniformly converge করত, তবে লিখতাম

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall c \in D \quad |f_n(c)| < \epsilon,$$

যেহেতু $f(x) \equiv 0$. সুতরাং এবার এটাকে negate করতে হবে ($\forall$-কে উল্টে $\exists$ এইভাবে)--

ie,

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists c \geq 0 \quad \exists n \geq N \quad |f_n(c)| \geq \epsilon.$$

প্রথম ধাপেই একটা ϵ নিতে হবে। আমাদের টেবিলগুলোর উচ্চতা হল 1, তার চেয়ে ছোটো কিছু একটা $\epsilon > 0$ নিলেই হবে--

 Choose $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$.

 Take any $N \in \mathbb{N}$.

এবার এমন একটা c আর n নেব যাতে c-টা টেবিলের মাঝখানে গিয়ে পড়ে।

 Choose $c = N + \frac{1}{2}$ and $n = N$.

 Then $c \in [n, n+1)$ and so $f_n(c) = 1$.

So $|f_n(c)| > \frac{1}{2} = \epsilon$, as required.

ভালো করে প্রমাণটা পড়ে দ্যাখো। এবার নীচের অংকটা একইভাবে কর, এটা সেই টেবিল সরু হবার অংকটা।

Exercise 1: ধরো $f_n, f : (0,1) \to \mathbb{R}$ এইরকম দিলাম--

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \text{if } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right) \end{cases}$$

আর $f(x) \equiv 0$. দ্যাখাও যে $f_n \to f$ pointwise on $(0,1)$, কিন্তু এই convergence-টা uniform নয়। ■

আমরা বলেছি যে f_n আর f-দের সবারই domain একই। এই domain-টার গুরুত্ব বুঝবে নীচের অংকটা করলে। এখানে খালি domain-টা পাল্টে দিলেই uniform convergence নষ্ট হয়ে যায়।

Exercise 2: আমরা আগেই function-এর এই sequence-টা দেখেছি--

$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad x \in [0,1].$$

যদি $f(x) \equiv 0$ নিই তবে প্রথমে দ্যাখাও যে $f_n \to f$ uniformly on $[0,1]$. যেহেতু uniform convergence, তাই pointwise convergence-ও বটে। এবার domain-টা $[0,1]$ না নিয়ে $[0,\infty)$ নিই। এবার দ্যাখাও যে f_n আর f-এ uniformly converge করে না! এইক্ষেত্রে pointwise convergence সম্বন্ধে কী বলতে পারো? ■

DAY 36
Examples

গতকাল আমরা বেশ কয়েকটা উদাহরণ নিয়ে দেখেছি কখন pointwise convergence আর কখন uniform convergence হয়। আজকে আরো কিছু উদাহরণ করব। গতকালের অংকগুলোর চেয়ে এগুলো একটু বেশী কঠিন হবে দুটো কারণে--এক, এখানে খালি f_n-গুলো দেওয়া থাকবে, f-টা তোমাকে বার করে নিতে হবে, আর দুই, গ্রাফগুলো সম্পূর্ণভাবে আঁকা সহজ নাও হতে পারে, খালি মোটামুটি আদলটা বুঝে এগোতে হবে।
এই অংকগুলো করার আগে মনে রেখো যে uniform convergence হল pointwise convergence-এর চেয়ে বেশী শক্তিশালী, অর্থাৎ $f_n \to f$ uniformly হলে $f_n \to f$ pointwise-ও হতে বাধ্য। এর উল্টোটা যে সত্যিই নয় তার উদাহরণ বেশ কয়েকটা দেখেছি। pointwise convergence হল দুর্বলতর, তাই সাধারণতঃ দেখানোও বেশী সহজ। সেই কারণে uniform convergence দেখানোর প্রথম ধাপে আমরা pointwise convergence দেখানো দিয়ে শুরু করি। যদি pointwise convergence-ই না হয়, তবে ল্যাঠা চুকেই গেল, uniform convergence দেখানোর কষ্টটা আর করতে হল না। যদি pointwise convergence অব্ধি উৎরে যায়, তবে uniform convergence দেখানোর কাজ শুরু করব। এইভাবে এগোনোর একটা বাড়তি সুবিধা আছে। যেহেতু আমাদের খালি $\{f_n\}_n$ দেওয়া থাকবে (f নয়), তাই আমরা প্রথমে প্রতিটা x-এর জন্য $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ বার করব। এই limit-গুলো দিয়েই আমাদের $f(x)$ তৈরী হবে। অর্থাৎ আমরা f-কে define-ই করব এইভাবে--

$$\forall x \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

তারপর আমরা দেখানোর চেষ্টা করব যে $f_n \to f$ uniformly হবে। নীচের অংকগুলো দেখলেই পুরো প্রক্রিয়াটা স্পষ্ট হবে।

36.1 Only pointwise

প্রথমে কয়েকটা উদাহরণ দেখি যেখানে খালি pointwise convergence হবে, uniform convergence নয়।

Example 4: Test the uniform convergence of the sequence of functions $\{f_n\}_n$ on $[0,1]$ where $f_n(x) = x^n,\ 0 \le x \le 1$.[3] **(2010.1c)**

SOLUTION: f_n-এর গ্রাফগুলো রয়েছে Fig 10-এ। প্রথমে pointwise limit বার করি। এখানে domain হল $[0,1]$. সুতরাং প্রতিটি $x \in [0,1]$ নিয়ে দেখতে হবে x^n-এর limit কী হবে যখন $n \to \infty$. একটা উদাহরণ নিই, ধরো $x = \frac{1}{2}$, সেক্ষেত্রে

$$x^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0.$$

একই কথা খাটবে $[0,1)$-এর মধ্যে অন্য যে কোনো সংখ্যার ক্ষেত্রেও--

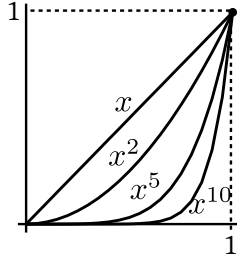



Fig 10

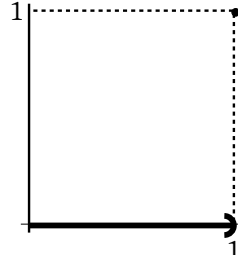



Fig 11

> We notice that for each $x \in [0,1)$
> $$f_n(x) = x^n \to 0.$$

পড়ে রইল খালি $x = 1$, সেটাকে নিয়ে কাজ করা তো আরো সোজা--

> Also for $x = 1,\ f_n(x) = 1^n \equiv 1 \to 1.$

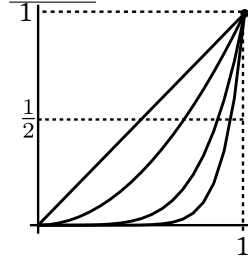
সুতরাং pointwise limit-টা পেয়ে গেলাম। এটাই আমাদের $f(x)$.

> So $\{f_n\}_n$ converges pointwise to the function
> $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [0,1) \\ 1 & \text{if } x = 1. \end{cases}$$

$f(x)$-এর গ্রাফটা আছে Fig 11-এ। এবার uniform convergence পরীক্ষা করার পালা। প্রথমে বুঝতে হবে uniform convergence হবে কী হবে না। এই কাজের জন্য ছবি আঁকতে পারলে খুব সুবিধা। এই অংকটায় সেটা সোজা। লক্ষ কর x^n-এর গ্রাফগুলো কোনো সময়েই পুরোপুরি $f(x)$-এর গ্রাফের গায় মিশে আসছে না, যেমন ধরো যদি $y = \frac{1}{2}$ সরল রেখাটা আঁকি (Fig 12) তবে সেটা সবগুলো $f_n(x)$-এর গ্রাফকেই ছেদ করবে। তার মানে প্রত্যেক n-এর জন্যই এমন একটা $x \in [0,1)$ সবসময়েই পাব যাতে $f_n(x) = x^n = \frac{1}{2}$ হয়। এদিকে $f(x) = 0$. সুতরাং সব f_n-এর সঙ্গেই f-এর গ্রাফের দূরত্ব অন্ততঃ $\frac{1}{2}$ তো বটেই!

> Shall show that this convergence is not uniform on $[0,1]$,

Uniform convergence-এর সংজ্ঞার negation-টা লিখে শুরু করি--

Fig 12

ie,

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad \exists x \in [0,1] \quad |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon.$$

$\exists\epsilon$ Choose $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$.

$\forall N$ Take any $N \in \mathbb{N}$.

$\forall n, x$ Choose $n = N$ and $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n} \in [0,1]$.

Then $f_n(x) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\right)^n = \frac{1}{2}$, and $f(x) = 0$. So

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2} \geq \epsilon,$$

as required.

■

Exercise 3: Is the sequence $\{x^n\}_n$ uniformly convergent on $(0,1)$? Justify.[2] **(2013.1bii)**
HINT: আগের অংকের উত্তরের মধ্যেই কি এই অংকের উত্তরও নেই? ভেবে দ্যাখো। ■

Example 5: Correct or justify: The sequence

$$\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}_n$$

converges uniformly on $[0,1]$.[3] **(2011.1b)**
SOLUTION: গোড়ায় একটা নাম দিয়ে নিই--

Let

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0,1].$$

তারপর pointwise limit নিয়ে দেখি। উপর-নীচ মিলিয়ে n-এর সবচেয়ে বড় power হল n^2. এই n^2 দিয়ে numerator এবং denominator-কে ভাগ করে পাই--

For each fixed $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{nx}{1+n^2x^2} \\ &= \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} \\ &\to 0. \end{aligned}$$

Thus $f_n(x) \to 0$ pointwise on $[0,1]$.

তার মানে pointwise limit হল $f(x) \equiv 0$. এবার uniform convergence পরীক্ষা করব। ছবি আঁকতে পারলে খুবই সুবিধা হত, কিন্তু f_n-এর ফর্মুলা দেখে ছবি আঁকাটা খুব সহজ মনে হচ্ছে না। আমরা দেখতে চাই f_n-রা f-এর থেকে সবচেয়ে কতদূরে যেতে পারে, মানে $|f_n(x) - f(x)|$ সবচেয়ে বেশী কত হতে পারে। যেহেতু $f(x) \equiv 0$ এবং $f_n(x) \geq 0$, তাই $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. যেহেতু $f_n(x)$-রা সবাই differentiable, অতএব maximum-টা বার করা কঠিন নয়, $f_n'(x) = 0$ বসালেই হবে। এখানে

$$f_n'(x) = \frac{n(1 + n^2x^2) - nx \cdot 2n^2x}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

এটা $= 0$ করতে হলে খালি numerator-টা $= 0$ করলেই হবে। কয়েকটা সহজ ধাপ করলেই পাবে $x = \frac{1}{n} \in [0, 1]$. এই point-এ f_n-এর value-টা হল

$$f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = \cdots = \frac{1}{2}.$$

তার মানে f_n-এর গ্রাফটা f-এর গ্রাফের থেকে অন্ততঃ $\frac{1}{2}$ দূরত্বে যায়। লক্ষ কর যে maximum বার করার জন্য আমাদের এরপর second derivative test করা উচিত ছিল, কিন্তু ও পথ মাড়ালাম না। কারণ আমাদের আসল উদ্দেশ্য তো maximum বার করা নয়, উদ্দেশ্য খালি এটা দেখা যে f_n আর f পরস্পরের থেকে কতটা দূরে থাকতে পারে। লক্ষ কর যে এই $\frac{1}{2}$-এর মধ্যে কোথাও কোনো n নেই, তার মানে যাই n নাও না কেন সব সময়েই f_n ওই দূরত্বটা বজায় রাখে। বুঝতেই পারছ মাঝখানে $\frac{1}{2}$ দূরত্ব থাকলে আর f_n গ্রাফগুলো কী করে f-এর গ্রাফের সঙ্গে মিশে একাকার হয়ে যেতে পারে! তাই f_n অবশ্যই uniformly converge করতে পারে না।
এইবার এই কথাটা গুছিয়ে লেখার পালা।

Shall show that the convergence is not uniform, ie,

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad \exists x \in [0, 1] \quad |f_n(x) - 0| \geq \epsilon.$$

এইটা যথারীতি uniform convergence-এর সংজ্ঞার negation করে পেয়েছি। প্রথমেই $\exists\epsilon$ আছে। কী করে ϵ নির্বাচন করব? আমরা জানি যে f_n আর f-এর গ্রাফের মধ্যে কম-সে-কম $\frac{1}{2}$ দূরত্ব থাকবেই, তাই ϵ-কে $\frac{1}{2}$ (বা তার চেয়ে কম কোনো কিছু) নিলেই হবে।

$\boxed{\exists\epsilon}$ Choose $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$.
$\boxed{\forall N}$ Take any $N \in \mathbb{N}$.

এবার নিতে একটা যুৎসই n আর x চাই। আমরা জানি যে সব f_n-ই f-এর থেকে $\frac{1}{2}$ দূরত্বে যায়, তাই যেকোনো $n \geq N$ নিলেই হবে, ধরো $n = N$ নিলাম। আরো জানি যে এই $\frac{1}{2}$ দূরত্বটা হয় $x = \frac{1}{n}$-এ।

$\boxed{\exists n}$ Choose $n = N$.
$\boxed{\exists x}$ Choose $x = \frac{1}{n} \in [0, 1]$.

এরপরের কাজ অতি সহজ। মাঝের কয়েকটা ধাপ ডট্ ডট্ লিখে বাদ দিয়ে গেছি, ওটুকু নিজে কষে নিও।

Then

$$|f_n(x)| = \cdots = \frac{1}{2} \geq \epsilon,$$

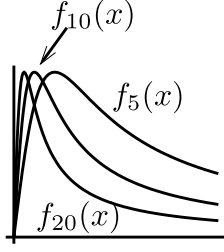
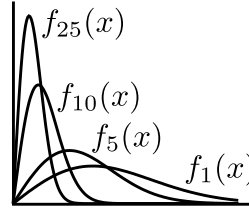
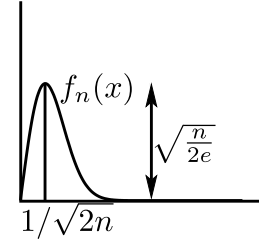



Fig 13 **Fig 14** **Fig 15**

as required.

আমরা পুরো অংকটাই ছবি ব্যবহার না করে করলাম, কারণ এখানে ফর্মুলা থেকে চট্ করে ছবি আঁকা সহজ ছিল না। কিন্তু যদি বিভিন্ন $f_n(x)$-এর গ্রাফগুলো আঁকতাম তবে দেখতে Fig 13-এর মত হত। গ্রাফগুলো দেখলেই বুঝবে যে এখানেও সেই টেবিল সরু হবার মত ব্যাপারই হচ্ছে। ■

পরের অংকটাও একইরকম।

Example 6: Show that the sequence of functions $\{f_n\}_n$ where $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $x \geq 0$, is not uniformly convergent on $[0, k]$, $k > 0$.[5] **(2010.3a)**

SOLUTION:

Here $k > 0$ is fixed.

f_n-দের গ্রাফগুলো আছে Fig 14-এ। প্রথমে pointwise convergence দেখি--

Note that for each fixed $x \in [0, k]$ we have

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2} = \frac{nx}{e^{nx^2}} \to 0,$$

since the denominator goes to ∞ faster than the numerator.

So $f_n \to 0$ pointwise on $[0, k]$.

এবার uniform convergence-এর পালা--

Shall show that the convergence is not uniform, ie,

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad \exists x \in [0, k] \quad |f_n(x)| \geq \epsilon.$$

এখানেও আগের অংকের মতই $f_n'(x) = 0$ ধরে solve করে দেখব f_n-এর গ্রাফ 0 থেকে কত দূরে যেতে পারে। Solve করে দ্যাখো--$x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ পাবে। দেখে নাও x-এর এই value-তে $f_n(x)$ কত হয়। উত্তর পাবে

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{\frac{n}{2e}}.$$

ব্যাপারটা Fig 15-তে দেখিয়েছি। লক্ষ কর যে $n \to \infty$ হলে এই দূরত্বটাও $\to \infty$ যাচ্ছে। সুতরাং f_n-এর গ্রাফটা f-এর গ্রাফের কাছে আসবে কী করে, ওদের দূরত্ব তো উল্টে ক্রমশঃ বেড়েই চলেছে! অতএব uniform convergence-এর প্রশ্নই ওঠে না।

$\boxed{\exists\epsilon}$ Choose $\epsilon = \sqrt{\frac{1}{2e}} > 0.$

$\boxed{\forall N}$ Take any $N \in \mathbb{N}.$

এবার x আর n নিতে হবে। আমরা তো ঠিক করেই রেখেছি যে $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ নেব। কিন্তু একটা ছোট্টো মুস্কিল আছে। বলে দিয়েছে যে $x \in [0, k]$ হতে হবে। সুতরাং এমন n নিতে হবে যাতে $\frac{1}{\sqrt{2n}} \in [0, k]$ হয়, মানে $n \geq \frac{1}{2k^2}$ হয়। তার মানে $n \geq N$-ও হতে হবে আবার $n \geq \frac{1}{2k^2}$-ও চাই। সুতরাং--

$\boxed{\exists n}$ Choose $n = \max\left\{N, \frac{1}{2k^2}\right\}.$

$\boxed{\exists x}$ Choose $x = \frac{1}{\sqrt{2n}} \in [0, k].$

Then

$$|f_n(x)| = nxe^{-nx^2} = \cdots = \sqrt{\frac{n}{2e}} \geq \epsilon,$$

as required.

■

একইরকম আরেকটা অংক, তবে এখানে f_n-গুলো differentiable নয়। তাতে অবশ্য কোনো অসুবিধা নেই, কারণ গ্রাফগুলো কয়েকটা সরলরেখা জুড়ে তৈরী, তাই এঁকে ফেলা সহজ।

Example 7: Show that the sequence $\{f_n\}_n$ where

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -n^2x + 2n & \text{if } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{if } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

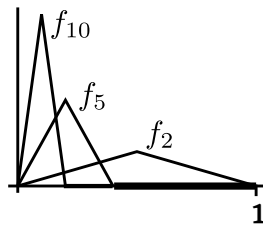
is not uniformly convergent on $[0, 1]$.[3] **(2004.3b)**

SOLUTION: ছবিটা হবে Fig 16-এর মত। ঠিক যেন একটা হাঁটু ভাঁজ করা হচ্ছে। যতই গুটিয়ে আসছে ততই উঁচু হচ্ছে।

Step 1: Shall show that for each $x \in [0, 1]$ we have $f_n(x) \to 0.$

If $x = 0,$ then $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) = 0.$ So done.

If $x > 0,$ then $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $x > \frac{2}{n}.$

Fig 16

$\therefore \forall n \geq N \quad f_n(x) = 0.$
$\therefore f_n(x) \to 0$ as $n \to \infty$, as required.

এবার uniform convergence নিয়ে মাথা ঘামাই--

Step 2: Shall show that f_n does not converge uniformly.
Enough to show that f_n does not converge uniformly to 0, ie,

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad \exists x \in [0,1] \quad |f_n(x)| \geq \epsilon.$$

$\exists\epsilon$ Choose $\epsilon = \frac{1}{2}$.
$\forall N$ Take any $N \in \mathbb{N}$.
$\exists n$ Choose $n = N$.
$\exists x$ Choose $x = \frac{1}{n}$.
Then $f_n(x) = n$.
So $|f_n(x)| \geq \frac{1}{2}$, as required.

■

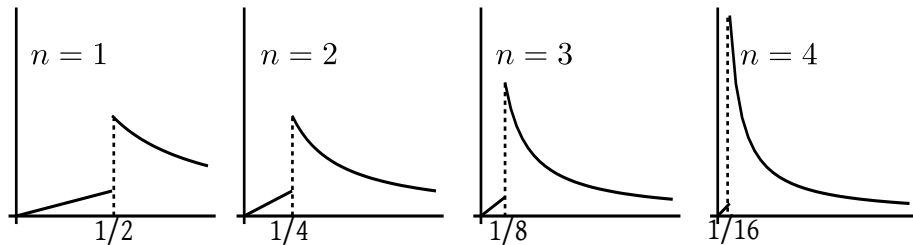
এরকম অংক বানানো খুব সোজা। নীচের অংকে তোমাকেই একটা অংক বানাতে দিলাম।

Exercise 4: আগের অংকটার আদলে একটা অংক বানাও যেখানে f_n-এর গ্রাফগুলো হবে অনেকটা Fig 16-এর মতই, খালি তাঁবুর চূড়াটা যেন সব সময়েই ঠিক 2 পর্যন্ত ওঠে। ■

Example 8: Let

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{nx} & \text{if } \frac{1}{2^n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Find the limit function of $\{f_n\}_n$.[3] **(2013.6c)**
SOLUTION: প্রথমে কল্পনা করা যাক গ্রাফগুলো কিরকম হবে। Fig 17-এ f_1, f_2, f_3 আর f_4-এর ছবি দিয়েছি। লক্ষ কর যে প্রতিটা গ্রাফের দুটো অংশ, ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনের বাঁদিকে একটা সরলরেখা আর ডানদিকে একটা curve যেটা ক্রমশঃই বেঁকে যাচ্ছে। আরো লক্ষ করো যে ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনটা ক্রমশঃ বাঁদিকে সরছে। ফলে সরলরেখাটা কোণঠাসা হয়ে যাচ্ছে। সুতরাং

Fig 17

একমাত্র $x = 0$ বাদ দিলে আর যাই x নাও না কেন, একসময়ে ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনটা তার বাঁদিকে চলে যাবে। তাই limit-টা নির্ভর করবে কেবল curve অংশটার আচরণের উপর, সরলরেখাটার উপর নয়। যেহেতু curve-টা ক্রমেই নুয়ে পড়ছে তাই সেটা খুব উঁচু থেকে শুরু হলেও অতি শীঘ্র x-axis-এর খুব কাছে নেমে আসবে। সেটা ফর্মুলা থেকেও বোঝা যাচ্ছে, $x > 0$ হলে $\frac{1}{nx} \to 0$ হবে। সুতরাং limit-টা আন্দাজ করা যাচ্ছে--

Shall show that the limit function is zero, ie,

$$\forall x \in [0,1] \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x) - 0| < \epsilon.$$

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in [0,1]$.

If $x = 0$, then $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) = 0$. So nothing to prove in this case.

Let us consider $x \neq 0$.

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because \frac{1}{2^n} \to 0$ as $n \to \infty$,

$\therefore \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad \frac{1}{2^n} < x$.

অর্থাৎ যেই $n \geq N_1$ হবে তখন x-টা curve অংশটার আওতায় চলে আসবে।

Also, $\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad \left|\frac{1}{nx}\right| < \epsilon$.

$\boxed{\exists N}$ Choose $N = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\forall n}$ Take any $n \geq N$.

Then $|f_n(x)| = \left|\frac{1}{nx}\right| < \epsilon$, as required.

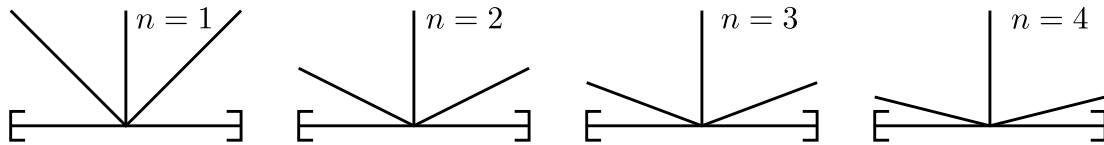
■

36.2 Uniform

আমরা এতক্ষণ দেখছিলাম $|f_n(x) - f(x)|$ কত বড় হতে পারে। প্রতি ক্ষেত্রেই দেখা যাচ্ছিল যে n যতই বাড়ুক না কেন, এই দূরত্বটা কোনো না কোনো x-এর জন্য ঠিক বড়ই থেকে যাচ্ছে। তাই কোনো ক্ষেত্রেই uniform convergence হচ্ছিল না। কিন্তু যদি তা না হত? সেরকম একটা অংক দেখা যাক।

Example 9: Let $f_n(x) = \frac{|x|}{n}$, $x \in [-2014, 2014]$. Test the uniform convergence of the sequence $\{f_n\}_n$ over the said interval.[3] **(2014.6a)**

SOLUTION: প্রথম Fig 18 দেখে বুঝে নাও function-গুলো দেখতে কেমন।

Fig 18

Shall show that f_n converges to 0 uniformly on $[-2014, 2014]$, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [-2014, 2014] \quad |f_n(x) - 0| < \epsilon.$$

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

By Archimidian property, $\exists N \in \mathbb{N} \quad \frac{2014}{N} < \epsilon$.

$\exists N$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

Take any $x \in [-2014, 2014]$.

Then $|f_n(x) - 0| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{2014}{n} < \epsilon$, as required.

■

এতক্ষণ যা সব অংক আলোচনা হল তা থেকে আশা করি অনুভব করতে পারছ যে, $\sup\{|f_n(x) - f(x)| \; : \; x \in D\} \to 0$ হলে uniform convergence হতে বাধ্য। এই জিনিসটাই প্রমাণ করতে দিয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 10: Let $f_n, f : D \to \mathbb{R}$ be such that

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \; : \; x \in D\} \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

Then show that $f_n \to f$ uniformly on D.

SOLUTION:

Given:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \sup\{|f_n(x) - f(x)| \; : \; x \in D\} < \epsilon. \qquad (*)$$

To show:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Take any $\epsilon > 0$.

Choose N as in (*).

$\forall n, x$ Take any $n \geq N$ and any $x \in D$.

Then

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup\{|f_n(x) - f(x)| \; : \; x \in D\} < \epsilon,$$

as required.

■

এর উল্টোটাও একইরকম সত্যি, নীচের অংকটা সেটা নিয়েই।

Exercise 5: Let $f_n, f : D \to \mathbb{R}$ be such that

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \; : \; x \in D\} \not\to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

Then show that $f_n \not\to f$ uniformly on D. ■

Exercise 6: Show $\{f_n'(x)\}_n$ is uniformly convergent on $[0,1]$ where

$$f_n(x) = \frac{\log(1+n^2x^2)}{n^2}, \quad x \in [0,1].$$

[3] **(2014.6c)**
HINT:
মূল ধাপগুলো বলে দিচ্ছি, সাজিয়ে লেখার দায়িত্ব তোমার। প্রথমে differentiate করে দেখাও যে

$$f_n'(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}.$$

এখানে n যেভাবে খালি নীচের তলায় রয়েছে, তাতে বুঝতেই পারছ যে $n \to \infty$ হলে $f_n \to 0$ হওয়া ভিন্ন গত্যন্তর নেই। দেখাতে হবে যে সেই convergence-টা uniform. প্রথমে দেখে নিই $f_n'(x)$-টা 0-র থেকে কতদূরে যেতে পারে, মানে $|f_n'(x) - 0|$-র maximum বার করব। কাজটা সহজই কারণ $|f_n'(x) - 0|$ আসলে $f_n'(x)$ নিজেই। সেটাকে differentiate করলেই পাবে

$$\frac{2(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}.$$

বুঝতেই পারছ যে $x < \frac{1}{n}$ হলে এটা > 0, এবং $x = \frac{1}{n}$-এ এটা 0, আর $x > \frac{1}{n}$ হলে এটা < 0. মানে f_n'-র গ্রাফটা প্রথমে উঠছে, $x = \frac{1}{n}$-এ maximum হচ্ছে, এবং তারপর নেমে যাচ্ছে। চট্ করে বার করে দেখে নাও যে এই maximum-টা হল $f_n'\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. যেহেতু এই maximum-টাই 0-র দিকে যাচ্ছে, তাই পুরো গ্রাফটাকেই 0-র সাথে মিশে যেতে হবে, অর্থাৎ uniform convergence. এবার পুরোটা গুছিয়ে লিখে ফ্যালো দেখি! ■

এবার একটা ভিন্ন স্বাদের অংক দেখি।

Example 11: Let $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a continuous function with $g(1) = 0$. Show that the sequence of functions $\{f_n\}_n$ defined by

$$f_n(x) = x^n g(x) \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

converges uniformly to the constant function zero.[3] **(2003.3a)**
SOLUTION: এই অংকটায় অনেক কিছু বলে কাজ সহজ করে দিয়েছে। প্রথমতঃ বলেই দিয়েছে যে uniform convergence হবে। দ্বিতীয়তঃ, এটাও বলে দিয়েছে যে limit function-টা হবে constant function zero, মানে $f(x) \equiv 0$. সেই কারণে এখানে আর pointwise convergence-এর ধাপটা লাগবে না।

To show

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in [0,1] \quad |f_n(x) - 0| < \epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

কী করতে চলেছি বলে রাখি। আমরা আগেই দেখেছি যে $\{x^n\}_n$ sequence-টা $[0,1]$-এর uniformly convergent নয়, তার কারণ ছিল সবগুলো x^n-ই $x = 1$-এর কাছে গিয়ে সটান মাথা তুলে উঠছে। এই অংকটায় তার প্রতিষেধক হিসেবে x^n-কে $g(x)$ দিয়ে গুণ করে দেওয়া হয়েছে, যেখানে $g(1) = 0$ এবং $g(x)$ হল continuous at $x = 1$. ফলে $x = 1$-এর কাছে $g(x)$-টা 0-র কাছাকাছি থাকবে, এবং ফলে $x^n g(x)$-কেও বেশী মাথা তুলতে দেবে না।

$\because g(x)$ is continuous at $x = 1$ and $g(1) = 0$,

$$\therefore \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (1-\delta, 1] \quad |g(x)| < \epsilon.$$

Let $t = 1 - \delta$.

Then $t \in [0, 1)$, and so $t^n \to 0$.

Since $g(x)$ is continuous on the closed and bounded set $[0, 1]$, $g(x)$ is bounded above, by $B > 0$, say.

Then $\exists N \in \mathbb{N} \quad t^N < \frac{\epsilon}{B}$.

Choose this N.

$\forall n, x$ Take any $n \geq N$ and any $x \in [0, 1]$.

Shall show that $|x^n g(x)| < \epsilon$.

দুটো কেসে ভাঙব-- যদি $x \in [0, t]$ হয় তবে x^n ছোটো বলে $|x^n g(x)|$ ছোটো হবে। আর যদি $x \in (t, 1]$ হয় তবে $|g(x)|$ ছোটো বলে $|x^n g(x)|$ ছোটো হবে।

Case 1: If $x \in [0, t]$, then

$$|x^n g(x)| < Bx^n \leq Bt^n < B\frac{\epsilon}{B} = \epsilon,$$

as required.

Case 2: If $x \in (t, 1]$, then

$$|x^n g(x)| < |g(x)| < \epsilon,$$

as required.

■

Example 12: Let ϕ be continuous on $[0, 1]$ and $f_n(x) = x^n \phi(x),\ 0 \leq x \leq 1$. If $\phi(1) = 0$, show that $\{f_n\}_n$ converges uniformly on $[0, 1]$.[3] **(2007.4c)**

SOLUTION: আগের অংকটাই। ■

এইবার একই রকম কায়দায় নীচের অংকটা কর দেখি।

Exercise 7: Let $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ be any function that is continuous at $x = 1$. Show that the sequence $\{x^n g(x)\}_n$ converges uniformly if and only if $g(1) = 0$. ■

36.3 পাঁচমিশালী

এবার কিছু বিভিন্ন ধরণের অংক দিই, যেখানে তোমাকে বুদ্ধি খাটিয়ে আন্দাজ করতে হবে খালি pointwise convergence হচ্ছে নাকি uniform convergence হচ্ছে, নাকি কোনোটাই হচ্ছে না। এই অংকগুলো করার জন্য গ্রাফ দিয়ে ভাবলে সুবিধা

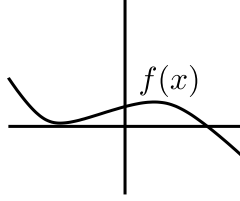
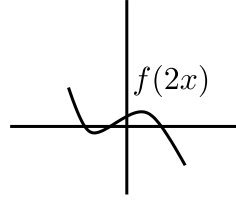



Fig 19 **Fig 20**

হবে। বিশেষতঃ মনে রেখো $f(x)$-এর গ্রাফ জানা থাকলে কী করে তা থেকে $f(ax)$ আর $af(x)$-এর গ্রাফ পাওয়া যায়। যেমন $f(x)$-এর গ্রাফ যদি Fig 19-এর মত হয়, তবে $f(2x)$-এর গ্রাফ পাবে সেটাকে horizontal দিকে $\frac{1}{2}$ পরিমাণ সংকুচিত করলে (Fig 20)। আবার $2f(x)$-এর গ্রাফ পাবে vertical দিকে 2 পরিমাণ প্রসারিত করলে (Fig 21)।

Exercise 8: State with justification which of the following sequences of functions converge pointwise or uniformly (or neither):

(i) $f_n(x) = \sin nx$ for $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $f_n(x) = \sin nx$ for $x \in [0, \pi]$,

(iii) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$ for $x \in \mathbb{R}$,

(iv) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$ for $x \in [0, \pi]$,

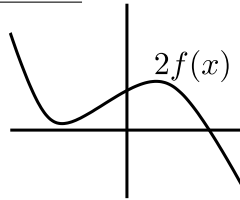
(v) $f_n(x) = x^n$ for $x \in [1, 2]$,

(vi) $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{x^2/n^2}$ for $x \in \mathbb{R}$

(vii) $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{x^2/n^2}$ for $x \in (0, 1)$

(viii)
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{if } x = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{if } x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{n}\} \end{cases}$$

(ix) $f_n(x) = (n+1) g_n(x)$ for $x \in [0, 1]$, where
$$g_n(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ \frac{2}{n} - x & \text{if } \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n} \\ 0 & \text{if } \frac{2}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

Fig 21

(x) For $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}\sin nx & \text{if } n \text{ odd} \\ \frac{1}{n}\cos nx & \text{if } n \text{ even} \end{cases}$$

■

এবার একটা ঠকানো প্রশ্ন দিই।

Exercise 9: এমন একটা sequence $\{f_n(x)\}_n$ আর এমন একটা function $f(x)$ দিতে পারো যারা সবাই পুরো $\mathbb{R}$-এর উপরে defined, এবং প্রতিটি closed, bounded interval $[a,b]$-র উপরেই $f_n \to f$ uniformly, কিন্তু পুরো $\mathbb{R}$-এর উপরে uniformly converge করে না? ■

এই অংকটা করতে গিয়ে যদি মাথা ঘুরে যায়, তবে বলে রাখি যে এর একটা খুবই সহজ উত্তর আছে। শুধু তাই নয় এই sequence-টা ইতিমধ্যে একটা উদাহরণে ব্যবহারও করেছি!

DAY 37
Conditions

ধরো একটা sequence $\{f_n(x)\}_n$ দিয়ে জিজ্ঞাসা করল এটা uniformly converge করে কি না। সেই প্রশ্নের একটা উত্তর আমরা শিখেছি--সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করে। সব সময়ে অবশ্য সেই কায়দাটা সহজ হয় না, বিশেষতঃ যদি function-গুলো জটিল হয়। আজকে আমরা তিনটে কায়দা আলোচনা করব যা দিয়ে সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার না করেই uniform converge দেখানো যায়। এই পদ্ধতিগুলোর জন্য অবশ্য বাড়তি কিছু শর্ত লাগে, তাই সব সময়ে ব্যবহার করা যায় না। কিন্তু যখন যায় তখন খুবই কাজে লাগে। আমরা একে এক তিনটে পদ্ধতি বলব। এদের মধ্যে প্রথমটা সবচেয়ে সহজ, আর দ্বিতীয় পদ্ধতিটা (যার নাম uniform Cauchy criterion) হল সবচেয়ে দরকারী।

37.1 Finite domain

আমরা যখন টেবিলের উপমা দিয়ে uniform convergence-এর ব্যাপারটা বোঝাচ্ছিলাম, তখন দুটো উদাহরণ দিয়েছিলাম--এক, যেখানে টেবিলটা সরে সরে যাচ্ছিল, আর দুই, যেখানে টেবিলটা ক্রমশঃ সরু হচ্ছিল। দুটোরই মূল ব্যাপার একই ছিল, অন্ততঃ একটা point ছিল যেখানে f_n আর f-এর মধ্যে দূরত্ব বজায় থাকছে, কিন্তু সেই point-টা n-এর সঙ্গে পরিবর্তিত হচ্ছে, তাই pointwise convergence-এর অসুবিধা হচ্ছে না। এই point-টা যেন একটা দুষ্টু কাঠবিড়ালী, ধরতে গেলেই লাফিয়ে লাফিয়ে সরে যাচ্ছে। এক জায়গায় কখনও বারবার আসছে না। তুমি কোনো একজায়গায় ফাঁদ পেতে ওকে ধরতে পারবে না। কিন্তু domain-টা যদি finite হয়, তবে কিন্তু কাঠবিড়ালীর দুষ্টুমি বন্ধ হতে বাধ্য, finite জায়গায় তো আর প্রত্যেক ধাপে নতুন নতুন জায়গায় যেতে পারবে না! সেই কারণে যদি f_n-এর pointwise limit যদি f হয় আর domain যদি finite হয়, তবে $f_n \to f$ uniformly হতেও বাধ্য। এইটাই নীচের অংকে দেখাতে বলেছে।

Example 13: Prove that if for the sequence $\{f_n\}_n$, $f_n \to f$ pointwise on a finite set $D(\subseteq \mathbb{R})$

then the convergence is uniform.[3] **(2007.3c)**

SOLUTION: প্রথমে D-এর element-গুলোর নাম দিয়ে নিই--

> Let $D = \{a_1, ..., a_k\}$.
>
> Given: $f_n \to f$ pointwise on D,
>
> *i.e.*,
>
> $$\forall \epsilon > 0 \quad \forall i \in \{1,...,k\} \quad \exists N_i \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_i \quad |f_n(x_i) - f(x_i)| < \epsilon. \qquad (*)$$
>
> To show: $f_n \to f$ uniformly on D,

i.e.,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{1, ..., k\} \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x_i) - f(x_i)| < \epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\exists N$ Choose $N = \max\{N_1, ..., N_k\}$, where N_i's are as in (*).

$\forall i, n$ Take any $i \in \{1, ..., k\}$, and any $n \geq N$.

Then $n \geq N_i$.

$\therefore |f_n(x_i) - f(x_i)| < \epsilon$, as required.

■

Exercise 10: Let D be a finite subset of $\mathbb{R}$. If a sequence $\{f_n\}_n$ of real-valued functions on D converges pointwise to f, prove that $\{f_n\}_n$ converges to f uniformly on D.[3] **(2003.1b)** ■

তার মানে finite domain-এর বেলায় pointwise convergenceআর uniform convergence সমার্থক। কাঠবিড়ালীর উপমাটা যদি বুঝে থাকো তবে দেখবে যে এর উল্টো কথাটাও সত্যি। মানে, যদি $E \subseteq \mathbb{R}$ এমন একটা set হয় যাতে যাবতীয় pointwise convergent sequence-ই uniformly convergent-ও হয়, তবে E একটা finite set হতে বাধ্য। প্রমাণ করতে পারো? মোটেই কঠিন নয় কিন্তু!

37.2 Uniform Cauchy criterion

আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডেই Cauchy criterion-এর সঙ্গে পরিচিত হয়েছি--যদি $\{a_n\}_n$ কোনো real number-এর sequence হয় তবে তাকে একটা Cauchy sequence বলা হয় যদি এই শর্তটা পালিত হয়--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |a_m - a_n| < \epsilon. \qquad (\mathbf{1})$$

এই শর্তটাকেই বলে Cauchy criterion. এটার মানে হল $\{a_n\}_n$-এর term-গুলো এমন ঠাসাঠাসি করে আছে যে যতটুকু জায়গা ϵ-ই দাও না কেন, প্রায় সবগুলো term-ই তার মধ্যে এঁটে যাবে। Cauchy criterion-এর গুরুত্ব ছিল এই যে, সব convergent sequence-ই এই শর্তটা পালন করে, এবং বিপরীতপক্ষে যে কোনো Cauchy sequence-ই convergent হতে বাধ্য। অর্থাৎ কিনা convergent sequence আর Cauchy sequence একই কথা। আমরা জানি যে একটা sequence-কে convergent বলে যদি সেটা কোনো $\ell \in \mathbb{R}$-এ converge করে, মানে

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - \ell| < \epsilon. \qquad (\mathbf{2})$$

যদিও $(\mathbf{1})$ আর $(\mathbf{2})$ সমার্থক, তবুও $(\mathbf{2})$-এর চেয়ে $(\mathbf{1})$ ব্যবহার করার একটা সুবিধা আছে। যদি $(\mathbf{2})$-টা প্রমাণ করতে যাই, তবে শুরুতেই একটা যুৎসই $\ell \in \mathbb{R}$ খুঁজে পেতে হবে (কারণ $(\mathbf{2})$-এর গোড়াতেই একটা $\exists \ell \in \mathbb{R}$ আছে)। অনেক sequence-এর বেলাতেই limit ℓ-টাকে আগেভাগে আন্দাজ করা কঠিন। কিন্তু $(\mathbf{1})$-এর বেলায় সে ঝামেলা নেই, কারণ ওতে ℓ-এর উল্লেখমাত্র নেই, খালি a_n-গুলো জানলেই ওটা লাগানো যায়। তাই যখনই এমন sequence নিয়ে কাজ করতে হয়, যার limit-টা বার করা কঠিন, কিন্তু তাও limit -টা যে exist করে সেটা দেখাতে হবে, তখনই Cauchy criterion-এর ডাক পড়ে।

Real analysis-এ যত রকম limit আছে, সব কিছুর জন্যই একটা করে Cauchy criterion আছে। আমরা এই বইয়ের দ্বিতীয় খণ্ডে infinite series-এ Cauchy criterion-এর কথা পড়েছিলাম।

Function-এর sequence-এর বেলাতে দুরকম convergence-এর কথা শিখেছি--pointwise আর uniform. এদের দুজনের জন্যও Cauchy criterion আছে। Pointwise convergence মানে হল

$$\forall a \in E \quad f_n(a) \to f(a).$$

সুতরাং যদি কোনো $a \in E$ স্থির রাখি তবে এখানে কাজ হচ্ছে $\{f_a(a)\}_n$ নিয়ে, যেটা একটা real number-এর sequence. সুতরাং $(\mathbf{1})$-এ a_n-এর জায়গায় $f_n(a)$ বসিয়ে সব মিলিয়ে পাব--

$$\forall a \in E \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |f_m(a) - f_n(a)| < \epsilon.$$

এটাই হল pointwise convergence-এর জন্য Cauchy criterion. যেহেতু দুটো $\forall$ পরপর থাকলে তাদের ক্রমপরিবর্তন করা যায়, তাই এটাকে আমরা এভাবেও লিখতে পারতাম--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall a \in E \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |f_m(a) - f_n(a)| < \epsilon.$$

Uniform convergence-এর জন্য যে Cauchy criterion, তাকে অনেক সময়ে বলে uniform Cauchy criterion. এটা কী হবে সেটা আন্দাজ করা কঠিন নয়। আশা করি মনে আছে যে pointwise convergence-এর সংজ্ঞা থেকে কিভাবে একটা $\forall$ আর $\exists$-কে আগে পরে করে uniform convergence-এর সংজ্ঞা পেয়েছিলাম। ঠিক একই কাজ এখানেও করব। তাতে পাব

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall a \in E \quad \forall m, n \geq N \quad |f_m(a) - f_n(a)| < \epsilon.$$

এটাই হল uniform Cauchy criterion. এইটা আর uniform convergence যে সত্যিই সমার্থক, সেটা প্রমাণ করতে দিয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 14: State and prove Cauchy criterion for uniform convergence of a sequence of real-valued functions defined on a set of real numbers.[1+4] **(2011.3a)**

SOLUTION:

Cauchy criterion for uniform convergence

Let $\{f_n\}_n$ be a sequence of real-valued functions all defined on $D \subseteq \mathbb{R}$. Then f_n converges uniformly (to some function) on D iff

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \qquad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Proof:

Uniformly Cauchy $\implies$ uniform convergence: To show

$$\exists f : D \to \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

For each fixed $x \in D$ the sequence $\{f_n(x)\}_n$ is a Cauchy sequence in $\mathbb{R}$, and hence is convergent.

$\exists f$ Choose $f(x) = \lim_n f_n(x)$.

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Since $\{f_n\}_n$ is uniformly Cauchy,

$$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

$\exists N$ Choose this N.

$\forall n, x$ Take any $n \geq N$ and any $x \in D$.

Shall show that $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Since $f_n(x) \to f(x)$
So $\exists M_1 \in \mathbb{N} \quad |f_{M_1}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$.
Let $M = \max\{M_1, N\}$.

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - f(x)| \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

<u>Uniform convergence $\implies$ uniformly Cauchy:</u>

To show

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because \{f_n\}_n$ is uniformly convergent (to some f) on D,

$$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

$\exists N$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

Take any $m, n \geq N$.

Take any $x \in D$.

Then

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

■

Example 15: Let $E \subseteq \mathbb{R}$. Show that a sequence of functions $f_n : E \to \mathbb{R}$ is uniformly convergent on E if and only if for every $\epsilon > 0$ there exists a positive integer p such that $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ $\forall x \in E$ and $\forall m, n \geq p$.[4] **(2009.3a)**

SOLUTION: আগের অংকটাই। ■

37.3 Dini

এ বইয়ের প্রথম খণ্ডে আমরা একটা খুব কাজের জিনিস শিখেছিলাম--real number-এর একটা sequence যদি একইসঙ্গে monotone increasing এবং bounded from above হয়, তবে সেটা converge করতে বাধ্য। একই কথা খাটে যদি একটা monotone decreasing sequence হয় bounded from below.

দুঃখের কথা এই যে, ঠিক এই ব্যাপারটা function-এর sequence-এর বেলায় বলা যায় না। তবে এর কাছাকাছি একটা জিনিস বলা যায়, তাকে বলে Dini's theorem. এবার সেইটা আলোচনা করব।

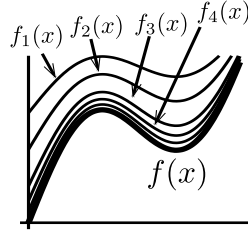
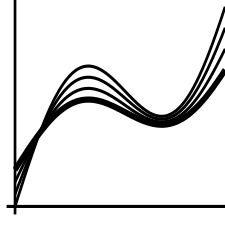
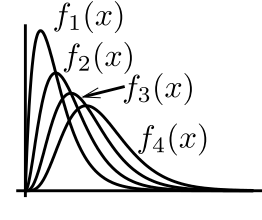



Fig 22 **Fig 23** **Fig 24**

ধরো $\{f_n\}_n$ আর f সবারই domain হল $E \subseteq \mathbb{R}$. বলা আছে $f_n \to f$ pointwise. এর সঙ্গে যদি আরও বলে দিই যে $\{f_n\}_n$ একটা decreasing sequence তবে কি convergence-টা uniform-ও হবে? এখানে "decreasing sequence of functions" মানে কী বুঝেছো তো? যদি f_n-গুলোর গ্রাফ আঁকো তবে পর পর নীচে নামতে থাকবে Fig 22-এর মত, Fig 23 বা Fig 24-এর মত নয়। লক্ষ কর যে $f_n(x)$-রা নিজেরা কিন্তু decreasing function নাই হতে পারে! অংকের ভাষায় লিখলে "decreasing sequence of functions"-এর সংজ্ঞা হবে এইটা--

$$\forall x \in E \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) \geq f_{n+1}(x).$$

যদি এরকম একটা sequence কোনো $f(x)$-এ pointwise converge করে তবে বুঝতেই পারছ যে সেই $f(x)$-টা পুরো sequence-টার নীচে থাকতে বাধ্য, মানে একটা lower bound-এর কাজ করছে। Fig 22 দ্যাখো। এই ছবিতে convergence-টা যে uniform সে বিষয়ে সন্দেহ নেই, কিন্তু প্রশ্ন হল যে কোনো decreasing sequence-এর ক্ষেত্রেই কি convergence-টা uniform হতে বাধ্য? উত্তর হল--না।

Exercise 11: এই অধ্যায়ে যতগুলো উদাহরণ এ যাবৎ ব্যবহার করেছি তার মধ্যেই এমন একটা $\{f_n\}_n$ আর f-এর কথা আছে যেখানে $\{f_n\}_n$-টা একটা decreasing sequence, এবং $f_n \to f$ pointwise, অথচ convergence-টা uniform নয়। বলতে পারো কোন $\{f_n\}_n$ আর f-এর কথা বলছি? ■

কিন্তু যদি এর সঙ্গে আরো কয়েকটা শর্ত চাপাই তবেই কিন্তু জোর দিয়ে বলতে পারি যে convergence-টা uniform হবেই! সেই বাড়তি শর্তগুলো হল--

1. যদি f_n এবং f যদি সবাই continuous function হয়।
2. যদি E একটা compact set হয়।

সব মিলিয়ে যেটা দাঁড়ালো সেটাই হল Dini's theorem.

> **THEOREM**
> Let $\{f_n\}$ be a sequence of continuous functions on an interval $[a, b]$ such that
>
> $$\forall x \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) \geq f_{n+1}(x).$$
>
> If $\{f_n\}_n$ converges pointwise to a continuous function f on $[a, b]$, then the convergence must be uniform.

কিন্তু এতরকম শর্ত লাগে বলে, এটা বাস্তবে বড় একটা কাজে আসে না।

Example 16: Using Dini's theorem, prove that the sequence $\{f_n\}_n$ is uniformly convergent on

$[0, 1]$ where

$$f_n(x) = x^{n-1} - x^n, \quad 0 \le x \le 1.$$

[3] **(2013.6b)**

SOLUTION: বলেই দিয়েছে যে Dini's theorem লাগাতে হবে, অতএব ভালোমানুষের মত শর্তগুলো পরপর পরীক্ষা করে যাওয়া ছাড়া পথ নেই।

We first check that

$$\forall x \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) \ge f_{n+1}(x),$$

ie,

$$x^{n-1} - x^n \ge x^n - x^{n+1},$$

or

$$x^{n-1}(1 - x) \ge x \times x^{n-1}(1 - x),$$

which is true since $x \in [0, 1]$.

Also $\lim_{n\to\infty} x^n$ exists finitely for $x \in [0, 1]$.

So $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^{n-1} - \lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

Thus the limit function is the zero function, which is continuous.

So by Dini's theorem the convergence must be uniform.

এখানে অংকটা Dini's theorem দিয়ে করতে বলেছিল বটে, কিন্তু এটা সরাসরি সংজ্ঞা থেকেও সহজেই করে দেওয়া যেত। চেষ্টা করেই দ্যাখো! ■

নীচের অংকে Dini's theorem-টা পুরো লিখে দিয়ে বলেছে প্রমাণ করতে। প্রমাণটা ঠিক সোজা পথে এগোয় না। ধীরে ধীরে পড়।

Example 17: Let $\{f_n\}$ be a sequence of continuous functions on an interval $[a, b]$. Suppose that for each $x \in [a, b]$ and for all $n \in \mathbb{N}$ (the set of natural numbers), $f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$ and $\{f_n\}$ converges pointwise to a function f on $[a, b]$. If f is continuous, then show that $\{f_n\}$ converges to f uniformly on $[a, b]$.[4] **(2008.3b)**

SOLUTION:

To show

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \quad \forall x \in [a, b] \quad f_n(x) \in N(f(x), \epsilon).$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Define $A_n = \{x \in [a, b] \ : \ f_n(x) - f(x) < \epsilon\}$.

$\because f, f_n$ are continuous,

$\therefore f - f_n$ is continuous,

$\therefore A_n$ is open in $[a, b]$.

Note that $A_n \subseteq A_{n+1}$.

⟦ Because:

$$\begin{aligned} x \in A_n &\implies f_n(x) - f(x) < \epsilon \\ &\implies f_{n+1}(x) - f(x) < \epsilon \quad [\because f_n(x) \geq f_{n+1}(x)] \\ &\implies x \in A_{n+1} \end{aligned}$$

⟧

So

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots . \qquad (*)$$

Also

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = [a, b].$$

⟦ Because:

$\because A_n \subseteq [a, b], \therefore \cup A_n \subseteq [a, b]$.
Conversely, let $x \in [a, b]$.
$\because f_n(x) \to f(x)$,

$$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad f_n(x) \in N(f(x), \epsilon).$$

So $f_N(x) \in N(f(x), \epsilon)$,
or $f_N(x) - f(x) < \epsilon$, $\because f_N(x) \geq f(x)$.
So $x \in A_N \subseteq \cup A_n$.

⟧

Thus $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ is an open cover of $[a, b]$.
Since $[a, b]$ is a compact set, so there is a finite subcover

$$A_{n_1}, ..., A_{n_k}, \text{say.}$$

So $[a, b] \subseteq \cup_{i=1}^{k} A_{n_i} = A_N$, where

$$N = \max\{n_1, ..., n_k\},$$

by $(*)$.
Thus,

$$\forall x \in [a, b] \quad f_N(x) - f(x) < \epsilon.$$

$\boxed{\exists N}$ Choose this N.
$\boxed{\forall n}$ Take any $n \geq N$.
$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= f_n(x) - f(x) \quad [\because f_n(x) \geq f(x)] \\ &\leq f_N(x) - f(x) \quad [\because n \geq N \implies f_n(x) \leq f_N(x)] \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

■

Exercise 12: Suppose K is compact in $\mathbb{R}$ and

1. $\{f_n\}_n$ is a sequence of continuous functions on K,
2. $\{f_n\}_n$ converges pointwise to a continuous function f on K,
3. $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ for all $x \in K$ and for all positive integers n.

Prove that $\{f_n\}_n$ converges uniformly to f on K.[6] **(2010.3b)** ■

DAY 38 Properties (part 1)

যদি $\{f_n\}_n$ গিয়ে uniformly f-এ converge করে, তবে সাধারণতঃ f_n-এর বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য f-এ সংক্রামিত হয়। আবার কিছু কিছু বৈশিষ্ট্য হয় না। এবার আমরা এই দুই ধরণের কিছু বৈশিষ্ট্যের কথা শিখব।

38.1 Continuity

যদি f_n-রা সবাই continuous হয় এবং $f_n \to f$ uniformly হয়, তবে f-ও continuous হতে বাধ্য। কিন্তু যদি convergence-টা pointwise হত তাহলে এমন কথা মোটেই জোর দিয়ে বলা যেত না। নীচের অংকে এরকম একটা উদাহরণ চেয়েছে।

Example 18: Cite an example with justification of a sequence of real-valued continuous functions whose pointwise limit function is not continuous.[3] **(2012.1b)**

SOLUTION:

Let $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be defined as

$$f_n(x) = x^n \text{ and } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [0,1) \\ 1 & \text{if } x = 1. \end{cases}$$

Then for each fixed $x \in [0,1)$ we have $f_n(x) = x^n \to 0 = f(x)$.
Also $f_n(1) = 1^n \equiv 1 \to 1 = f(1)$.
So $f_n \to f$ pointwise on $[0,1]$.

Each f_n is continuous, but f is not continuous (at $x = 1$).

■

Example 19: Prove or disprove: The limit function of

$$\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}_n$$

is continuous on $[0, 2]$.[2] **(2014.1bii)**
SOLUTION:

Shall show that the limit function is not continuous.
At $x = 1$, we have $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(1) = \frac{1}{2}$.
$\therefore \lim_n f_n(1) = \frac{1}{2}$.
If $x \in [0, 1)$, then $0 \leq f_n(x) \leq x^n$.
Since for $x \in [0, 1)$, we have $x^n \to 0$, hence by sandwich law, $\lim_n f_n(x) = 0$.
Thus, if the limit function is called $f(x)$, then $\forall x \in [0, 1) \quad f(x) = 0$.
So $f(1-) = 0 \neq f(1)$.
Hence the limit function is not continuous.

■

লক্ষ কর যে এই অংকে f_n-গুলো সবাই দিব্যি continuous ছিল, তাও $f(x)$-টা continuous রইল না। কিন্তু uniform convergence-এর বেলায় এরকম কোনো ঝামেলা নেই। সেটা প্রমাণ করব নীচের অংকটায়।

Example 20: Let the sequence of functions $\{f_n\}_n$ converge uniformly to f on $[a, b]$ and each f_n is continuous on $[a, b]$. Prove that f is continuous on $[a, b]$.[4] **(2006,2004)**
SOLUTION: দিয়েছে যে $f_n \to f$ uniformly, এবং সবগুলো f_n-ই continuous. দেখাতে হবে যে f-ও continuous হবে। প্রথমে continuity-র সংজ্ঞা লিখে শুরু করি--

To show

$$\forall c \in [a, b] \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(c, \delta) \quad |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

Take any $c \in [a, b]$ and any $\epsilon > 0$.

এইবার একটা যুৎসই $\delta > 0$ পেতে হবে। তাই একটু রাফ করে নিই। আমাদের দেখাতে হবে যে x যদি c-এর কাছাকাছি থাকে তবে $f(x)$ থাকবে $f(c)$-র কাছাকাছি। এমনটা হবে এমন মনে করার কারণ কী? কারণ, f_n-গুলো সবাই continuous, এবং f_n-দের গ্রাফগুলো ক্রমশঃ f-এর গ্রাফের সঙ্গে মিশে একাকার হয়ে যাচ্ছে। মনে করো একটা এমন f_n নিলাম যেটা f-এর সঙ্গে প্রায় মিশে আছে। Fig 25 দ্যাখো। আমাদের দেখাতে হবে $f(c)$ আর $f(x)$-র মধ্যে দূরত্ব কম। মনে করো একটা লোক $f(c)$ থেকে $f(x)$ যাচ্ছে। একধাপে না গিয়ে সে তিনধাপে ভেঙে যাবে ঠিক করেছে--

- প্রথম ধাপে $f(c)$ থেকে $f_n(c)$,

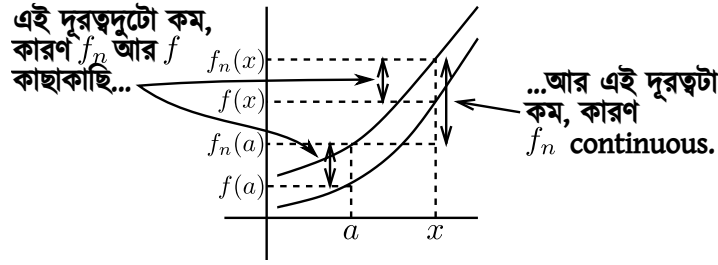



Fig 25

- দ্বিতীয় ধাপে $f_n(c)$ থেকে $f_n(x)$,
- তৃতীয় ধাপে $f_n(x)$ থেকে $f(x)$.

লক্ষ কর এই প্রতিটি ধাপই খুব ছোটো--প্রথম আর তৃতীয় ধাপটা ছোটো কারণ f_n রয়েছে f-এর খুব কাছে। আর দ্বিতীয় ধাপটা ছোটো কারণ f_n হল continuous.

$\because f_n \to f$ uniformly on $[0,1]$,

$$\therefore \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\epsilon}{3}.$$

সুতরাং প্রথম আর তৃতীয় ধাপের ব্যবস্থা হল। এবার দ্বিতীয় ধাপটাকে ছোটো করার বন্দোবস্ত দেখি--

$\because f_n$ is continuous at c,

$\therefore \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(c,\delta) \quad |f_n(x) - f_n(c)| < \frac{\epsilon}{3}$.

$\boxed{\exists\delta}$ Choose this δ.

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in N(c,\delta)$.

এইবার সেই তিনধাপে ভেঙে লেখার ব্যাপারটা--

Then

$$|f(x) - f(c)| \le |f(x) - f_n(x)| + \quad |f_n(x) - f_n(c)| + \quad |f_n(c) - f(c)| < \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

as required.

■

38.2 Limit

Continuity আর limit-এর মধ্যে ওতপ্রোত সম্পর্ক। সুতরাং continuity-এর জন্য এক্ষুণি যা প্রমাণ করলাম, সেরকম ব্যাপার limit-এর জন্যও করা যায়।

Example 21: If a sequence of functions $\{f_n\}_n$ converges uniformly on $[a,b]$ to a function f such that

$$\lim_{x\to c} f_n(x) = a_n \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

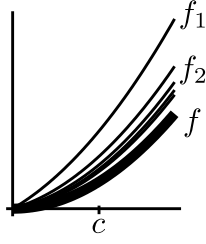



Fig 26

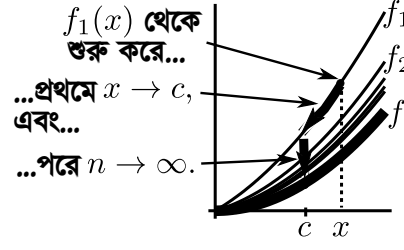



Fig 27

show that (i) the sequence $\{a_n\}_n$ converges. (ii) $\lim_{x\to c} f(x)$ exists, and (iii)

$$\lim_{x\to c}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to c} f_n(x).$$

[2+2+1] **(2004.3a(part 2))**

SOLUTION:

কী করতে বলেছে বুঝে নেওয়া যাক। প্রথমে একটা sequence দিয়েছে $\{f_n(x)\}_n$. আর একটা সংখ্যা c দিয়েছে। উদাহরণ হিসেবে $f_n(x) = x^2 + x/n$ নিই যেটা $[0,1]$-এর উপরে uniformly $f(x) = x^2$-এ converge করে। আর $c = \frac{1}{2}$ নেওয়া যাক। Fig 26 দ্যাখো।

এইবার একই সঙ্গে দুই ধরণের limit নেওয়া হবে--এক, $n \to \infty$ আর দুই, $x \to c$. আমরা এই দুটো limit একে একে নেওয়ার চেষ্টা করব। প্রশ্ন হল কোনটা আগে নেব, মানে Fig 27-এর মত এগোব--

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to c} f_n(x)\right],$$

নাকি Fig 28-এর মত--

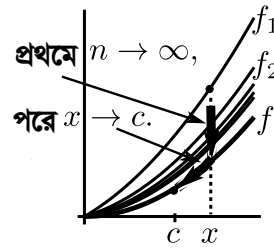
$$\lim_{x\to c}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]?$$

আমাদের উদাহরণের ক্ষেত্রে কী হয় দেখি। প্রথম ভাবে এগোলে

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to c} f_n(x)\right] &= \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to c}\left(x^2 + \tfrac{x}{n}\right)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[c^2 + \tfrac{c}{n}\right] = c^2.\end{aligned}$$

যদি অন্যপথে এগোতাম--

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] &= \lim_{x\to c}\left[\lim_{n\to\infty}\left(x^2 + \tfrac{x}{n}\right)\right]\\ &= \lim_{x\to c} x^2 = c^2.\end{aligned}$$

Fig 28

দুইভাবেই একই উত্তর পাওয়া গেল। এমনটা যে সবসময়েই হবে কথা নেই। সেরকম একটা উদাহরণ আমাদের অজানা নয়। $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ নেব এইভাবে--$f_n(x) = x^n$ এবং

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [0,1) \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

এক্ষেত্রে $f_n \to f$ pointwise কিন্তু uniformly নয়। এবার ধরো $c = 1$ নিলাম। তবে $a_n = \lim_{x\to c} f_n(x) = 1$. সুতরাং $a_n \to 1$. অথচ $\lim_{x\to c} f(x) = 0$. সুতরাং

$$\lim_n \left[\lim_{x\to c} f_n(x)\right] = 1 \neq 0 = \lim_{x\to c} \left[\lim_n f_n(x)\right].$$

আন্দাজ করতে পারছ যে convergence-টা uniform না হওয়াতেই এই বিপত্তিটা ঘটল। যদি $f_n \to f$ uniformly হত, তবে limit-টা দুই ক্ষেত্রেই সমানই আসত। সেটা প্রমাণ করাই এই অংকের উদ্দেশ্য। কাজটাকে এই অংকে তিনটে অংশে ভেঙে করতে দিয়েছে। সুবিধার জন্য $\lim_{x\to c} f_n(x)$-এর একটা নাম দিয়েছে a_n. (এই limit-টা যে exist করে সেটাও বলে দিয়েছে)। এবার প্রথম কাজ হল এটা দেখানো যে $\lim_{n\to\infty} a_n$ আদৌ exist করে।

<u>(i)</u> Shall show that $\{a_n\}_n$ is a Cauchy sequence,

i.e.,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m,n \geq N \quad |a_n - a_m| < \epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Now $\because \{f_n\}_n$ is uniformly convergent,

$\therefore \{f_n\}_n$ is uniformly Cauchy,

$$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad \forall m,n \geq N \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

$\exists N$ Choose this N.

$\forall m,n$ Take any $m, n \geq N$.

Taking limit as $x \to c$, we have

$$|a_n - a_m| \leq \tfrac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

completing the proof.

ধরো $\lim_{n\to\infty} a_n$-এর একটা নাম দিলাম a. তাহলে দ্বিতীয় আর তৃতীয় অংশে দেখাতে বলেছে যে $\lim_{x\to c}[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]$-ও a-র সমান হবে। এখন $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, কারণ বলেই দিয়েছে যে $f_n \to f$. সুতরাং দেখাতে হবে যে $\lim_{x\to c} f(x) = a$.

<u>(ii) and (iii)</u> Let $a = \lim_n a_n$.

Shall show that $\lim_{x\to c} f(x) = a$,

i.e.,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N'(c,\delta) \quad f(x) \in N(a,\epsilon).$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

একটু রাফ করে নিই। এখানেও আমরা continuity-র বেলায় যেমন করেছিলাম, সেইভাবে এগোব। একলাফে $f(x)$ থেকে a-তে না গিয়ে তিন লাফে যাবে--$f(x)$ থেকে $f_n(x)$, সেখানে থেকে a_n, এবং সেখানে থেকে a.

$$|f(x) - a| \quad \leq \quad |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a|$$

এই তিনটে লাফই ছোটো হতে বাধ্য। প্রথমটা ছোটো কারণ $f_n \to f$. দ্বিতীয়টা ছোটো কারণ $a_n = \lim_{x\to c} f_n(x)$, আর তৃতীয়টা ছোটো কারণ $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

$\because f_n \to f$ uniformly on E,

$$\therefore \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad \forall x \in E \quad |f(x) - f_n(x)| < \tfrac{\epsilon}{3}.$$

Also $\because a_n \to a$,

$$\therefore \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad |a_n - a| < \tfrac{\epsilon}{3}.$$

Let $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Then

$$|f(x) - f_N(x)| < \tfrac{\epsilon}{3} \text{ and } |a_N - a| < \tfrac{\epsilon}{3}.$$

Now $\because \lim_{x\to c} f_N(x) = a_N$,

$$\therefore \exists\delta > 0 \quad \forall x \in N'(c,\delta) \quad f_N(x) \in N\left(a_N, \tfrac{\epsilon}{3}\right).$$

$\exists\delta$ Choose this $\delta > 0$.

$\forall x$ Take any $x \in N'(c,\delta)$.

Then

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - a_N| + |a_N - a| < \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

as required.

■

Exercise 13: If a sequence of functions $\{f_n\}_n$ converges uniformly on $[a,b]$ to a function f and if $c \in [a,b]$ such that

$$\lim_{x\to c} f_n(x) = a_n, \quad (n = 1, 2, 3, ...),$$

show that the sequence $\{a_n\}_n$ is convergent.[2] **(2010.4c)** ■

Exercise 14: If $\{f_n\}_n$ is a sequence of real-valued continuous functions on a closed set $D(\subseteq \mathbb{R})$ converging uniformly on D, then for any limit point a of D, show that

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

[4] **(2012.3a)** ■

নীচের অংকটাও একই জিনিস তবে এখানে $x \to c$ না দিয়ে $x_n \to x$ দিয়েছে। আর f_n-গুলোকে continuous বলে দিয়েছে, তাই $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ হবে।

Example 22: Let $\{f_n\}$ be a sequence of continuous real-valued functions converging uniformly to f on a set $E(\subseteq \mathbb{R})$. Show that

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$$

for any sequence $\{x_n\}$ in E converging to a point x in E.[3] **(2009.3b)**

SOLUTION:

Given:

(1) $x_n \to x \in E$

(2) $f_n \to f$ uniformly on E.

To Show: $f_n(x_n) \to f(x)$,

i.e.,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x_n) - f(x)| < \epsilon.$$

Take any $\epsilon > 0$.

রাফ করে নিই--

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|.$$

$\because f_n \to f$ uniformly,

$$\therefore \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad \forall n \geq N_1 \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Again, since $f_n \to f$ uniformly and each f_n is continuous, so f is continuous.

So $f(x_n) \to f(x)$.

$$\therefore \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad |f(x_n) - f(x)| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

$\exists N$ Choose $N = \max\{N_1, N_2\}$.

$\forall n$ Take any $n \geq N$.

Then

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

■

DAY 39
Properties (part 2)

গতকাল আমরা এমন দুটো বৈশিষ্ট্য (continuity আর limit) নিয়ে আলোচনা করেছি যারা $f_n \to f$ uniformly হলে সহজেই f_n থেকে f-এ সংক্রামিত হয়। আজকে আমরা এরকম আরও দুটো বৈশিষ্ট্য শিখব।

39.1 Boundedness

যদি f_n-রা সবাই bounded হয়, এবং $f_n \to f$ uniformly হয়, তবে f-ও bounded হতে বাধ্য। এটাই নীচের theorem-টার বক্তব্য। প্রমাণটা খুবই সহজ। ছবি দেখে বুঝে রাখি। ধরো এমন একটা f_n নিলাম যার গ্রাফটা f-এর গ্রাফের বেশ কাছে, মনে করো সব সময়েই $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$. তার মানে আমরা যদি $f_n(x)$-এর গ্রাফের দুপাশে 1 দূরত্বে দুটো ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইন টানি (Fig 29) তবে f_n-কে ঘিরে যে নলের মত তৈরী হবে, f-এর গ্রাফটা সেই নলের মধ্যে থাকতে বাধ্য। বলে দিয়েছে যে f_n নিজে bounded. যদি ওর একটা bound হয় A, তবে নলটা খুব বেশী হলে $-A-1$ অব্দি নামতে পারে, এবং $A+1$ অব্দি উঠতে পারে। তার মানে f-কে সব সময়ে $-A-1$ থেকে $A+1$-এর মধ্যে থাকতে হবে। সুতরাং f-টা bounded না হয়ে যায় কোথায়?

THEOREM

Let $f_n \to f$ uniformly on $D \subseteq \mathbb{R}$. If each f_n is bounded on D, then f must also be bounded on D.

Proof:

To show

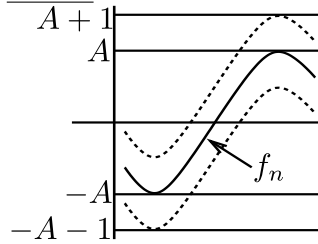
$$\exists B > 0 \quad \forall x \in D \quad |f(x)| \leq B.$$

$\because f_n \to f$ uniformly on D,

$\therefore \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < 1.$

$\because f_n$ is bounded on D,

$\therefore \exists A > 0 \quad \forall x \in D \quad |f_n(x)| \leq A.$

Fig 29

$\exists B$ Choose $B = A + 1$.

$\forall x$ Take any $x \in D$.

Then

$$|f(x)| < |f_n(x)| + 1 \leq A + 1 = B,$$

as required.

[Q.E.D]

Exercise 15: এমন $f_n, f : (0,1) \to \mathbb{R}$ দিতে পারো যাতে প্রতিটা f_n-ই bounded, এবং $f_n \to f$ pointwise on $(0,1)$ হয়, অথচ f-টা হয় unbounded? ■

39.2 Integrability

প্রথম যে বৈশিষ্ট্যটা নিয়ে আলোচনা করব সেটা হল integrability. যদি $f_n \to f$ uniformly হয়, আর f_n-গুলো যদি Riemann integrable হয়, তবে f-ও Riemann integrable হতে বাধ্য। শুধু তাই নয় f_n-দের integral-গুলো f-এর integral-এ converge করতে বাধ্য। নীচের অংকে f-এর integrabilty-টুকু খালি দেখাতে বলেছে।

Example 23: Let $\{f_n\}_n$ be a sequence of Riemann integrable functions defined on $[a, b]$ having uniform limit f on $[a, b]$. Prove that f is Riemann integrable over $[a, b]$.[4] **(2013.6a)**

SOLUTION:

Shall show that f is Riemann integrable on $[a, b]$.

$\because f_n$'s are Riemann integrable on $[a, b]$,

$\therefore f_n$'s are bounded on $[a, b]$.

$\because f_n \to f$ uniformly on $[a, b]$,

$\therefore f$ is also bounded on $[a, b]$.

$\therefore$ Enough to show that

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([a, b]) \quad U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার আমরা একটা f_n নেব যেটা f-এর খুব কাছাকাছি আছে, ধরো কোনো $\delta > 0$ দূরত্বের মধ্যে, মানে

$$\forall x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \delta.$$

তাহলে একটা কথা বুঝতেই পারছ--সব সময়েই

$$f_n(x) - \delta \leq f(x) \leq f_n(x) + \delta$$

হবে। মানে যদি f_n-কে কেন্দ্র করে দুপাশে δ দূরত্ব দিয়ে একটা নল আঁকি, তবে f-এর গ্রাফটা তার মধ্যে থাকতে বাধ্য। এদিকে যেহেতু f_n হল Riemann integrable, তাই আমরা $U(P, f_n) - L(P, f_n)$-কে যত খুশী ছোটো করতে পারি।

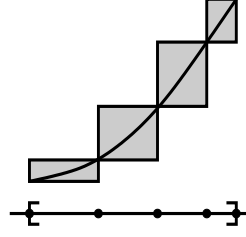



Fig 30

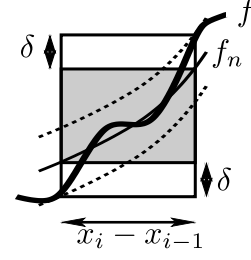



Fig 31

মনে আছে নিশ্চয়ই যে $U(P, f_n) - L(P, f_n)$ হল Fig 30-এর মত কয়েকটা rectangle-এর মোট area. এরকম একটা rectangle-কে আলাদা করে Fig 31-তে দেখিয়েছি। এটা আঁকা হয়েছে

$$I_i = [x_{i-1}, x_i]$$

-এর উপরে। এর তলাটা রয়েছে $\inf\{f_n(x) \ : \ x \in I_i\}$-এ, আর উপরটা রয়েছে $\sup\{f_n(x) \ : \ x \in I_i\}$-এ। যদি f_n-এর জায়গায় আমরা f নিতাম তবে rectangle-টা কতটা বদলাত? তলাটা খুব বেশী হলে আরো δ পরিমাণ নেমে আসতে পারত, আর উপরটা খুব বেশী হলে আরো δ পরিমাণ উঠে যেতে পারত। সুতরাং area-টা বাড়তে পারে বড়জোর $2\delta|I_i|$. এরকম যাবতীয় area যোগ করলে পাব

$$\begin{aligned} U(P, f) - L(P, f) &\leq U(P, f_n) - L(P, f_n) + 2\delta \sum |I_i| \\ &= U(P, f_n) - L(P, f_n) + 2\delta(b - a). \end{aligned}$$

আমাদের কাজ হল এইটাকে $< \epsilon$ রাখা। আমরা ডানদিকের দুটো term-কেই $\frac{\epsilon}{2}$-এর উপরে উঠতে দেব না। দ্বিতীয় term-টাকে $\frac{\epsilon}{2}$ রাখার জন্য প্রথমে $\delta = \frac{\epsilon}{4(b-a)}$ নেব, তার পর এমন একটা f_n নেব যেটা f-এর δ দূরত্বের মধ্যে থাকে। অবশেষে এমন একটা $P \in \mathbb{P}([a, b])$ নেব যাতে $U(P, f_n) - L(P, f_n) < \frac{\epsilon}{2}$ হয়।

Let $\delta = \frac{\epsilon}{4(b-a)} > 0$.

$\because f_n \to f$ uniformly on $[a, b]$,

$$\therefore \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a, b] \quad |f(x) - f_n(x)| < \delta.$$

$\because f_n$ is Riemann integrable on $[a, b]$,

$\exists P \in \mathbb{P}([a, b]) \quad U(P, f_n) - L(P, f_n) < \frac{\epsilon}{2}$.

$\exists P$ Choose this P.

Let the subintervals of P be $I_1, ..., I_n$.

$$\because \forall x \in [a, b] \quad f_n(x) - \delta \leq f(x) \leq f_n(x) + \delta,$$

$\therefore \forall i \in \{1, ..., n\}$,

$$\begin{aligned} \sup\{f(x) \ : \ x \in I_i\} &\leq \sup\{f(x) \ : \ x \in I_i\} + \delta, \\ \inf\{f(x) \ : \ x \in I_i\} &\geq \inf\{f(x) \ : \ x \in I_i\} - \delta. \end{aligned}$$

$\therefore$ For each i,

$$\sup\{|f(x) - f(y)| \;:\; x, y \in I_i\} \le \sup\{|f_n(x) - f_n(y)| \;:\; x, y \in I_i\} + 2\delta.$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad & U(P, f) - L(P, f) \\
= \quad & \sum \sup\{|f(x) - f(y)| \;:\; x, y \in I_i\}|I_i| \\
\le \quad & \sum \sup\{|f_n(x) - f_n(y)| \;:\; x, y \in I_i\}|I_i| + 2\delta \sum |I_i| \\
= \quad & U(P, f_n) - L(P, f_n) + 2\delta(b - a) \\
< \quad & \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

as required.

■

এই অংকটায় f-এর integrabilty ছাড়া আর কিছু চায় নি। আসলে কিন্তু আরও বেশী দাবি করা চলে। $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ হতে বাধ্য। এবার সেটা দেখাব।

Example 24: Let $\{f_n\}_n$ be a sequence of Riemann integrable functions defined on $[a, b]$ having uniform limit f on $[a, b]$. Prove that $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

SOLUTION: খালি এই অংকটা করতে হলে অবশ্যই $\int_a^b f$-এর যে আদৌ অস্তিত্ব আছে (মানে f যে $[a, b]$-র উপরে integrable) সেটাও দেখিয়ে নেওয়া উচিত। কিন্তু আমরা সে কাজটা যেহেতু আগের অংকেই করেছি, তাই এখানে $\int_a^b f$-এর অস্তিত্ব ধরে নিয়ে এগোব।

We know that $\int_a^b f$ exists.

Shall show that $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \quad \left|\int_a^b f_n(x) - \int_a^b f(x)\right| < \epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because f_n \to f$ uniformly on $[a, b]$,

$$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \quad \forall x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\epsilon}{b-a}.$$

$\exists N$ Choose this N.

$\forall n$ Take any $n \ge N$.

Then

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \int_a^b \tfrac{\epsilon}{b-a} = (b-a) \times \tfrac{\epsilon}{b-a} = \epsilon,$$

as required.

■

Uniform convergence-এর বেলায় দেখলাম যে Riemann integrability ব্যাপারটা f_n-দের থেকে f-এ সংক্রামিত হয়। কিন্তু pointwise convergence-এর বেলায়? সেটা নিয়েই পরের অংকটা।

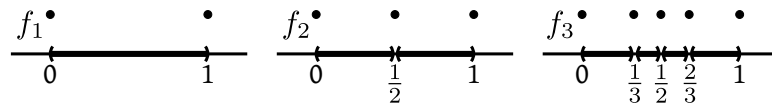
Example 25: Give an example of a sequence $\{f_n\}_n$ of real-valued functions on $[0,1]$ such that each f_n is Riemann integrable on $[0,1]$ but the pointwise limit function f (which exists) fails to be Riemann integrable on $[0,1]$. Can such a sequence $\{f_n\}_n$ converge uniformly on $[0,1]$? Justify your answer. [3+2] **(2010.4a)**

SOLUTION: এরকম প্রচুর উদাহরণ দেওয়া যায়। একটা উদাহরণ এই রকম--

Let $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ be defined as

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = \frac{p}{q} \text{ for } 0 \leq p \leq q \leq n \quad (p, q \in \mathbb{Z}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

এই f_n-গুলো কিরকম দেখতে হবে বুঝে নিই। Fig 32 দ্যাখো। f_1-টা সর্বত্রই 0, খালি 0 আর 1-এ গিয়ে 1 হবে। f_2-টা f_1-এর মতই, খালি $\frac{1}{2}$-এও 1 হবে। f_3 আবার f_2-এর মতই, খালি $\frac{1}{3}$ আর $\frac{2}{3}$-এও 1 হবে। বুঝতেই পারছ যতই n বাড়বে ততই নতুন নতুন rational point-এ f_n-টা 1 হবে। এইভাবে চলতে চলতে limit-টা কী হবে বুঝতেই পারছ, সব rational point-এই 1, আর সব irrational point-এই 0.

Fig 32

> Let $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ be
>
> $$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x \text{ is rational}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$
>
> Then $f_n(x)\to f(x)$ pointwise on $[0,1]$.
>
> ⟦ Because:
>
> If x is irrational, then $f_n(x)=0\to 0=f(x)$.
> If x is rational, say $x=\frac{M}{N}$, then
> $\forall n\geq N \quad f_n(x)=1\to 1=f(x)$.
>
> ⟧
>
> Each f_n is discontinuous only at finitely many points, and so is Riemann integrable.
>
> But $f(x)$ is discontinuous everywhere, and so not Riemann integrable.

পরের অংশের উত্তর তো জানাই--

> No, $\{f_n\}_n$ cannot converge uniformly to f on $[0,1]$, because uniform limit of Riemann integrable functions must be Riemann integrable.

■

আগের অংকটাকে আরেকটু কঠিন করে দিই, দ্যাখো তো পারো কি না।

Exercise 16: Let $f_n, f:[0,1]\to\mathbb{R}$ such that $f_n\to f$ pointwise on $[0,1]$. Also f_n's are all continuous. Then is it possible that f is not Riemann integrable on $[0,1]$? ■

DAY 40
Properties (part 3)

আমরা এতক্ষণ পর্যন্ত মোট চারটে বৈশিষ্ট্য শিখেছি যারা uniform convergence-এর মাধ্যমে সংক্রামিত হয়--continuity, limit, boundedness এবং Riemann integrability. আজকে আমরা দুটো বৈশিষ্ট্যের কথা শিখব যাদের নিয়ে একটু সমস্যা হবে।

40.1 Derivative

ধরো $f_n\to f$ uniformly, এবং সবগুলো f_n-ই differentiable. তাহলে কি f-ও differentiable হতে বাধ্য? দুঃখের বিষয় যে উত্তর হল--না। নীচের অংকে এরকম একটা counterexample চেয়েছে। অংকের খুঁটিনাটির মধ্যে যাওয়ার আগে ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বুঝে রাখি। একটা function দেওয়া থাকলে তার গ্রাফ দেখে কী করে বোঝা যায় সেটা differentiable কি না? দেখতে হয় গ্রাফটা সর্বত্র smooth (মসৃণ) কিনা। কোথাও কোনো ভাঙা বা খোঁচ থাকলে হবে না।

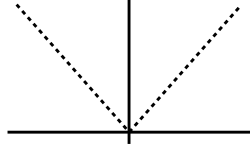
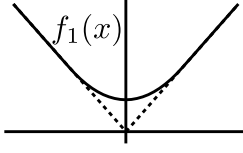
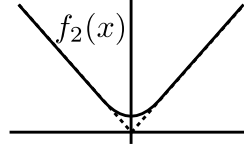
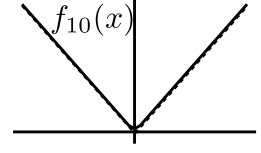



Fig 33 **Fig 34** **Fig 35** **Fig 36**

রাস্তা দিয়ে যখন সাইকেল চলে যায় তার চাকার দাগ লক্ষ করেছো? সেটা সব সময়ে মসৃণভাবে এঁকেবেঁকে যায়। এবার মনে করো একটা প্রতিযোগিতা হচ্ছে। মাটিতে একটা লাইন এঁকে দেওয়া হল Fig 33-এর মত করে, দিয়ে বলেছে তোমাকে যতটা সম্ভব এই লাইন ধরে ধরে সাইকেল চালাতে হবে। যেহেতু লাইনটার মধ্যে একটা খোঁচ আছে, তাই কারুর পক্ষেই ওই খোঁচের জায়গাটায় লাইন ধরে সাইকেল চালানো সম্ভব নয়। প্রতিযোগিতা হল কে কতটা পর্যন্ত লাইন ধরে চলতে পারে। Fig 34-তে একটা চাকার দাগ দেখতে পাচ্ছ। খোঁচের অনেক আগে থাকতেই সাইকেল ঘুরিয়ে নিয়েছে। Fig 35-এর বেলায় খোঁচের আরও কাছে গেছে। Fig 36-এর বেলায় ভীষণই কাছে। এইভাবে আমরা খোঁচটার যতখুশী কাছে পর্যন্ত গিয়ে সাইকেল চালাতে পারি। যদি এই বিভিন্ন চাকার দাগগুলোকে আমরা বিভিন্ন f_n-এর গ্রাফ বলে ভাবি, আর মাটিতে আঁকা লাইনটাকে f-এর গ্রাফ বলে ভাবি তবে লক্ষ কর যে--

1. f_n-দের গ্রাফগুলো সবাই smooth, অর্থাৎ f_n-রা সবাই differentiable,
2. f_n-এর গ্রাফ আর f-এর গ্রাফ ক্রমশঃ মিশে যাচ্ছে, অর্থাৎ $f_n \to f$ uniformly,
3. অথচ f-এর গ্রাফে একটা খোঁচ আছে, মানে f মোটেই differentiable নয়।

অবশ্য খালি ছবি আঁকলেই হবে না। Counterexample দিতে হলে f আর f_n-এর ফর্মুলাও দিতে হবে। সেটাই করা হয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 26: Show by an example that it is possible to have functions $\{f_n\}_n$ and f, from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ such that all the f_n's are differentiable everywhere on $\mathbb{R}$, and $f_n \to f$ uniformly on $\mathbb{R}$, but f is not differentiable everywhere on $\mathbb{R}$.

SOLUTION:

> Let
> $$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{if } |x| > \frac{1}{n} \\ \frac{1+n^2x^2}{2n} & \text{otherwise} \end{cases}$$
> and $f(x) = |x|$.

অর্থাৎ $f(x)$ হল মাটিতে আঁকা লাইনটা, আর $f_n(x)$ হল প্রতিযোগীদের সাইকেলের চাকার দাগ।

> Step 1: Shall show that f_n is differentiable.
> Clearly, f_n is differentiable at all points $x \neq \pm\frac{1}{n}$.

যদি একটা function-কে দুটো ভাগে define করা হয়, যেমন

$$F(x) = \begin{cases} G(x) & \text{if } x \leq a \\ H(x) & \text{if } x > a \end{cases}$$

তবে $x = a$-তে $F(x)$-কে differentiable দেখানোর একটা কায়দা হল প্রথমে $G(a) = H(a)$ দেখানো, এবং তারপর $G'(a) = H'(a)$ দেখানো। এখানে $G(a) = H(a)$ শর্তটা বলছে যে $F(x)$-এর গ্রাফে $x = a$-তে কোনো ভাঙা নেই, আর $G'(a) = H'(a)$ শর্তটা বলছে $G(x)$ এবং $H(x)$-এর গ্রাফের tangent (স্পর্শক) দুটো $x = a$ বিন্দুতে একই, অর্থাৎ জোড়ের মুখে গ্রাফদুটো মসৃণভাবে মিশেছে।
আমরা এই কায়দাতেই দেখাব যে $x = \pm\frac{1}{n}$-এ $f_n(x)$-টা differentiable হবে।

At $x = \pm\frac{1}{n}$,

$$|x| = \frac{1}{n} = \frac{1+n^2x^2}{2n}.$$

সুতরাং জোড়ের মুখে কোনো ভাঙা নেই। এবার দেখি কোনো খোঁচ আছে কিনা--

Also

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d|x|}{dx}\right|_{x=1/n} &= \left.\tfrac{dx}{dx}\right|_{x=1/n} &&= 1,\\
\left.\frac{d|x|}{dx}\right|_{x=-1/n} &= \left.\tfrac{d(-x)}{dx}\right|_{x=-1/n} &&= -1,\\
\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{1+n^2x^2}{2n}\right)\right|_{x=1/n} &= \left.nx\right|_{x=1/n} &&= 1,\\
\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{1+n^2x^2}{2n}\right)\right|_{x=-1/n} &= \left.nx\right|_{x=-1/n} &&= -1.
\end{aligned}$$

$\because$ The values and one-sided derivatives match at $x = \pm\frac{1}{n}$,
$\therefore f_n(x)$ is differentiable at $x = \pm\frac{1}{n}$ also.

এইবার uniform convergence দেখাব।

Step 2: Shall show that $f_n \to f$ uniformly on $\mathbb{R}$, ie,

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

ছবিগুলো দেখেই বুঝছো যে $f_n(x)$-এর সঙ্গে $f(x)$-এর সবচেয়ে বেশী দূরত্ব হবে $x = 0$-তে। $f_n(0) = \frac{1}{2n}$ আর $f(0) = 0$. সুতরাং সবচেয়ে বেশী দূরত্ব হল $\frac{1}{2n}$. এটাকে $< \epsilon$ রাখলেই হবে--

$\boxed{\exists N}$ Choose $N \in \mathbb{N}$ such that $\frac{1}{2N} < \epsilon$.

$\boxed{\forall x, n}$ Take any $x \in \mathbb{R}$ and any $n \geq N$.

Then if $|x| > \frac{1}{n}$, then $|f_n(x) - f(x)| = 0 < \epsilon$, as required.

Also, if $|x| \leq \frac{1}{n}$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left|\frac{1+n^2x^2}{2n} - |x|\right| \\ &= \left|\frac{1+n^2x^2-2n|x|}{2n}\right| \\ &= \left|\frac{(1-n|x|)^2}{2n}\right| \\ &\leq \frac{1}{2n} \quad [\because |x| \leq \tfrac{1}{n}] \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

So we have a counterexample because $f(x) = |x|$ is not a differentiable function.

■

Example 27: Show by an example that it is possible to have $\{f_n\}_n$ and f, all differentiable functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ such that $f_n \to f$ uniformly on $\mathbb{R}$, but $f_n' \not\to f'$ even pointwise on $\mathbb{R}$.

SOLUTION: এই অংকটার উত্তর ছবি ছাড়া ভেবে পাওয়া কঠিন, কিন্তু ছবি দিয়ে ভাবলে মজার। প্রথমে যা হোক একটা bounded function নাও, যার মধ্যে কিছু ওঠা-নামা আছে (মানে একেবারে constant function নিও না)। আমরা $g(x) = \sin x$ নিলাম। এবার বল তো $g(x)$-এর গ্রাফের সঙ্গে $g(2x)$-এর গ্রাফের কি রকম সম্পর্ক হবে? এই বইয়ের প্রথম খণ্ডেই আমরা এর উত্তর শিখেছি--$g(x)$-এর গ্রাফটাকে horizontal দিক বরাবর সংকুচিত করে অর্ধেক করে দিলে যা হয় সেটাই হল $g(2x)$-এর গ্রাফ। এটাকে এইভাবে ভাবতে পারো--$g(x)$-এর গ্রাফে $x = 2$-তে যা ঘটছে, $g(2x)$-এর বেলায় $x = 1$-এই তা ঘটে যাচ্ছে। এবার যদি $\frac{1}{2}g(2x)$-এর গ্রাফ আঁকি? তবে গ্রাফটা vertical দিকেও সংকুচিত হয়ে অর্ধেক হয়ে যাবে। সুতরাং $\frac{1}{2}g(2x)$-এর গ্রাফ হল হুবহু $g(x)$-এর গ্রাফটার হাফ-সাইজ জেরক্স! লক্ষ কর $g(x)$-এর যাবতীয় ঢেউ ওঠা-নামা ইত্যাদি $\frac{1}{2}g(2x)$-এও অবিকৃত আছে, খালি সাইজে অর্ধেক হয়ে গেছে, এই যা। একই কথা খাটবে $\frac{1}{n}g(nx)$-এর বেলাতেও--$g(x)$-এর গ্রাফটাকে n ভাগ ছোটো করে জেরক্স নেওয়া। এইটাকেই আমরা $f_n(x)$ নেব।

Let

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx),$$

Fig 37-এর দেখে নাও কয়েকটা f_n-এর ছবি। লক্ষ কর n যত বাড়ছে, ততই f_n ক্রমশঃ মাটির সাথে (মানে x-axis-এর সাথে) মিশে যাচ্ছে। তার কারণ $g(x)$ ছিল bounded, তাই $\frac{1}{n}g(nx)$-এর মধ্যে যে $\frac{1}{n}$-টা আছে, সেটার চাপে ওটা মাটিতে বসে যাচ্ছে। তাই $f(x)$ নেব এইভাবে--

and $f(x) \equiv 0$.

Then clearly f_n and f are differentiable functions.

Step 1: Shall show that $f_n \to f$ uniformly on $\mathbb{R}$, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

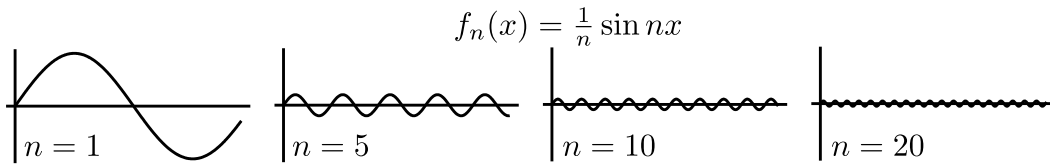



Fig 37

Take any $\epsilon > 0$.

Choose $N \in \mathbb{N}$ such that $\frac{1}{N} < \epsilon$.

Take any $x \in \mathbb{R}$ and any $n \geq N$.

Then

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\sin nx|}{n} \leq \frac{1}{n} < \epsilon,$$

as required.

লক্ষ কর যে $f' \equiv 0$. কিন্তু যেহেতু f_n-রা সবাই আসলে $\sin x$-এরই ক্ষুদ্র অবিকৃত সংস্করণ। তাই $\sin x$-এর যাবতীয় ওঠা-নামাই f_n-এর মধ্যেও একইভাবে আছে। সুতরাং f_n' মোটেই 0-র দিকে যেতে পারে না।

Step 2: Shall show that f_n' does not converge to f' even pointwise.

We have $f_n'(x) = \cos nx$ and $f'(x) \equiv 0$.

At $x = 0$ $f_n'(0) = 1 \not\to 0 = f'(0)$.

■

এই উদাহরণদুটো দেখে মনে হয় যেন uniform convergence-এর সঙ্গে differentiation-এর আদায়-কাঁচকলায় সম্পর্ক। আসলে কিন্তু তা নয়, ওদের মধ্যে একটা ভালো সম্পর্কও আছে। কিন্তু তার জন্য উল্টোদিক থেকে এগোতে হবে। আমরা $f_n \to f$ uniformly হয় ধরে নিয়ে $f_n' \to f'$ হয় কিনা দেখার চেষ্টা করছিলাম। তাতে সুবিধা হচ্ছিল না। কিন্তু যদি $f_n' \to f'$ uniformly ধরে নিয়ে $f_n \to f$ uniformly হয় দেখাবার চেষ্টা করতাম তবে বেশী সাফল্যের সম্ভাবনা ছিল। নীচের অংকদুটোতে তোমাকে এই চেষ্টাটাই করতে বলা হয়েছে। কিন্তু প্রথমে বলে নিই যে শেষমেশ ব্যাপারটা কী দাঁড়াবে। আমরা যথারীতি একটা sequence $\{f_n(x)\}_n$ নিয়ে শুরু করব। ধরে নেব যে f_n-রা সবাই differentiable. আমাদের হাতে তাহলে এখন দুটো sequence আছে--$\{f_n(x)\}_n$ আর $\{f_n'(x)\}_n$. আমরা এদের convergence বিষয়ে খালি দুটো শর্ত চাপাব--

- f_n'-রা uniformly converge করে। ধরো limit-টার নাম দিলাম $g(x)$. মানে $f_n' \to g$ uniformly.
- x-এর অন্ততঃ একটা value-তে f_n-রা converge করে। মানে এমন অন্ততঃ একটা x_0 আছে যাতে $\{f_n(x_0)\}_n$ sequence-টা converge করে।

এর থেকে দুটো জিনিস দেখানো যাবে--এক, $\{f_n\}_n$ sequence-টাও uniformly converge করতে বাধ্য। দুই, f_n-এর limit-টাও differentiable, এবং limit-টার derivative-ই হল f_n'-এর limit.

নীচের দুটো অংকে আমরা এটাই প্রমাণ করব। দুটো অংকেরই মূল কায়দা একই। ব্যাপারটা এইভাবে ভাবতে পারো। ধরো দুটো গাড়ি আছে, ওরা দুজনেই একই সময়ে প্রায় একই জায়গা থেকে রওনা দিল, এবং ওদের গতিবেগও সব সময়েই প্রায় একই রইল। তবে নিশ্চয়ই গাড়ি দুটো সব সময়েই পরস্পরের কাছাকাছিই থাকবে! এর সঙ্গে এই অংকটার সম্পর্ক কী? সেটা বোঝার জন্য মনে করো যে, x সময়ে প্রথম গাড়িটা $f(x)$ দূরত্ব আর দ্বিতীয় গাড়িটা $f_n(x)$ যায়, যেখানে n খুব বড় কোনো সংখ্যা। দুটো গাড়িই যাত্রা শুরু করেছে x_0 সময়ে। সুতরাং গাড়ি দুটো যাত্রা শুরু করেছে যথাক্রমে $f(x_0)$ এবং $f_n(x_0)$ থেকে। যেহেতু বলা আছে $f_n(x_0) \to f(x_0)$, তার মানে n খুব বড় বলে $f_n(x_0) \approx f(x_0)$ হবে, অর্থাৎ দুটো গাড়িই প্রায় একই জায়গা থেকে যাত্রা শুরু করছে। গাড়িদুটোর গতিবেগ হল $f'(x)$ আর $f_n'(x)$. বলেছে যে $f_n' \to f'$ uniformly, অর্থাৎ n যথেষ্ট বড় হওয়ায় সব x-এর জন্যই $f_n'(x) \approx f'(x)$ হবে। তাই বললাম যে গাড়িদুটোর গতিবেগ সব সময়েই প্রায় একই। এথেকে আমরা সিদ্ধান্ত করলাম যে সব সময়েই গাড়ি দুটো পরস্পরের কাছাকাছিই থাকবে, মানে সব x-এর জন্যই $f_n(x) \approx f(x)$ হবে। গাড়ির উপমা দিয়ে যেটা সহজে বোঝা যাচ্ছে, এবার সেটাই অংকের ভাষায় প্রমাণ করব।
এখানে আমরা শুরু করছি f_n'-এর উপর কিছু শর্ত নিয়ে, এবং সেখান থেকে f_n-এর বিষয়ে সিদ্ধান্ত করছি। এই কাজের জন্য এমন কোনো theorem চাই যেটা কোনো function-কে তার derivative দিয়ে প্রকাশ করতে পারে। এরকম একটা theorem ছিল Lagrange's mean value theorem–

$$g(x) - g(a) = (x-a)g'(\xi),$$

যেখানে ξ হল a আর x-এর মাঝখানে কোনো সংখ্যা। এই জিনিসটাই আমরা ব্যবহার করতে চলেছি। তার আগে গাড়ির উপমা দিয়ে একটা অংক কষে গা গরম করে নিই।

Example 28: দুটো গাড়ি শুরু করেছে পরস্পরের থেকে 0.1 মিটার দূরত্বে। ওদের গতিবেগের পার্থক্য কখনোই মিনিটে 0.01 মিটারের বেশী হয় নি। তবে 5 মিনিটে ওদের দূরত্ব সর্বাধিক কত হতে পারে?

SOLUTION: প্রথমে সহজ বুদ্ধিতে করি--ধরো যে গাড়িটা এগিয়ে শুরু করেছে সেটাকে A আর অন্যটাকে B বললাম। A এমনিতেই এগিয়ে শুরু করেছে। সুতরাং দূরত্ব সবচেয়ে বেশী হবে যদি A-র গতিবেগও B-র থেকে যথা সম্ভব বেশী রাখতে পারি, মানে যদি A-এর গতিবেগ B-র থেকে মিনিটে 0.01 মিটার বেশী হয়। সেক্ষেত্রে 5 মিনিটে A বেশী এগোবে $0.01 \times 5 = 0.05$ মিটার। সুতরাং 5 মিনিটের মাথায় A গাড়িটা B-এর চেয়ে বড়জোর $0.1 + 0.05 = 0.15$ মিটার এগিয়ে থাকতে পারে।
এবার একই জিনিস অংকের ভাষায়। যদি x মিনিটের মাথায় A গাড়িটা B-গাড়ির থেকে $g(x)$ মিটার এগিয়ে থাকে তবে, তবে $g(0) = 0.1$ এবং সব সময়েই $|g'(x)| \leq 0.01$. সুতরাং 5 মিনিটের মাথায় ওদের দূরত্ব হবে

$$\begin{aligned} & g(5) \\ = \ & g(0) + (g(5) - g(0)) \\ = \ & 0.1 + g'(\xi) \times 5 \text{ for some } \xi \in [0,5] \quad \left[\text{by Lagrange's MVT}\right] \\ \leq \ & 0.1 + 5|g'(\xi)| \\ \leq \ & 0.1 + 5 \times 0.01 = 0.15. \end{aligned}$$

ঠিক এটাই সহজ বুদ্ধিতে পেয়েছিলাম। এই অংকটা দেখে যেন ভেবে বোসো না যে, সহজ বুদ্ধিতেই যা পেয়ে গেছিলাম, সেটার জন্য আবার Lagrange's MVT লাগাতে গেলাম কেন! Lagrange's MVT মোটেই অনাবশ্যক জটিলতা কিছু নয়, এটা আসলে ওই একই সহজ বুদ্ধির গাণিতিক রূপ! ■

এইবার আমাদের মূল অংকে হাত দেওয়া যাক।

Example 29: Let $\{f_n\}_n$ be a sequence of differentiable functions on the closed interval $[a,b]$ such that it converges at an interior point x_0 of $[a,b]$. If the sequence $\{f_n'\}_n$ converges uniformly on $[a,b]$, prove that the given sequence $\{f_n\}_n$ converges uniformly on $[a,b]$.[4] **(2003.4b)**

SOLUTION: এই অংকটায় একটা অদরকারী তথ্য দিয়েছে--বলেছে যে x_0 হল $[a,b]$-র interior point. এটা কোথাও কাজে লাগবে না। যদি $x_0 = a$ বা $x_0 = b$-ও হত, তাহলেও একই প্রমাণ কাজ করত।

To show $\{f_n\}_n$ is uniformly convergent, ie, uniformly Cauchy, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad \forall x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Take any $\epsilon > 0$.

$\because \{f_n(x_0)\}_n$ is convergent and hence a Cauchy sequence,

$$\therefore \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N_1 \quad |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

এখানে f_n আর f_m যেন দুটো গাড়ির x সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব। ওরা যখন x_0 মুহূর্তে যাত্রা শুরু করল তখন ওদের পরস্পরের মধ্যে দূরত্ব $< \frac{\epsilon}{2}$.

Again, $\because \{f'_n\}_n$ is uniformly convergent, and hence uniformly Cauchy, over $[a, b]$,

$$\therefore \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N_2 \quad \forall x \in [a, b] \quad |f'_n(x) - f'_m(x)| < \tfrac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

ওদের গতিবেগের মধ্যে পার্থক্য সব সময়ে $< \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

Choose $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Take any $m, n \geq N$.

Take any $x \in [a, b]$.

Let $g_{m,n} = f_n - f_m$.

তার মানে $g_{m,n}(x)$ হল x সময়ে f_n গাড়িটা f_m গাড়ির চেয়ে কতটা এগিয়ে আছে।

Then

$$|g_{m,n}(x_0)| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

and

$$\forall t \in [a, b] \quad |g'_{m,n}(t)| < \tfrac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Applying Lagrange's MVT to the function $g_{m,n}$ between x_0 and x,

$$g_{m,n}(x) = g_{m,n}(x_0) + g'_{m,n}(\xi_{m,n})(x - x_0),$$

where $\xi_{m,n}$ is some number strictly between x and x_0.

Then

$$\begin{aligned}
& |f_n(x) - f_m(x)| \\
= & |g_{m,n}(x)| \\
= & \left|g_{m,n}(x_0) + g'_{m,n}(\xi_{m,n})(x - x_0)\right| \\
\leq & |g_{m,n}(x_0)| + |g'_{m,n}(\xi_{m,n})| \cdot |x - x_0| \\
\leq & |g_{m,n}(x_0)| + |g'_{m,n}(\xi_{m,n})|(b - a) \\
< & \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2(b-a)} \times (b - a) = \epsilon,
\end{aligned}$$

as required.

■

এর পরের অংকটা যেন আগের অংকটারই পরবর্তী ধাপ। ওখানে শুরু করেছিলাম $f_n(x_0) \to f(x_0)$ আর $\{f'_n\}_n$-এর uniform convergence থেকে। তা থেকে দেখিয়েছিলাম যে $\{f_n\}_n$-ও uniformly convergent হবে। এবার দেখাব যে f_n-এর limit-টাকে differentiate করলে f'_n-এর limit পাওয়া যায়।

Example 30: Let $\{f_n\}$ converge to f on $[a, b]$ and each f_n has a continuous derivative on $[a, b]$.

If $\{f'_n\}$ converges uniformly to G on $[a, b]$, prove that $\{f_n\}$ converges uniformly to f on $[a, b]$ and $f'(x) = G(x)$ in $[a, b]$.[4] **(2008.4b)**

SOLUTION:

প্রথম অংশ তো আগের অংকেই করেছি। এবার দ্বিতীয় অংশ।

Second part:

Shall show that

$$\forall x \in [a, b] \quad f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

$\forall x$ Take any $x \in [a, b]$.

Want to show

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{t\to x} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}\right],$$

ie,

$$\lim_{t\to x} \left[\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{t\to x} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}\right],$$

ie,

$$\lim_{t\to x} \left[\lim_{n\to\infty} \phi_n(t)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{t\to x} \phi_n(t)\right],$$

where we define

$$\phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}.$$

We know that this will be true if we can show that $\{\phi_n(t)\}_n$ is uniformly convergent, ie uniformly Cauchy, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [a,b] \setminus \{x\} \quad \forall m,n \geq N \quad |\phi_n(t) - \phi_m(t)| < \epsilon.$$

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$. Define

$$g_{m,n}(t) = f_n(t) - f_m(t).$$

Then $g_{m,n}$ is a differentiable function. So

$$\begin{aligned} \phi_n(t) - \phi_m(t) &= \frac{g_{m,n}(t) - g_{m,n}(x)}{t - x} \\ &= g'_{m,n}(\xi_{m,n}) \quad [\text{ for some } \xi_{m,n} \text{ between } t \text{ and } x, \text{ by MVT.}] \\ &= f'_n(\xi_{m,n}) - f'_m(\xi_{m,n}). \end{aligned}$$

$\because \{f'_n\}_n$ is uniformly convergent, and hence uniformly Cauchy,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall m,n \geq N \quad |f'_m(t) - f'_n(t)| < \epsilon.$$

$\exists N$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

Take any $t \in [a,b] \setminus \{x\}$.

Take any $m, n \geq N$.

Then

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| = |f'_n(\xi_{m,n}) - f'_m(\xi_{m,n})| < \epsilon,$$

as required.

■

40.2 Length

আমরা দেখেছি যে $f_n \to f$ uniformly হলে f_n-এর কিছু কিছু বৈশিষ্ট্য f-এর মধ্যে সংক্রামিত হয়, যেমন continuity, limit, boundedness, integrability. আবার differentiability-র মত বৈশিষ্ট্য সরাসরি সংক্রামিত হয় না, কিন্তু কিছু বাড়তি শর্ত চাপালে হয়। এবার একটা বৈশিষ্ট্যের কথা শিখব যেটা অত্যন্ত সহজ দেখতে, কিন্তু তাও uniform convergence-এর বেলায় অবিশ্বাস্যরকমের বেয়াড়া আচরণ করে! এই বৈশিষ্ট্যটা হল একটা গ্রাফের দৈর্ঘ্য।
একটা উদাহরণ দেখলে ব্যাপারটা স্পষ্ট হবে।
Fig 38 দ্যাখো। একটা right angled isosceles triangle (সমকোণী, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ) রয়েছে। মনে করো $AB = BC$ হল 1 মাইল লম্বা, সুতরাং AC হল $\sqrt{2}$ মাইল লম্বা। একটা চোরকে প্রতিদিন A থেকে C-তে যেতে হয়। সোজা AC বরাবর গেলে $\sqrt{2}$ মাইল হাঁটতে হয়। কিন্তু সোজা রাস্তায় ধরা পড়ে যাবার ভয়, তাই চোরটা প্রথমদিন B-তে গিয়ে সেখান

Fig 38

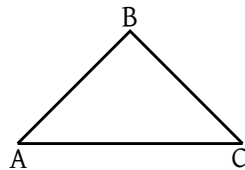
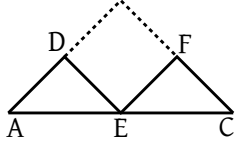
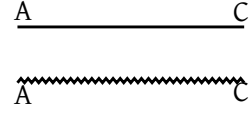



Fig 39 **Fig 40** **Fig 41**

থেকে C-তে এল। তাই মোট হাঁটা পড়ল $1+1=2$ মাইল। চোরটা খানিকটা অংক জানত, তাই এই হিসেবটা দেখে ভাবল, "ইশ্, বোকার মত অনেকটা ঘুরপথে গেছি। পরের দিন থেকে AC-র আরো কাছাকাছি থাকতে হবে।"
দ্বিতীয় দিন চোরটা তাই $ADEFC$ পথে গেল (Fig 39), যেখানে D আর F হল যথাক্রমে AB আর BC-র মধ্যবিন্দু। কিন্তু একটু হিসেব করলেই বুঝবে যে তাতে কিছুমাত্র সুবিধা হল না, এবারও মোট $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$ মাইলই হাঁটতে হল। তৃতীয় দিন চোরটা আরো সাবধান হয়ে AC-র আরো কাছাকাছি থাকার চেষ্টায় Fig 40-এর মত করে হাঁটল। কিন্তু, কি আশ্চর্য, AC-র এত কাছে এসেও মোট দূরত্ব এখনও সেই

$$\underbrace{\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4}}_{8\text{ times}}=2.$$

বুঝতেই পারছ পথের দৈর্ঘ্য চিরদিনই 2 মাইলই থেকে যাবে। অথচ এটা অস্বীকার করার পথ নেই যে পথটা সত্যিই ক্রমশঃ AC-এর সঙ্গে মিশে একাকার হয়ে যাচ্ছে! যেমন ধরো 8-th দিনে চোরটা পথটা হবে Fig 41-এর মত। তুলনা করা সুবিধার জন্য পাশে AC সরলরেখাটাও এঁকে দিয়েছি। দেখে কি মনে হয় যে আঁকাবাঁকা লাইনটা সরলরেখাটার চেয়ে আসলে $\sqrt{2}$-গুণ (প্রায় দেড়গুণ) বেশী লম্বা?
এই উদাহরণে মধ্যে uniform convergence কোথায়? চোরটা প্রথম দিন যে পথে গেছিল সেটাকে একটা function f_1-এর গ্রাফ বলে ভাবো, দ্বিতীয়দিনের পথটাকে মনে করো f_2-র গ্রাফ, এইভাবে চলতে চলতে n-th দিনের পথটাকে বলব f_n-এর গ্রাফ। আর AC সরলরেখাটাকে ভাবো কোনো function f-এর গ্রাফ। যেহেতু চোরের পথগুলো ক্রমশঃই AC-র সঙ্গে মিশে একাকার হয়ে যাচ্ছে, তাই $f_n \to f$ uniformly হবে। অথচ দ্যাখো f_n-এর গ্রাফের দৈর্ঘ্য সবসময়েই 2-ই থেকে যাচ্ছে, যদিও f-এর গ্রাফের দৈর্ঘ্য দেখাই যাচ্ছে $\sqrt{2}$.
এই আলোচনাটা আমরা আপাততঃ এখানেই স্থগিত রাখব। অংকের ভাষায় প্রকাশ করার চেষ্টা করব না। এই উদাহরণে গ্রাফগুলো সবই সরলরেখা দিয়ে তৈরী ছিল, তাই দৈর্ঘ্য বার করতে অসুবিধা হয় নি। যে কোনো function-এর গ্রাফের দৈর্ঘ্য কী করে বার করে সে বিষয়ে আমরা এই বইয়ের নবম অধ্যায়ে আলোচনা করব।

DAY 41
Series of functions

এতক্ষণ আমরা sequence of functions নিয়ে কাজ করেছি, এবার শিখব series of functions নিয়ে কাজ করা। এই বইয়ের দ্বিতীয় খণ্ডে আমরা যে infinite series শিখেছিলাম এখানেও কাজটা একই রকম। সেখানে কী করেছিলাম একটু মনে করে নিই। যদি একটা sequence $\{a_n\}_n$ দিয়ে বলে $\sum a_n$ বার করতে তবে আমরা প্রথমেই অসংখ্য a_n যোগ করার চেষ্টা না করে একটা একটা করে যোগ করি।

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1+a_2 \\ S_3 &= a_1+a_2+a_3 \end{aligned}$$

ইত্যাদি

ফলে একটা নতুন sequence-এর জন্ম হয় $\{S_n\}_n$. এবার আমরা এই sequence-টার limit নেওয়ার চেষ্টা করি। যদি limit-টা কোনো finite সংখ্যা ℓ হয়, তবে বলি যে $\sum a_n = \ell$ (বা বলি $\sum a_n$ converges to ℓ.) যদি limit-টা ∞ (বা $-\infty$)হয়, তবে বলি $\sum a_n$ diverges to ∞ (বা $-\infty$). আর যদি $\{S_n\}_n$ sequence-টা oscillate করে, তবে বলি $\sum a_n$-টা oscillate করছে।
ঠিক একই জিনিস করা হয় function-এর sequence-এর বেলাতেও। ধরো $\{f_n(x)\}_n$ দিয়ে বলল $\sum f_n(x)$ বার করতে। তাহলে আমরা প্রথমে একটা একটা করে যোগ করতে থাকব--

$$\begin{aligned} S_1(x) &= f_1(x) \\ S_2(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ S_3(x) &= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \\ &\text{ইত্যাদি} \end{aligned}$$

এর ফলে একটা নতুন sequence পাচ্ছি--$\{S_n(x)\}_n$. যেহেতু এটা একটা function-এর sequence, তাই এখানে দুরকম convergence হতে পারে--pointwise আর uniform. যদি $S_n \to f$ pointwise হয় তবে আমরা বলব "$\sum f_n$ converges pointwise to f." যদি convergence-টা uniform হয় তবে একইভাবে বলব "$\sum f_n$ converges uniformly to f." যদি pointwise না uniformly উল্লেখ না করে খালি converges বলা হয়, তবে সাধারণতঃ pointwise convergence বোঝায়।

41.1 সহজ কিছু জিনিস

Example 31: Find the sum function of $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos x)^n$ on $(0, \pi)$.[2] **(2014.1biv)**

SOLUTION:

For $x \in (0, \pi)$ we have $\cos x \in (-1, 1)$.
From standard result about geomtric series

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \text{ for } r \in (-1, 1).$$

So, taking $a = r = \cos x$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos x)^n = \frac{\cos x}{1 - \cos x}.$$

■

Example 32: Show that

$$\log(1-x) + \log(1+x) + \log(1+x^2) + \log(1+x^4) + \cdots$$

converges for $|x| < 1$. **(2011.3b)**

SOLUTION:

> Let
> $$S_n(x) = \log(1-x) + \log(1+x) + \cdots + \log(1+x^{2^{n-1}}) = \log(1-x^{2^n}).$$

কী করে হল? ধাপে ধাপে দ্যাখো--

$$\log(1-x) + \log(1+x) = \log[(1-x)(1+x)] = \log(1-x^2).$$

একইভাবে পরের ধাপে--

$$\log(1-x^2) + \log(1+x^2) = \cdots = \log(1-x^4).$$

এইভাবে চলতে থাকবে।

> Let $m = 2^n$. Then $m \to \infty$ as $n \to \infty$.
> We know that for each fixed $x \in (-1,1)$ we have $x^m \to 0$ as $m \to \infty$. Also $\log$ is a continuous function.
> $\therefore \log(1-x^{2^n}) \to \log(1-0) = \log 1 = 0.$
> $\therefore S_n(x) \to 0$ pointwise on $(-1,1)$.

■

Exercise 17: আচ্ছা, আগের অংকের convergence-টা কি uniform-ও হবে? ■

এই বইয়ে দ্বিতীয় খণ্ডে শিখেছিলাম যে $\sum a_n$ যদি converge করে, তবে $a_n \to 0$ হতে বাধ্য। Function-দের series-এর বেলায় এরকম কিছু বলা যায় কিনা, সেটা জানাই নীচের অংকটার উদ্দেশ্য।

Exercise 18: যদি $\sum f_n(x)$ pointwise converge করে, তবে কি $f_n(x) \to 0$ pointwise হবে? আর যদি $\sum f_n(x)$-এর convergence-টা uniform হয়, তবে কি $f_n(x) \to 0$ uniformly হবে? ■

আমরা দেখেছি যে uniform convergence-এর ক্ষেত্রে sequence-টার বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য (যেমন continuity, limit ইত্যাদি) limit function-টার মধ্যেও সংক্রামিত হয়, যেমন f_n-রা যদি continuous হয় আর $f_n \to f$ uniformly হয়, তবে f-ও continuous হবে। একইভাবে যদি $\sum f_n(x)$ uniformly converge করে $f(x)$-এ, তবে $S_n(x)$-এর বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য $f(x)$-এর মধ্যেও বর্তমান থাকে। এবার তার কিছু নমুনা দেখব।

41.1.1 Continuity

Example 33: If $\sum f_n$ is a uniformly convergent series of real-valued continuous functions defined on a set $S \subseteq \mathbb{R}$, then prove that the sum function is continuous on S.[4] **(2011.4a)**
SOLUTION:

> Let the sum function be $f(x) = \sum f_n(x)$.
> Let $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.
> $\because f_k(x)$'s are continuous, $\therefore S_n(x)$'s are continuous.

> Given that $S_n \to f$ uniformly.

এবার 294 পাতার Example 20-টা করে গেলেই হবে। খালি ওই অংকের f_n-এর জায়গায় এই অংকের S_n বসিয়ে। ■

Example 34: If $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ is a series of continuous real-valued functions converging uniformly to the sum function s over an interval I, show that s is continuous on I.[4] **(2009.3c)**
SOLUTION:আগের অংকটাই। ■

41.1.2 Limit

Continuity-এর বেলায় যেমন এগিয়েছিলাম, সেই একই কাজ limit-এর বেলাতেও করা যায়।

Example 35: Let the series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ be uniformly convergent on a set $S(\subseteq \mathbb{R})$. Suppose that x_0 is an accumulation point of S and let

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n (n = 1, 2, 3, ...).$$

Prove that $\sum_n a_n$ is convergent and

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

[2+2] **(2007.4a)**
SOLUTION: এই অংকটায় বলতে ভুলে গেছে যে $f(x)$-টা কী জিনিস। আসলে বলা উচিত ছিল যে

> Let the series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ be uniformly convergent to a function $f(x)$ on a set $S(\subseteq \mathbb{R})$.

> Let
>
> $$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$
>
> Then $S_n \to f$ uniformly on S.
>
> Also $\forall n \in \mathbb{N}$
>
> $$\lim_{x\to x_0} S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k = A_k, \text{say}.$$

এবার 295 পাতার Example 21-এর ধাপগুলো করে গেলেই হবে, ওখানকার f_n-এর জায়গায় এখানকার S_n বসিয়ে। ■

নীচের দুটো অংকই একই জিনিস, খালি ভাষাটা একটু অন্য।

Exercise 19: A series of real-valued functions $\sum_n f_n$ converges uniformly to a function f on a set $S(\subset \mathbb{R})$ and $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$ for all n, where x_0 is an accumulation point of S. Prove that

1. $\sum_n a_n$ converges,
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \sum_n a_n$.

[2+2] **(2003.3b)** ■

Exercise 20: If $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ is uniformly convergent on S, and c is a limit point of S, prove that

$$\lim_{x \to c} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to c} f_n(x),$$

provided that $\lim_{x \to c} f_n(x)$ exists for all n.[4] **(2014.7a)** ■

41.1.3 Derivative

একই রকম যুক্তি খাটবে differentiation-এর ক্ষেত্রেও। খালি একটু পার্থক্য আছে। ধরো $f_n \to f$ uniformly. তাহলে যদি f_n-রা সবাই continuous হয় তবে f-ও continuous হতে বাধ্য, কিন্তু derivative-এর বেলায় এমন কোনো স্থিরতা নেই। সবগুলো f_n যদি differentiable-ও হয় তাও f কিন্তু differentiable নাই হতে পারে। একটা counterexample আমরা এই অধ্যায়ে আগেই দেখেছি। তার বদলে অবশ্য অন্যদুটো জিনিস আছে যেগুলো এতটা ভালো দেখতে না হলেও, কাজ চালানোর পক্ষে মন্দ নয়। এদের কথা আমরা জেনেছিলাম Example 29 আর Example 30-এ (310 আর 312 পাতায়)। একটু মনে করে নিই এই অংকদুটোর মূল বক্তব্য কী ছিল। ধরো

- সবগুলো f_n-ই differentiable,
- $f_n' \to g$ uniformly,
- অন্ততঃ একটা point আছে c যাতে $\{f_n(c)\}_n$ converge করে।

তাহলে

- $\{f_n(x)\}_n$ uniformly converge করতে বাধ্য,
- যদি এই uniform limit-টা f বলি, তবে f-টাও differentiable হতে বাধ্য,
- $f'(x) = g(x)$ হতে বাধ্য!

Function-এর infinite series-এর ক্ষেত্রে এই জিনিসটা কী রূপ নেবে বুঝতেই পারছ--আমরা শুরু করব $\sum f_n(x)$ নিয়ে, এবং যথারীতি partial sum-গুলো নেব

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

তাহলে যদি

- সবগুলো f_n-ই differentiable হয় (সেক্ষেত্রে সবগুলো $S_n(x)$-ও differentiable হবে),
- $S_n' \to g$ uniformly হয়,
- অন্ততঃ একটা point থাকে c যাতে $\{S_n(c)\}_n$ converge করে।

তবে

- $\{S_n(x)\}_n$ uniformly converge করতে বাধ্য (মানে $\sum f_n$ uniformly converge করবে),
- যদি $f = \sum f_n$ লিখি, তবে f-টাও differentiable হতে বাধ্য,
- $f'(x) = g(x)$ হতে বাধ্য!

এর মধ্যে খালি প্রথম অংশটা প্রমাণ করতে দিয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 36: Let $\{f_n\}_n$ be a sequence of real-valued differentiable functions on $D(\subseteq \mathbb{R})$ and $S_n = \sum_{r=1}^{n} f_r$, $n \in \mathbb{N}$ where $\{S_n(c)\}_n$ is convergent for some $c \in D$. Prove that uniform convergence of $\{S'_n\}_n$ on D implies uniform convergence of $\{S_n\}_n$ on D, where S'_n is the derivative of S_n.[5] **(2012.4a)**

SOLUTION: এই অংকটা পুরো Example 29-এর মতই করতে হবে (310 পাতা দ্যাখো)। তাই আর নতুন করে সবকিছু লিখছি না। খালি ওখানকার f_n-এর জায়গায় এখানে S_n থাকবে, আর x_0-এর জায়গায় c বসাতে হবে। আর হ্যাঁ, ওই অংকটায় একটা বাড়তি শর্ত দেওয়া ছিল যে c হল domain-এর একটা interior point. সেই শর্তটা সম্পূর্ণ অনাবশ্যক ছিল, সুতরাং ওটা নিয়ে দুশ্চিন্তায় পড়ে যেও না। ■

Example 37: If a series $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ converges in $[a, b]$ and each of its terms has a continuous derivative in $[a, b]$ and if the series of differential coefficients $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$ converges uniformly in $[a, b]$, the prove that the sum function of $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ has a differential coefficient at every point of $[a, b]$, and

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x).$$

[5] **(2004,2006)**

SOLUTION: এই অংকটা হবে একেবারে Example 30-এর মত। সেই অংকটার সমাধান খুব একটা সহজ ছিল না, সুতরাং সাবধানে এগিও। এখানে শর্ত দিয়েছে যে "each of its terms has a continuous derivative." এতটা দরকার ছিল না, খালি "each of its terms has a derivative." বললেই চলত। ওই অংকের $f_n(x)$-এর জায়গায় এই অংকের $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ বসিয়ে নিতে হবে। ■

Exercise 21: উপরের অংকটায় বাড়তি একটা শর্ত দিয়েছিল যে প্রতিটা u_n-এর derivative হল continuous. অংকটা করতে সেটা কোনো কাজে লাগে নি। কিন্তু যদি এটাও দেখাতে বলত যে $f(x)$ is continuously differentiable on $[a, b]$ তাহলে কিন্তু ওই শর্তটা কাজে লাগত। কী করে? ■

Example 38: If $\sum_n f_n$ is a series of real-valued functions converging to f in $[a, b] \subset \mathbb{R}$, then state and prove the conditions under which

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_n f_n(x)\right) = \sum_n \frac{d}{dx} f_n(x)$$

[4] **(2010.4b)**

SOLUTION:

A sufficient condition:

$\sum_n \frac{d}{dx} f_n(x)$ converges uniformly on $[a, b]$.

■

41.2 Weierstrass M-test

কোনো function-এর series-কে uniformly convergent দেখানোর জন্য মোক্ষম হাতিয়ার হল Weierstrass M-test. এটা হল uniformly convergence-এর জন্য একটা sufficient condition. এটা খালি function-এর series-এর জন্যই প্রযোজ্য, function-এর যে কোনো sequence-এর জন্য নয়।

Weierstrass M-test

Let $\{f_n\}$ be a sequence of bounded functions defined on a set $E \subseteq \mathbb{R}$. Let M_n be a bound for f_n. If $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ is convergent. Then the series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converges uniformly on E.[4]

ব্যাপারটা এই-- যদি $\sum f_n$-কে uniformly convergent দেখাতে বলে, তবে তুমি প্রতিটা f_n-এর একটা করে bound M_n খুঁজবে। যদি এমনভাবে M_n জোগাড় করতে পারো যাতে $\sum M_n < \infty$ হয়, তবেই কেল্লা ফতে! সেক্ষেত্রে $\sum f_n$ অবশ্যই uniformly convergent হবে।
কেন হবে, সেটা প্রমাণ করা কঠিন নয়, কিন্তু প্রথমে এর প্রয়োগের একটা উদাহরণ দেখে নিই।

Example 39: Use Weierstrass M-test to prove that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{2n-1}}{1 + x^{2n}}$$

converges uniformly for $|x| \leq \frac{1}{2}$.[3] **(2011.3c)**

SOLUTION:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2^n x^{2n-1}}{1 + x^{2n}} \right| &\leq \left| 2^n x^{2n-1} \right| \\ &\leq \left| 2^n \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n-1} \right| \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} = M_n, \text{ say.} \end{aligned}$$

Then

$$\forall x \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \quad \left| \frac{2^n x^{2n-1}}{1 + x^{2n}} \right| \leq M_n.$$

Also $\sum M_n < \infty$, because it is a geometric series with common ratio $\frac{1}{2} \in (-1, 1)$.

Hence, by Weierstrass M-test, the given series converges uniformly on

$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, as required.

■

Exercise 22: Test uniformly convergence of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3(1+x^3)}$$

on $[0,1]$. **(2013.7b)**

HINT: একটু ধরিয়ে দিচ্ছি, শেষটা নিজে করো। এখানে $x \in [0,1]$ থাকায় $\frac{x^n}{1+x^3}$ অংশটা কোনো দিনই > 1 হতে পারে না। সুতরাং sum-এর মধ্যে যেটা আছে তার absolute value সর্বদাই $\leq \frac{1}{n^3}$ হবে। আর $\sum \frac{1}{n^3}$ যে converge করে সেটা নিশ্চয়ই মনে করিয়ে দিতে হবে না? ■

নীচের অংকটাও একইরকম, তাই করে দিলাম না--

Exercise 23: Test uniform convergence of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (\cos nx) x^n}{n^{7/5}(1+x^n)}$$

on $[0,1]$.[3] **(2014.7c)** ■

Example 40: Evaluate

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}.$$

[3] **(2014.7b)**

SOLUTION: ছোট্টো অংক, কিন্তু এরই মধ্যে বেশ একটু কারুকার্য আছে। কোন পথে এগোব বলি। এতক্ষণ যা যা অংক করেছি তার মধ্যে অধিকাংশ ক্ষেত্রেই আমাদের কাজ ছিল series-টা uniformly converge করে কিনা দেখানো। এখানে কিন্তু সে সব কিছু না চেয়ে series-টার একটা limit বার করতে দিয়েছে। লক্ষ করো limit-টা হল x-এর উপরে, আর sum-টার মধ্যে x আছে খালি $\cos nx$-এর মধ্যে। যেহেতু cos একটা continuous function, তাই $\lim_{x\to 0} \cos nx = \cos 0 = 1$ হবে। সুতরাং বলা যায় কি

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 0} \frac{\cos nx}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}?$$

এর মধ্যে দ্বিতীয় '='-টা নিয়ে সন্দেহ নেই, কিন্তু প্রথমটা? এইভাবে কি একটা limit-কে ধাঁ করে একটা infinite series-এর মধ্যে ঢুকিয়ে দেওয়া যায়? না, সবসময়ে যায় না। কিন্তু uniform convergence-এর বেলায় যায়। তাই আমাদের অংকটা শুরু করব uniform convergence দেখানো দিয়ে।

We have $\left|\frac{\cos nx}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n(n+1)} = M_n$, say.

Then $\sum M_n < \infty$, by comparison with the standard series $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$.

So, by Weierstrass M-test, the given series converges uniformly. Hence

the limit can be taken inside the sum to get

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 0}\frac{\cos nx}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},$$

since $\lim_{x\to 0}\cos nx=\cos 0=1$.

এবার প্রশ্ন হল $\sum\frac{1}{n(n+1)}$ কত।

Now

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

The N-th partial sum is

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\left(1-\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{N}-\tfrac{1}{N-1}\right)=1-\tfrac{1}{N-1}\to 1$$

as $N\to\infty$.

Thus the required answer is 1.

■

এবার Weierstrass M-test প্রমাণ করার পালা। নীচের অংকে সেটাই চেয়েছে।

Example 41: Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions defined on a set $E\subseteq\mathbb{R}$ and let $\{M_n\}$ be a sequence of positive constants. If $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ is convergent and $|f_n(x)|\le M_n$ for each $x\in E$ and $n=1,2,3,...,$ then show that the series $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ converges uniformly on E.[4] **(2008.3a)**

SOLUTION:

Let

$$\phi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\ \text{ and }\ \mu_n=\sum_{k=1}^{n}M_k.$$

Then $\forall x\in E\quad\forall n>m\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}|\phi_n(x)-\phi_m(x)| &= \left|\sum_{m+1}^{n}f_k(x)\right|\\ &\le \sum_{m+1}^{n}|f_k(x)| \quad \left[\text{by triangle inequality}\right]\\ &\le \sum_{m+1}^{n}|M_k|=\left|\sum_{m+1}^{n}M_k\right| \quad [\because M_k>0]\\ &= |\mu_n-\mu_m| \qquad (*)\end{aligned}$$

Now, since μ_n's converge, they form a Cauchy sequence.
So
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N \quad |\mu_n - \mu_m| < \epsilon.$$
Hence, from (*),
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N \quad \forall x \in E \quad |\phi_n(x) - \phi_m(x)| < \epsilon.$$
Thus, $\{\phi_n\}_n$ is a uniformly Cauchy sequence.
Hence it is uniformly convergent.

■

একই জিনিস অন্য সুরে--

Exercise 24: Let $\sum f_n$ be a series of real valued functions defined on $S(\subseteq \mathbb{R})$ such that $|f_n x)| \leq a_n$, for all $x \in S$. Prove that $\sum f_n$ is uniformly convergent on S if $\sum a_n$ is convergent.[3] **(2013.7a)** ■

Example 42: Examine term-by-term differentiability of
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^4 x^2}$$
in $\mathbb{R}$.[4] **(2013.7c)**
SOLUTION: কী করতে বলেছে সেটা বোঝার জন্য প্রথমে সবকিছুর নাম দিয়ে নিই--

Let $f_n(x) = \frac{1}{n^3 + n^4 x^2} = \frac{1}{n^3(1+nx^2)}$.
By comparison with $\sum \frac{1}{n^3} < \infty$ the series $\sum f_n(x)$ converges pointwise for $x \in \mathbb{R}$.
Let the sum function be $f(x)$.

এই বার বলি কী দেখাতে হবে--

Shall show
$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad f'(x_0) = \sum f_n'(x_0).$$
$\boxed{\forall x_0}$ Take any $x_0 \in \mathbb{R}$.

Derivative-এর জন্য কায়দাটা তো জানিই, প্রথমে দেখাতে হয় কোনো একটা point-এ মূল series-টা converge করে (সেটা আমাদের ক্ষেত্রে দেখানো হয়েই গেছে), তারপর দেখাতে হয় যে derivative series-টা uniformly converge করে। সেইটা দেখানোর চেষ্টা করা যাক। প্রথমে derivative-টা বার করে নিই--

Now $f_n'(x) = -\frac{2x}{n^2(1+nx^2)^2}$.

একটা series-এর uniform convergence দেখানোর জন্য তো সাকুল্যে একটাই কায়দা শিখেছি--Weierstrass M-test. সেটা লাগাতে গেলে দেখাতে হবে যে, $f_n'(x)$ কোনো সংখ্যা M_n দিয়ে bounded, যেখানে $\sum |M_n| < \infty$. মনে রেখো যে M_n-এর মধ্যে n থাকতে পারে, কিন্তু x থাকলে চলবে না। আমাদের $f_n'(x)$-এর নীচে আছে $(1+n^2x^2)$, যেটা ≥ 1 হবে। সুতরাং

$$|f_n'(x)| \leq \frac{2|x|}{n^2}.$$

সমস্যা হল ডানদিকের জিনিসটাকে M_n বলা যাচ্ছে না, কারণ ওতে x রয়েছে। আর যেহেতু $x \in \mathbb{R}$ যা খুশি হতে পারে, তাই ওটাকে bound করাও অসম্ভব! যদি বলা থাকত $x \in [100, 200]$ বা ওই জাতীয় কিছু তবে ঝামেলা ছিল না, আমরা বলতে পারতাম $|f_n'(x)| \leq \frac{2\times 200}{n^2} = M_n$. কিন্তু এখানে x একেবারে পুরো $\mathbb{R}$-এর মধ্যে নেচে বেড়াতে পারে। তাই সমস্যা! এই সমস্যার হাত থেকে রক্ষা পেতে আমরা একটা কায়দা করব যেটা এরকম ক্ষেত্রে খুবই কাজে লাগে। আমরা পুরো $\mathbb{R}$ নিয়ে কাজ না করে খালি x_0-এর কোনো একটা neighbourhood-এই নিজেদের সীমিত রাখব, ধরো $N(x_0, 1)$-এর মধ্যে। তাহলে অবশ্যই x-টা bounded হবে, এবং একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে--

$$|x| \leq |x_0| + 1.$$

$\therefore \forall x \in N(x_0, 1) \quad |f_n'(x)| \leq \frac{2(|x_0|+|1|)}{n^2}$.

Since $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$, hence by Weierstrass M-test, $\sum f_n'(x)$ converges uniformly over $N(x_0, 1)$.

Thus, by standard result, the limit of $\sum f_n'(x)$ is $\frac{d}{dx}\sum f_n(x)$ for all $x \in N(x_0, 1)$.

In particular the series can be differentiated term by term at $x = x_0$, as required.

■

আমাদের দিয়েছিল $x \in \mathbb{R}$, কিন্তু তাও আমরা কিভাবে $x \in N(x_0, 1)$ ধরে পার পেয়ে গেলাম দেখলে? এই ব্যাপারটা ভালো করে বুঝে নাও। এবার যদি নীচের অংকটা একই কায়দায় করতে পারো তবেই বুঝব যে ব্যাপারটা তোমার মাথায় ঢুকেছে।

Exercise 25: Let $\{f_n(x)\}_n$ be a sequence of functions converging pointwise to $f(x)$ for $x \in \mathbb{R}$. If for every $x_0 \in \mathbb{R}$ the sequence $\{f_n(x)\}_n$ converges uniformly over some neighbourhood of x_0, then show that for all $x \in \mathbb{R}$ we have $f_n'(x_0) \to f'(x_0)$.
HINT: আমরা ইতিমধ্যেই যা শিখেছি, তা ব্যবহার করলে প্রমাণটা মাত্র কয়েক লাইনের ব্যাপার। ■

Example 43: Given that $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|$ converges, let

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}.$$

Show that

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx.$$

[3] **(2004.4b)**
SOLUTION:

> Step 1: Shall show that the series $\sum_1^\infty nb_n \cos nx$ converges uniformly.
> Here $|nb_n \cos nx| \le n|b_n|$.
> Since $\sum_{n=1}^\infty n|b_n| < \infty$,
> so, by Weierstrass M-test, the series $\sum_1^\infty nb_n \cos nx$ converges uniformly.
> Step 2: Clearly the original series
> $$\sum_1^\infty b_n \sin nx$$
> converges at $x = 0$. So by standard result the series can be differentiated term by term to produce the given result.

■

DAY 42
Abel's and Dirichlet's test

মনে আছে হয়তো আমরা এই বইয়ের দ্বিতীয় খণ্ডে infinite series শেখার সময়ে দুটো test-এর উল্লেখ করেছিলাম--Abel's test আর Dirichlet's test. বাস্তবে এদের প্রয়োগ বড় একটা দেখা যায় না। এই দুটো test-এরই একটা করে সংস্করণ আছে যারা function-এর series-এর বেলাতে খাটে। এবার সে বিষয়ে আলোচনা করব। কিন্তু তার আগে জানতে হবে uniformly bounded বলতে কী বোঝায়।

42.1 Uniformly bounded

আমরা মাঝে মাঝেই uniform কথাটা অংকে ব্যবহার করি। তার তিনটে নমুনা ইতিমধ্যেই দেখেছ--uniformly continuous, uniformly convergent এবং uniformly Cauchy. নিশ্চয়ই লক্ষ করেছ যে এদের সবার definition-এই একটা মিল আছে, সেটা হল পর পর দুটো $\forall$ আর $\exists$-এর ক্রমপরিবর্তন করা। যেমন--

- যদি বলি $f : D \to \mathbb{R}$ একটা continuous function, তার সংজ্ঞা ছিল এইরকম--

  $$\forall x \in D \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{ইত্যাদি,}$$

  যেটাকে এভাবেও লিখতে পারি--

  $$\forall \epsilon > 0 \quad \forall x \in D \quad \exists \delta > 0 \quad \text{ইত্যাদি।}$$

  কিন্তু যেই $\forall x$-টাকে $\exists \delta$-এর পরে নিয়ে যাই তবে পাব uniform continuity–

  $$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad \text{ইত্যাদি।}$$

- একইভাবে pointwise convergence-এর সংজ্ঞা ছিল

  $$\forall x \in D \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{ইত্যাদি}$$

  যেটাকে এইভাবেও লেখা যেত--

  $$\forall \epsilon > 0 \quad \forall x \in D \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{ইত্যাদি}$$

  কিন্তু যেই লিখলাম

  $$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \text{ইত্যাদি}$$

  অমনি সেটা হয়ে গেল uniform convergence.

এবার uniform কথাটার প্রয়োগের একটা নতুন উদাহরণ দেখব--uniformly bounded. আমরা জানি একটা function $f : D \to \mathbb{R}$-কে কখন bounded বলে--

$$\exists B > 0 \quad \forall x \in D \quad |f(x)| < B.$$

এবার ধরো তোমাকে একটা sequence of functions দিলাম $\{f_n\}_n$, সবারই domain D. যদি বলি এরা সবাই bounded, তার মানে নিশ্চয়ই--

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in D \quad |f_n(x)| < B.$$

তাহলে আন্দাজ করতে পারছ "$\{f_n\}_n$ is uniformly bounded on D" মানে কী হবে? এর মানে হবে--

$$\exists B > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad |f_n(x)| < B.$$

এর মানে হল এমন একটা ছাদ B আছে সবগুলো f_n-এর গ্রাফই যার নীচে থাকে।

Exercise 26: ধরো $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হল এই constant function-টা-- $f_n(x) \equiv n$. তাহলে সবগুলো f_n-ই কি bounded? এবার বল তো $\{f_n\}_n$ কি $\mathbb{R}$-এর উপরে uniformly bounded? ■

Exercise 27: দুটো function-এর sequence দিলাম (domain $\mathbb{R}$)--

$$\{n \sin x\}_n \text{ আর } \{\sin nx\}_n$$

এদের মধ্যে ঠিক একজনই uniformly bounded. কোনজন? ■

Exercise 28: আমরা জানি যে একটা sequence $\{a_n\}_n$ যদি convergent হয়, তবে সেটা bounded-ও হয়। একটা উদাহরণ দিয়ে দেখাও যে একটা function-এর sequence $\{f_n(x)\}_n$ যদি uniformly convergent হয়, তাও সেটা uniformly bounded নাও হতে পারে। ■

42.2 Statements

Abel's test আর Dirichlet's test দুটোরই মূল চেহারাটা একই--দুটো sequence of functions দেওয়া থাকবে, $\{u_n(x)\}_n$ আর $\{v_n(x)\}_n$, তাদের উপর নানারকম শর্ত দেওয়া হবে, এবং তা থেকে সিদ্ধান্ত করা হবে যে $\sum u_n(x)v_n(x)$-টা uniformly convergent হবে। দুটো test-এর ক্ষেত্রে এই শর্তগুলো খানিকটা আলাদা হবে।

Abel's test

Let $D \subseteq \mathbb{R}$ be some set. If $\{u_n(x)\}_n$ and $\{v_n(x)\}_n$ are two sequences of functions from D to $\mathbb{R}$, such that

- $\forall x \in D \quad \{v_n(x)\}_n$ is a monotone sequence,
- $\{v_n(x)\}_n$ is uniformly bounded on D,
- $\sum u_n(x)$ is uniformly convergent on D,

then $\sum u_n(x)v_n(x)$ is uniformly convergent on D.

Dirichlet's test

Let $D \subseteq \mathbb{R}$ be some set. If $\{u_n(x)\}_n$ and $\{v_n(x)\}_n$ are two sequences of functions from D to $\mathbb{R}$. Let $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$. If

- $\forall x \in D \quad \{v_n(x)\}_n$ is a monotone sequence,
- $\{v_n\}_n$ is uniformly convergent to 0,
- $\{S_n\}_n$ is uniformly bounded on D,

then $\sum u_n(x)v_n(x)$ is uniformly convergent on D.

এগুলোর প্রমাণ একটু খটমট। প্রমাণের মধ্যে যাওয়ার আগে কয়েকটা অংক দেখি যেগুলো এই test-গুলো দিয়ে করা যায়।

Example 44: Using Abel's test show that the series

$$\sum_n \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^p(1+x^n)}, \quad 0 < p \leq 1,$$

is uniformly convergent on $[0,1]$.[3] **(2003.4aii)**

SOLUTION:

Let

$$u_n(x) \equiv \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \text{ and } v_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}.$$

By Leibnitz's test we know that

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

converges. Since $u_n(x)$ is actually free of x, so $\sum u_n(x)$ is uniformly convergent.

Also
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad |v_n(x)| \le 1.$$
So $\{v_n(x)\}_n$ is uniformly bounded.

Shall show that $\{v_n(x)\}_n$ is monotonic for every fixed $x \in [0,1]$.

Take any $x \in [0,1]$.

$\because x \in [0,1]$ $\therefore \{x^n\}_n$ is a decreasing nonnegative sequence.

$\therefore \{1+x^n\}_n$ is a decreasing positive sequence.

$\therefore \left\{\frac{1}{1+x^n}\right\}_n$ is an increasing sequence.

$\therefore \left\{1-\frac{1}{1+x^n}\right\}_n$ is a decreasing sequence.

$\therefore \{v_n\}_n \equiv \left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}_n$ is a monotonic sequence.

So by Abel's test $\sum u_n(x)v_n(x)$ converges uniformly on $[0,1]$.

■

Example 45: Prove that
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{-n^2x^4}}{n}$$
is uniformly convergent on $[0,1]$.[3] **(2012.3c)**

SOLUTION:

Let
$$u_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \text{ and } v_n(x) = e^{-n^2x^4}.$$
Then by Leibnitz's test $\sum u_n(x)$ is convergent, and hence uniformly convergent, since $u_n(x)$ is free of x.

Also $\{v_n(x)\}_n$ is monotone (decreasing), and uniformly bounded by 1.

So By Abel's test, the given series converges uniformly.

■

42.3 Proofs

এইবার আমরা Abel's test আর Dirichlet's test প্রমাণ কী করে করতে হয় শিখব। দুটোরই প্রমাণ খুবই একইরকম। তাই খালি Abel's test-এর প্রমাণটাই বিস্তারিতভাবে করব, অন্যটা তার দেখাদেখি তুমি নিজেই করতে পারবে।
আমাদের দুটো function-এর sequence দেওয়া আছে $\{u_n(x)\}_n$ আর $\{v_n(x)\}_n$. এদের উপর নানারকম শর্ত দিয়ে প্রমাণ করতে বলছে যে $\sum u_n(x)v_n(x)$ হবে uniformly convergent. এর মধ্যে একটা শর্ত Abel এবং Dirichlet দুজনের বেলাতেই আছে-- Abel এবং Dirichlet-এর বাকি শর্তগুলোর মধ্যেও কয়েকটা ব্যাপারে মিল আছে।

- দুই ক্ষেত্রেই $\{v_n(x)\}_n$ একটা monotone sequence. আমরা নিশ্চিন্তে ধরে নিতে পারি যে এটা একটা decreasing sequence–
$$v_1(x) \geq v_2(x) \geq \cdots .$$
যদি increasing হয়, তবে খালি v_n-এর জায়গায় $-v_n$ নিয়ে কাজ করলেই হবে।

- দুজনের ক্ষেত্রেই n যথেষ্ট বড় হলে পরে $v_n(x)$-গুলো uniformly bounded হবে, মানে
$$\exists L > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |v_n(x)| \leq L. \tag{*}$$
বস্তুতঃ Dirichlet-র বেলায় তো আরো বলা আছে যে $\{v_n(x)\}_n$ হল uniformly convergent to 0, যেটা uniformly bounded হবার চেয়ে আরেক কাঠি উপরে। তাই আমরা Dirichlet-এর ক্ষেত্রে L-কে যতখুশী ছোটোও নিতে পারি।

- যদি $U_{m,n}(x) = S_n(x) - S_m(x)$ নিই (এখানে S_n-গুলো হল u_n-এর partial sum), তবে দুই ক্ষেত্রেই $\{U_{m,n}(x)\}_{m,n}$ হল uniformly bounded, অর্থাৎ
$$\exists K > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N \quad \forall x \in D \quad |U_{m,n}(x)| \leq K. \tag{**}$$
কেন? কারণ Abel-এর বেলায় বলেছে যে $\sum u_n(x)$-টা uniformly converge করে, এটা তারই Cauchy criterion থেকে আসে। বস্তুতঃ আমরা K-কে যত খুশী ছোটোও নিতে পারি। ওদিকে Dirichlet-র বেলায় বলা আছে যে $S_n(x)$-রা uniformly bounded, আর $|U_{m,n}(x)| \leq |S_m(x)| + |S_n(x)|$.

আমরা প্রথমে partial sum-গুলোর একটা নাম দিয়ে নেব--
$$W_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_n(x) v_n(x).$$
দেখাতে হবে যে $W_n(x)$-গুলো uniformly converge করে। কোথায় converge করে সেটা জানা নেই, অথচ converge করে দেখাতে হবে, সুতরাং Cauchy criterion লাগানো ছাড়া পথ দেখছি না। যেহেতু কাজ হচ্ছে uniform convergence নিয়ে তাই দেখাবার চেষ্টা করব যে $\{W_n(x)\}_n$ একটা uniformly Cauchy sequence, মানে
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad \forall x \in D \quad |W_n(x) - W_m(x)| < \epsilon.$$
এই অব্‌ধি কোনো প্যাঁচ নেই। কিন্তু এইবার একটা প্যাঁচ লাগাব। খালি একটাই প্যাঁচ লাগবে, এবং সেটা Abel এবং Dirichlet দুজনের বেলাতেই লাগবে। আমরা $W_n(x) - W_m(x)$-টাকে একটু কায়দা করে লিখব--
$$\begin{aligned}
& W_n - W_m \\
= \;& u_{m+1}v_{m+1} + u_{m+2}v_{m+2} + \cdots + u_n v_n \\
= \;& U_{m,m+1}v_{m+1} + (U_{m,m+2} - U_{m,m+1})v_{m+2} + \cdots + (U_{m,n} - U_{m,n-1})v_n \\
= \;& U_{m,m+1} \cdot (v_{m+1} - v_{m+2}) + \cdots + U_{m,n-1} \cdot (v_{n-1} - v_n) + U_{m,n} \cdot v_n.
\end{aligned}$$
আমাদের উদ্দেশ্য হল $|W_n - W_m|$-কে ছোটো রাখা। তাই triangle inequality লাগিয়ে পাব
$$|W_n - W_m| \leq |U_{m,m+1} \cdot (v_{m+1} - v_{m+2})| + \cdots + |U_{m,n-1} \cdot (v_{n-1} - v_n)| + |U_{m,n} \cdot v_n|.$$
আমরা ধরে নিয়েছি যে $\{v_n(x)\}_n$ একটা monotone decreasing sequence. সুতরাং
$$v_{m+1} - v_{m+2}, ..., v_{n-1} - v_n$$
এরা সবাই আসলে ≥ 0. তাই ওদের স্বচ্ছন্দে absolute value-র বাইরে নিয়ে আসা যায়--
$$|W_n - W_m| \leq |U_{m,m+1}|(v_{m+1} - v_{m+2}) + \cdots + |U_{m,n-1}|(v_{n-1} - v_n) + |U_{m,n} \cdot v_n|.$$
আমরা জানি যে m, n যথেষ্ট বড় হলে $U_{m,n}(x)$-গুলো সবাই uniformly bounded হয় (এটাই (**)-এ বলা হয়েছিল)--

$n > m \geq N_2$ হলে $|U_{m,n}(x)| \leq K$ হবে।

সুতরাং লিখতে পারি--

$$|W_n - W_m| \leq K\big[(v_{m+1} - v_{m+2}) + \cdots + (v_{n-1} - v_n) + |v_n|\big],$$

যেটা প্রচুর কাটাকুটি হয়ে গিয়ে ছোট্টো হয়ে দাঁড়ায় এইরকম--

$$|W_n - W_m| \leq K \cdot \big[v_{m+1} - v_n + |v_n|\big] \leq K \cdot \big[|v_{m+1}| + |v_n| + |v_n|\big] = K \cdot \big[|v_{m+1}| + 2|v_n|\big].$$

আমরা জানি যে n যথেষ্ট বড় হলে $v_n(x)$-গুলোও uniformly bounded হবে। এ কথাটা গুছিয়ে (*)-এ বলা হয়েছিল--

যদি $n \geq N_1$ হয় তবে $|v_n(x)| \leq L$ হবে।

সুতরাং n যথেষ্ট বড় হলে পাব--

$$|W_n - W_m| \leq 3LK.$$

তার মানে যদি আমরা LK-কে যথেষ্ট ছোটো রাখতে পারি তাহলেই হবে। এবং সেটা খুবই সহজ কাজ, কারণ Abel-এর ক্ষেত্রে K-কে যত খুশী ছোটো নেওয়া যায়, আর Dirichlet-র বেলায় L-কে যত ইচ্ছে ছোটো করা যায়।
এই মূল ধারণাটা মাথায় রেখে নীচের প্রমাণটা পড়।

Proof of Abel's theorem: Given: $\{v_n(x)\}_n$ is a monotone sequence.
W.l.g., we assume that it is a decreasing sequence. (Otherwise we can consider $-v_n$ instead of v_n.)
Let $W_n(x) = u_1(x)v_1(x) + \cdots + u_n(x)v_n(x)$.
Shall show that $\{W_n(x)\}_n$ is uniformly Cauchy,
ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N \quad \forall x \in D \quad |W_n(x) - W_m(x)| < \epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এইবার আমাদের কাজ হল একটা যুৎসই $N \in \mathbb{N}$ খুঁজে পাওয়া। একটু আগেই আমরা দেখেছি যে m, n যথেষ্ট বড় নিলে

$$|W_n - W_m| < 3LK$$

করা যায়। সুতরাং আমাদের উদ্দেশ্য হবে এমনভাবে N নেওয়া যাতে $n > m \geq N$ হলে $3LK = \epsilon$ হয়। Abel's test-এর ক্ষেত্রে L-এর উপর কোনো নিয়ন্ত্রণ নেই--

$\because \{v_n(x)\}_n$ is uniformly bounded on D,
$\therefore \exists L > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad |v_n(x)| \leq L.$

সুতরাং চেষ্টা করব যেন K-টাকে ছোটো রাখতে পারি, মানে $K = \frac{\epsilon}{3L}$ নিলেই হবে।

Let $U_{m,n}(x) = u_{m+1}(x) + \cdots + u_n(x)$.
$\because \sum u_n(x)$ is uniformly convergent on D,
$\therefore$ it is uniformly Cauchy, ie,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N \quad \forall x \in D \quad |U_{m,n}(x)| < \tfrac{\epsilon}{3L}.$$

$\exists N$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\forall m, n$ Take any $n > m \geq N$.

$\forall x$ Take any $x \in D$.

এবার গড়্গড়্ করে লিখে গেলেই চলবে--

Then

$$\begin{aligned}
& W_n - W_m \\
= \; & u_{m+1}v_{m+1} + u_{m+2}v_{m+2} + \cdots + u_n v_n \\
= \; & U_{m,m+1}v_{m+1} + (U_{m,m+2} - U_{m,m+1})v_{m+2} + \cdots + (U_{m,n} - U_{m,n-1})v_n \\
= \; & U_{m,m+1} \cdot (v_{m+1} - v_{m+2}) + \cdots + U_{m,n-1} \cdot (v_{n-1} - v_n) + U_{m,n} \cdot v_n.
\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}
& |W_n - W_m| \\
\leq \; & |U_{m,m+1}| \cdot |v_{m+1} - v_{m+2}| + \cdots \\
& \quad + |U_{m,n-1}| \cdot |v_{n-1} - v_n)| + |U_{m,n}| \cdot |v_n| \\
\leq \; & |U_{m,m+1}|(v_{m+1} - v_{m+2}) + \cdots \\
& \quad + |U_{m,n-1}|(v_{n-1} - v_n)| + |U_{m,n}| \cdot |v_n| \quad \left[\because \{v_n\}_n \text{ decreasing} \right] \\
\leq \; & \tfrac{\epsilon}{3L} \left[(v_{m+1} - v_{m+2}) + \cdots + (v_{n-1} - v_n) + |v_n| \right] \\
= \; & \tfrac{\epsilon}{3L} \left[v_{m+1} - v_n + |v_n| \right] \\
\leq \; & \tfrac{\epsilon}{3L} \left[|v_{m+1}| + |v_n| + |v_n| \right] \\
\leq \; & \tfrac{\epsilon}{3L} \times 3L = \epsilon.
\end{aligned}$$

as required.

Exercise 29: এইবার একই কায়দায় Dirichlet's test প্রমাণ কর দেখি। ■

DAY 43
Unif. convergence of improper integrals

Infinite series-এর সঙ্গে improper integral-এর অনেক মিল আছে। তার কিছু পরিচয় আমরা আগের অধ্যায়ে দেখেছি। এবার infinite series of functions-এর সঙ্গে একটা সাদৃশ্য দেখব। একটা infinite series of functions দেখতে এইরকম--$\sum_n f_n(x)$. এখানে যদি $f_n(x)$-কে $f(n, x)$ হিসেবে লিখি তবে f হল দুটো variable n আর x-এর একটা function, যেটাকে n-এর উপরে sum করা হচ্ছে। এখানে n খালি $0, 1, 2, \ldots$ value নিতে পারে। যদি n-এর জায়গায় একটা variable t বসাই যেটা যে কোনো real number value নিতে পারে তবে আর n-এর উপরে sum না নিয়ে t-এর উপরে integrate করা যেতে পারে--

$\sum_{n=0}^{\infty} f(n,x)$-এর বদলে $\int_0^\infty f(t,x)dt$.

যদি infinite series-টা converge করে তবে যেমন সেটা x-এর একটা function হত, তেমনি improper integral-টা converge করলে সেটাও x-এর একটা function দেবে। এরকম উদাহরণ আমরা আগেই দেখেছি--

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Infinite series of functions-এর বেলায় যেমন uniform convergence-এর কথা বলা যায়, একইভাবে এই রকম improper integral-দের ক্ষেত্রেও বলা যায়। সুতরাং যখনই আমরা এইরকম একটা improper integral দেখব--

$$\int_0^\infty f(t,x)dt,$$

যেখানে x-এর মত একটা বাড়তি variable আছে (একে বলে parameter), অমনি জানবে যে এখানে খালি convergence পেয়েই ক্ষান্ত দলে চলবে না, uniform convergence-ও পরীক্ষা করে দেখা উচিত।
প্রথমে এরকম parameter-ওয়ালা improper integral-এর uniform convergence-এর সংজ্ঞাটা গুছিয়ে লিখে ফেলি।

DEFINITION: Uniform convergence of improper integrals

Let $D \subseteq \mathbb{R}$ be some set. Let $f(t,x)$ be a function such that for each $x \in D$ the improper integral

$$\int_a^\infty f(t,x)dt$$

converges to some function $F(x)$. We say that the improper integral converges uniformly over D if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M > a \quad \forall x \in D \quad \forall T > M \quad \left| \int_a^T f(t,x)dt - F(x) \right| < \epsilon.$$

এই সংজ্ঞাটা সরাসরি ব্যবহার করার জন্য প্রথমে $F(x)$ বার করতে হবে। সেই কাজটা প্রায় সব সময়েই দুঃসাধ্য ব্যাপার। কিন্তু এতদিনের অভিজ্ঞতায় নিশ্চয়ই বুঝে গেছ যে এইরকম বিপদে কে রক্ষা করতে এগিয়ে আসে। যখনই limit-টা সরাসরি বার না করে কেবল তার existence দেখানোর দরকার হয় তার অমোঘ অস্ত্র হল Cauchy criterion!

Uniform Cauchy criterion

Let $D \subseteq \mathbb{R}$ be some set. Let $f(t,x)$ be a function such that for each $x \in D$ and each $T > a$ the integral $\int_a^T f(t,x)dt$ exists. Then the improper integral $\int_a^\infty f(t,x)dt$ converges uniformly over D iff

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists T > a \quad \forall x \in D \quad \forall T_1, T_2 > T \quad \left| \int_{T_1}^{T_2} f(t,x)dt \right| < \epsilon.$$

এটার প্রমাণ আর নতুন করে কিছু করার নেই। আমরা আগেই যে uniform Cauchy criterion শিখেছিলাম, এটা সেই একই জিনিস, খালি improper integral-এর জন্য সাজিয়ে লেখা।
এই uniform Cauchy criterion-টা এবং এক্ষুণি improper integral-এর uniform convergence-এর যে সংজ্ঞাটা দিলাম, দুটোই হল unbounded domain-এর জন্য। আমরা আরেকরকমের improper integral-এর কথাও জানি, যেখানে domain-টা bounded, কিন্তু function-টা unbounded. সেই ক্ষেত্রেও একইভাবে uniform convergence এবং তার জন্য একটা uniform Cauchy criterion সম্ভব। সে দুটো আর বলে দেব না। নিজে নিজে আন্দাজ করতে পারলেই নীচের অংকদুটো হয়ে যাবে। না পারলে উত্তর দেখে নিও।

Exercise 30: ধরো $f(x,t)$ একটা function যেখানে $t \in (0,a]$ এবং $x \in D$. বলা আছে যে--

- $\forall x \in D \quad \forall c \in (0,a) \quad f(x,t)$ is integrable w.r.t. t over $[c,a]$.
- $\forall x \in D \quad \lim_{t\to 0+} f(x,t) = \infty$.
- $\forall x \in D$ the improper integral $\int_0^a f(t,x)dt$ exists

তাহলে কখন তুমি বলবে যে $\int_0^a f(t,x)dt$-টা uniformly converge করে? উত্তরটা লেখার সুবিধার জন্য $\int_0^a f(x,t)dt$-র একটা নাম দিয়ে নাও, ধরো $f(x)$. ■

Exercise 31: এর জন্য uniform Cauchy criterion-টা কী হবে? ■

এবার কিছু প্রয়োগ দেখা যাক।

Example 46: Show that the integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}dt, \quad A \le x \le B$$

is uniformly convergent in $[A,B]$.[2] **(2004.7c)**
SOLUTION: এই improper integral-টা দেখে প্রথমেই যে জিনিসটা মনে আসা উচিত সেটা হল উপরের ওই $\cos xt$-টা না থাকলে বাকি অংশটুকু আমাদের চেনা--

$$\int_0^T \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1} T.$$

যদি $T \to \infty$ নিই তবে $\tan^{-1} T \to \frac{\pi}{2}$ হয়। সুতরাং যেটুকু সমস্যা হতে পারে সেটা ওই $\cos xt$-টা থেকেই। লক্ষ কর যে এখানে parameter হল x, এবং সেটা ওই $\cos xt$-এর মধ্যে ছাড়া অন্যত্র কোথাও নেই। সুতরাং আমরা যদি কোনোভাবে $\cos xt$-টাকে বেমালুম হাপিশ করে দিতে পারি তবেই একঢিলে দুই পাখি মারা যাবে, x-টাও বিদায় হবে, আবার convergence-টাও দেখানো হয়ে যাবে। এবং $\cos xt$-কে বিদায় করার জন্য এই তথ্যটা অবশ্যই কাজে দেবে যে, $|\cos xt| \le 1$.
এই পুরো পরিকল্পনাটা এবার আমরা uniform Cauchy criterion দিয়ে গুছিয়ে লিখব।

Let $f(t,x) = \frac{\cos xt}{1+t^2}$.
Using uniform Cauchy criterion, enough to show that

◎ $$\forall \epsilon > 0 \quad \exists T > 0 \quad \forall T_2 > T_1 \ge T \quad \forall x \in [A,B] \quad \left|\int_{T_1}^{T_2} f(t,x)dt\right| < \epsilon.$$

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

We know that

$$\tan^{-1} T \to \tfrac{\pi}{2} \text{ as } T \to \infty.$$

So

$$\exists T > 0 \quad \tfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} T < \epsilon.$$

$\boxed{\exists T}$ Choose this $T > 0$.

$\boxed{\forall T_1, T_2}$ Take any $T_2 > T_1 \geq T$.

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in [A, B]$.

Then

$$\begin{aligned} & \left| \int_{T_1}^{T_2} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt \right| \\ \leq & \int_{T_1}^{T_2} \left| \frac{\cos xt}{1+t^2} \right| dt \\ \leq & \int_{T_1}^{T_2} \frac{dt}{1+t^2} \\ = & \tan^{-1} T_2 - \tan^{-1} T_1 \\ \leq & \tfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} T_1 \\ \leq & \tfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} T < \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

■

Example 47: Discuss the convergence of

$$\int_0^\infty e^{-xt} \sin t \, dt, \quad x > 0.$$

[3] **(2009.cii)**

SOLUTION: অংকটায় কোথাও uniform convergence-এর কথা বলা নেই। কিন্তু যেহেতু একটা parameter-ওয়ালা improper integral-এর convergence পরীক্ষা করতে বলেছে, অতএব এমনি convergence (মানে pointwise convergence) দেখানোর পর স্বাভাবিকভাবেই uniform convergence-এর প্রশ্ন ওঠে।

প্রথমে pointwise convergence-এর আলোচনা দিয়ে শুরু করি। এখানে integrand-টা আবার positive, negative দুরকম চিহ্নই নেয়, সুতরাং pointwise convergence পরীক্ষা করতে গিয়ে তিন রকম ব্যাপার হতে পারে-- absolute convergence, conditional convergence, বা divergence. এখানে কোনটা হবে সেটা অবশ্য আন্দাজ করা কঠিন নয়-- যদি $x > 0$ স্থির থাকে তবে $\int_0^\infty e^{-xt} dt$ যে converge করে সেটা আমরা জানিই। আর $|\sin t| \leq 1$, সুতরাং absolute value নিলে $\sin t$-টা কোনো সমস্যা করতে পারবে না। অতএব--

Step 1: Shall show that for each $x > 0$ the integral converges absolutely,

ie,

$$\int_0^\infty |e^{-tx}\sin t|dt < \infty.$$

Now we know from standard result that if $x > 0$ then $\int_0^\infty e^{-tx}dt$ converges.

Also $|e^{-tx}\sin t| = e^{-tx}|\sin t| \leq e^{-xt}$.

$\therefore$ By comparison test (inequality form), for each fixed $x > 0$ the given improper integral converges absolutely, as required.

এইবার uniform convergence পরীক্ষা করে দেখার পালা। প্রথমে আন্দাজ করা চেষ্টা করি uniform convergence হবে কিনা। এখানে $e^{-tx}\sin t$-এর মধ্যে $\sin t$ অংশটা খালি ঢেউ খেলে চলেছে। যদি খালি ওইটুকুই থাকত (মানে $\int_0^\infty \sin t dt$ নিয়ে কাজ হত) তবে convergence-এর কোনো প্রশ্নই উঠত না। কিন্তু বাকি e^{-tx} অংশটা $(x > 0)$ ক্রমশঃ 0-র দিকে এগিয়ে যাচ্ছে, ফলে $\sin t$-এর ঢেউগুলো ক্রমশঃ থিতিয়ে পড়ছে। সেই জন্যই convergence হচ্ছে। এই থিতিয়ে পড়াটা কত তাড়াতাড়ি হচ্ছে সেটা নিয়ন্ত্রণ করছে x-টা। যদি $x > 0$ বড় হয় তবে ঢেউগুলো উচ্চতা অতি দ্রুত কমে যাবে (ফলে convergence-এর সুবিধা হবে)। যদি $x > 0$ হয় 0-র খুব কাছে তাহলেও ঢেউগুলো কমে আসবে বটে কিন্তু অতি ধীরে ধীরে। যেমন Fig 42(a)-তে $x = 0.1$ নিয়েছি, তাতে যত তাড়াতাড়ি ঢেউগুলো থিতিয়ে আসছে, Fig 42(b)-তে $x = 0.2$ নেওয়ায় তার চেয়ে অনেকটাই বেশী। এই গুরুত্বপূর্ণ নিয়ন্ত্রণটা x-এর হাতে থাকায় uniform convergence-এ সমস্যা হবে। ধরো তুমি একটা $\epsilon > 0$ দিলে। তাহলে কি আমি এমন একটা T দিতে পারব যাতে $\int_0^T e^{-tx}\sin t dt$-টা $\int_0^\infty e^{-tx}\sin t dt$-র ϵ দূরত্বের মধ্যে চলে যায় (যাই $x > 0$ হোক না কেন)? উঁহু। এরকম T-এর value অবশ্যই x-এর উপর নির্ভর করবে। কারণ যদি আমি এরকম একটা T দিতে পারতাম, অমনি তুমি এমন একটা $x > 0$ নেবে যেটা 0-র খুব খুউব কাছে, যাতে $[0, T]$-এর মধ্যে $\sin t$-এর ঢেউগুলো যথেষ্ট সতেজ থাকে। সুতরাং uniform convergence যে হবে না সেটা আন্দাজ করা গেল। এবার প্রমাণ করার পালা--

Step 2: Shall show that the improper integral does not converge uniformly for $x > 0$, ie,

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall T > 0 \quad \exists T_1, T_2 \geq T \quad \exists x > 0 \quad \left|\int_{T_1}^{T_2} e^{-xt}\sin t\, dt\right| \geq \epsilon.$$

তিনটে $\exists$ আছে, প্রত্যেকটার জন্য খানিকটা মাথা ঘামাতে হবে। সুতরাং ঠাণ্ডা মাথায় না এগোলে মুস্কিল। মনে রেখো convergence-এর প্রধান অন্তরায় হল ঢেউগুলো, যেগুলো থেকে থেকে মাথা তুলছে। সুতরাং প্রথমে এরকম একটা ঢেউয়ের মাথাটার আচরণ খুঁটিয়ে দেখি। এরকম একটা ঢেউয়ের উপরের অর্ধেকটা দেখিয়েছি Fig 43-এ। এটা রয়েছে $2n\pi$ থেকে $(2n+1)\pi$-এর উপরে (যেখানে $n \in \mathbb{N}$)। এর নীচের অংশটা (যেটা x-axis-এর কাছে) সেটা নিয়ে আমাদের চিন্তা নেই, আমরা নেব চূড়া অংশটা, ধরো $\frac{1}{2}$-এর উপরে যেটা আছে ($\frac{1}{2}$-এর জায়গায় $(0, 1)$-এর মধ্যে যা খুশি নেওয়া যেত)। এই অংশটা রয়েছে $[T_1, T_2]$-র উপরে যেখানে $T_1 = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$ আর $T_2 = 2n\pi + \frac{5\pi}{6}$. এবার দেখি e^{-xt} গুণ করলে এই

Fig 42

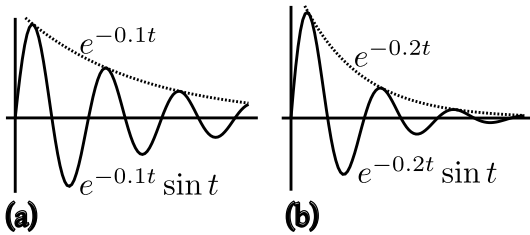
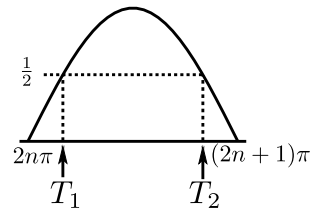



Fig 43

চূড়ার কতটা অবনতি ঘটে।

$$\int_{T_1}^{T_2} e^{-tx}\sin t dt \geq \tfrac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2} e^{-tx}dt = \tfrac{1}{2x}(e^{-xT_1} - e^{-xT_2}).$$

একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে $x \to 0+$ হলে এটা যাবে $\frac{T_2-T_1}{2} = \frac{\pi}{3}$-এর দিকে। সুতরাং এমন $x > 0$ পাব যাতে এটা $\frac{\pi}{6}$-এর চেয়ে বড় হয় (এখানে $\frac{\pi}{6}$-এর কোনো আলাদা মাহাত্ম্য নেই, $\frac{\pi}{3}$-র থেকে ছোটো যেকোনো positive সংখ্যা নিলেই চলত)।

■

Answers

2. Pointwise converge করবে। **3.** না, আগের অংকের মতই এখানেও $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$ নিলেই দেখবে $|f_n(x_n) - 0| = \frac{1}{2}$. **4.** একটা উত্তর এইরকম--

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 4 - 2nx & \text{if } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{if } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

8.
(1) Neither, **(2)** neither, **(3)** only pointwise, **(4)** uniform, **(5)** neither, **(6)** only pointwise, **(7)** uniform, **(8)** only pointwise, **(9)** only pointwise, **(10)** uniform.

9. $f_n(x) = x/n$ আর $f(x) \equiv 0$. **11.** $f_n(x) = x^n$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in [0,1) \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases}$ **15.** $f(x) = 1/x$, আর $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if } x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right) \\ 0 & \text{if } x \in \left(0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$. **16.** হ্যাঁ, সম্ভব। যেমন $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if } x \in (0,1] \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$ আর

$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if } x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \\ n^2 x & \text{if } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$ **17.** না। **18.** দুইক্ষেত্রেই হ্যাঁ। **21.** তাহলে $S'_n(x)$-রা continuous হত, সুতরাং ওদের uniform limit-ও continuous হত। **22.** হ্যাঁ, uniformly converge করে। **26.** Bounded, কিন্তু uniformly bounded নয়। **27.** $\{\sin nx\}_n$. **28.** $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ নাও এইভাবে--$f_1(x) = \frac{1}{x}$, আর $n \geq 2$ হলে $f_n(x) \equiv 0$. **30.** সংজ্ঞাটা হল $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad \forall T \in (0, \delta) \quad \left| \int_T^a f(t,x)dt - f(x) \right| < \epsilon$.
31. Uniform Cauchy criterion-টা হল
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad \forall T_1, T_2 \in (0, \delta) \quad \left| \int_{T_1}^{T_2} f(t,x)dt \right| < \epsilon$.

Chapter VII
Power series

DAY 44
Introduction

আমরা আগের অধ্যায়ে series of functions-এর কথা শিখেছি। এই অধ্যায়ে তার একটা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগ দেখব। একটা series of functions দেখতে এইরকম হয়--

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots .$$

লক্ষ কর এখানে আমরা 0 থেকে গোণা শুরু করছি, 1 থেকে নয়। আমরা যে বিশেষ ধরণের series নিয়ে এই অধ্যায়ে কাজ করব সেটা এই রকম--

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots ,$$

বা এই রকম--

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots .$$

অর্থাৎ এখানে $f_n(x)$-এর চেহারা হল $a_n x^n$ বা $a_n(x-c)^n$. এখানে $a_0, a_1, \ldots$ ইত্যাদি এবং c হল বিভিন্ন সংখ্যা। যদি $c=0$ বসাই তবে দ্বিতীয় series-টা প্রথম series-টায় পরিণত হবে। দ্বিতীয়টাকে আমরা বলি একটা power series যেটা centred at c. সুতরাং প্রথমটা হল একটা power series যেটা centred at 0.

DEFINITION: Power series

By a **power series centred around** $c \in \mathbb{R}$ we mean a series of functions of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n,$$

where a_n's are constants.

এই ধরণের series আমরা আগেও বার কয়েক দেখেছি। এদের সঙ্গে প্রথম পরিচয় হয়েছিল হায়ার সেকণ্ডারীর সময়ে, সেই যখন আমরা e^x কাকে বলে শিখেছিলাম--

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

এটা একটা power series. এই বইয়ের দ্বিতীয় খণ্ডে যখন Taylor আর Maclaurin series শিখেছিলাম সেগুলোও power series-এর বিভিন্ন উদাহরণ, যেমন

$$\sin x = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - + - + \cdots .$$

আমরা সাধারণতঃ power series centred at 0 নিয়েই বেশী মাথা ঘামাই, কারণ যদি centre-টা অন্য কোথাও হয়, যেমন c-তে--

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots,$$

তবে $y = x - c$ নিলেই সেটা একটা y-এর power series-এ পরিণত হবে যেটার centre হবে 0 :

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots.$$

একটা infinite series দেওয়া থাকলে সাধারণতঃ আমাদের প্রধান প্রশ্নগুলো এইরকম--

- সেটা converge করে নাকি diverge করে, নাকি oscillate করে?
- convergence হলে কিরকম--absolute নাকি conditional?
- আর যেহেতু এখানে আমরা function-এর series নিয়ে কাজ করছি, তাই convergence নিয়ে আরও দুটো প্রশ্ন করা যায়-- pointwise নাকি uniform?

সুতরাং সব কিছু মিলিয়ে এতরকম সম্ভাবনা যে সবগুলো একসঙ্গে ভাবতে গেলে মাথা গুলিয়ে যাবে। তাই আমরা আমাদের আলোচনাটা একটু সহজ করে নেব। প্রথমে খালি pointwise convergence নিয়ে আলোচনা করব। তার মধ্যে দেখব কোন কোন x-এর জন্য absolute convergence হয়, কোন কোন x-এর জন্য আদৌ convergence হয় না, আর কোন কোন ক্ষেত্রে conditional convergence হয়।
ধরো তোমাকে একটা power series দিলাম--

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.$$

এটা x-এর কোনো value-তে converge করতে পারে, অন্য কোনো value-তে diverge করতে পারে, আবার তৃতীয় কোনো value-তে oscillate-ও করতে পারে। আমরা সাধারণতঃ প্রথমেই জানতে চাই যে x-এর ঠিক কোন কোন value-র জন্য power series-টা converge করবে।
নীচের অংকটা কোনো রকম পরিশ্রম না করে স্রেফ চোখে দেখেই কষে ফেলতে পারা উচিত।

Example 1: বল তো x-এর এমন কোন value আছে যাতে $a_0, a_1, \ldots$ যাই হোক না কেন

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

converge করতে বাধ্য?
SOLUTION: $x = 0$. ■

প্রশ্ন হল $x \neq 0$ হলে কী হবে? সেটা নির্ভর করবে $a_0, a_1, \ldots$ কী তার উপরে। এমন উদাহরণ সম্ভব যেখানে $x \neq 0$ হলে কখনোই convergence পাবে না। যেমন নীচের অংকটায়।

Example 2: Show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2n} x^n$$

converges only at $x = 0$.[2] **(2009.4c)**
SOLUTION:

Clearly the series converges for $x = 0$.

Let $x \neq 0$.

Then the general term is

$$n^{2n}x^n = (n^2x)^n \to \infty,$$

since for any fixed $x \neq 0$ we have $n^2x \to \infty$.

$\because$ The general term does not go to 0,

$\therefore$ The power series cannot converge if $x \neq 0$.

$\therefore$ The power series converges only at 0, as required.

■

আবার $a_0, a_1, \ldots$ ইত্যাদি যদি বেশ ভদ্রগোছের হয় তবে সব x-এর জন্যই convergence হতে পারে। একটা উদাহরণ তো জানিই--e^x. আরেকটা উদাহরণ রয়েছে নীচের অংকে।

Example 3: State true or false with justification: The power series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{(2n)!} x^n$ is everywhere convergent.[3] **(2006.1c)**

SOLUTION:

The series is $\sum a_n x^n$, where

$$a_n = \frac{e^n}{(2n)!}.$$

এবার আমরা ratio test লাগাব। কিন্তু ratio test তো খালি nonnegative term-ওয়ালা series-এর বেলাতেই লাগানো যায়। কিন্তু $x < 0$ হলে power series-টার সব term তো nonnegative থাকবে না! তাই আমরা প্রথমে absolute series-টা নিয়ে কাজ করব। যদি সেটাই convergent হয়, তবে তো মূল series-টাও converge করতে বাধ্য।

Shall apply ratio test on absolute series $\sum |a_n x^n|$. Now

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} &= \frac{e^{n+1}}{(2(n+1))!} \times \frac{(2n)!}{e^n} \times x \\ &= \frac{ex}{(2n+2)(2n+1)} \\ &\to 0(< 1), \end{aligned}$$

for every $x \in \mathbb{R}$.

So by ratio test the series converges absolutely for every $x \in \mathbb{R}$.

So the statement is true: the series converges everywhere.

■

এই দুটো উদাহরণ হল একেবারে দুই চরমে, একজন কোনো জায়গাতেই converge করে না ($x = 0$ বাদে), আর অন্যজন উদারভাবে সর্বত্রই converge করে। এদের মাঝামাঝি আরো অনেক রকম উদাহরণ সম্ভব। যেমন নীচের অংকটা। এটা কষে দেব না, কারণ উত্তরটা তোমার অজানা হওয়ার কথা নয়। এটা আমাদের বহুপরিচিত geometric series.

Exercise 1: Find the values of x for which the power series $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converges. ■

44.1 Radius of convergence

এবার আমরা দেখব x-এর কোন কোন value-তে একটা power series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

converge করে। আমরা infinite series শেখার সময়ে দেখেছিলাম যে nonnegative term-ওয়ালা series-দের নিয়ে কাজ করা সুবিধা (কারণ ওরা oscillate করতে পারে না)। তাই আমরা প্রথমে $\sum a_n x^n$-এর absolute convergence নিয়ে আলোচনা করব, অর্থাৎ $\sum |a_n||x|^n$-এর convergence নিয়ে আলোচনা করব। এটার term-গুলো যেহেতু nonnegative, তাই convergence পরীক্ষা করার নানারকম হাতিয়ার আছে। আমরা এদের মধ্যে root test ব্যবহার করব। এটা ব্যবহার করার একটা কারণ আছে। সেটা বলার আগে root test পদার্থটা কী ছিল একটু মনে করে নিই--যদি $\sum b_n$ একটা nonnegative term-ওয়ালা infinite series হয় তবে

$$\limsup_{n\to\infty} b_n^{1/n} < 1 \implies \sum b_n < \infty$$

আর

$$\limsup_{n\to\infty} b_n^{1/n} > 1 \implies \sum b_n = \infty.$$

এখানে প্রধান লক্ষ করার বিষয় হল যে দুই ক্ষেত্রেই আমরা $\limsup_n b_n^{1/n}$ ব্যবহার করছি, একদিকে $\limsup$, অন্যদিকে $\liminf$ এরকম নয়। ঠিক এই কারণেই আমরা root test ব্যবহার করছি, ratio test বা ওই জাতীয় কিছু লাগালে একই সঙ্গে $\liminf$ আর $\limsup$ নিয়ে কাজ করতে হত।

Example 4: Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ be a power series such that

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = R, \quad 0 < R < \infty.$$

Prove that the given series is absolutely convergent for $|x| < \frac{1}{R}$ and divergent for $|x| > \frac{1}{R}$.[4] **(2006.3c)**

SOLUTION: প্রথমেই বলে নিই যে এই অংকটার ভাষা সম্পূর্ণ সঠিক নয়। প্রথম অংশটা ঠিক আছে-- $|x| < \frac{1}{R}$ হলে power series-টা অবশ্যই absolutely convergent হবে, কিন্তু $|x| > \frac{1}{R}$ হলেই যে power series-টা divergent হবে এমন কোনো কথা নেই। বলা উচিত ছিল "not convergent for $|x| > \frac{1}{R}$." অর্থাৎ $|x| > \frac{1}{R}$ হলে power series-টা divergent-ও হতে পারে, oscillate-ও করতে পারে।

> Take any $x \in \mathbb{R}$.
>
> By root test the absolute series $\sum |a_n x^n|$ converges if $\limsup |a_n x^n|^{1/n} < 1$,
>
> ie, if $\limsup |a_n|^{1/n} |x| < 1$,
>
> ie, if $|x| < 1/R$, as required.

এ বার উল্টো দিকটা। মনে রেখো যে এখানে কিন্তু আর root test লাগানো যাবে না, কারণ এখানে দেখাতে বলেছে যে $|x| > \frac{1}{R}$ হলে $\sum a_n x^n$-টা converge করে না, খালি $\sum |a_n||x|^n$-এর divergence দেখালে চলবে না!

Again, if $|x| > 1/R$, then $\limsup |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup |a_n|^{1/n} = |x|R > 1$.
$\therefore a_n x^n \not\to 0$.
$\therefore$ The given series cannot converge.

■

Exercise 2: এই power series-টা দ্যাখো--$\sum x^n$. এখানে $a_0 = a_1 = \cdots = 1$. সুতরাং $R = \limsup_n |a_n|^{1/n} = 1$. যদি $x = -2$ নিই তবে power series-টা কি রকম আচরণ করবে--converge, diverge নাকি oscillate? ■

লক্ষ কর এই root test-এর কায়দাটা যে কোনো power series-এর ক্ষেত্রেই খাটে। যদি একটা power series দেওয়া থাকে $\sum a_n x^n$, তবে তুমি সব সময়েই এই sequence-টা বানাতে পারো--$\{|a_n|^{1/n}\}_n$. যে কোনো sequence-এরই $\limsup$ থাকে (যদি sequence-টা unbounded above হয়, তবে আমরা $\limsup$-টাকে ∞ লিখি)। যেহেতু $|a_n|^{1/n}$-রা সবাই nonnegative (যদিও a_n-রা negative হতেই পারে), তাই এই $\limsup$-টা হবে একটা nonnegative সংখ্যা, বা ∞. তার মানে যদি $\limsup$-টাকে μ নাম দিই তবে power series-টা absolutely converge করবে যদি $|x| < \frac{1}{\mu}$ হয়, আর diverge করবে যদি $|x| > \frac{1}{\mu}$ হয়। সমস্যা হল μ যদি 0 বা ∞ হয় তবে power series-টার আচরণ কী হবে? এর উত্তরটা বেশ মিষ্টি--যদি $\mu = 0$ হয় তবে যে কোনো x-এর জন্যই absolutely converge করবে, আর যদি $\mu = \infty$ হয় তবে $x \neq 0$ হলে কখনোই converge করবে না। এইটাই নীচের অংকে প্রমাণ করতে বলেছে।

Example 5: Let $\mu = \overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$, $a_n \in \mathbb{R}$ for all n. Prove that the power series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ is everywhere convergent if $\mu = 0$, but the series is divergent if $\mu = \infty$.[3] **(2012.4b)**

SOLUTION:

Step 1: Let $\mu = 0$. Shall show that

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_1^{\infty} a_n x^n \text{ converges.}$$

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in \mathbb{R}$.

এবার root test লাগাব--

Then
$$\overline{\lim} |a_n x^n|^{1/n} = \mu \times |x| = 0 < 1.$$
$\therefore$ By root test, the series converges absolutely, and hence converges, everywhere.

এবার divergence অংশটা। এখানে অংকটায় দুটো সমস্যা আছে। বলেছে series-টা divergent হবে, আসলে বলা উচিত ছিল "converge করবে না", কারণ series-টা oscillate-ও করতে পারে। দ্বিতীয় সমস্যা হল, কোন x-এর জন্য ব্যাপারটা হবে সেটা বলে নি। তা থেকে মনে পারে যে সব $x \in \mathbb{R}$-এর জন্যই দেখাতে হবে। সেটা অবশ্যই ঠিক নয়, কারণ $x = 0$-তে যে কোনো $\sum a_n x^n$-ই convergent হয়। তাই এখানে আসলে দেখাতে হবে যে, যাই $x \neq 0$ নাও না কেন $\mu = \infty$ হলে series-টা converge করবে না--

Step 2: Let $\mu = \infty$. To show

$\forall x \neq 0 \quad \sum a_n x^n$ does not converge.

Take any $x \neq 0$.

Then

$$\overline{\lim} |a_n x^n|^{1/n} = \overline{\lim} |a_n|^{1/n} \times |x| = \infty.$$

So the general term of the series $a_n x^n$ does not tend to 0. Hence the series does not converge.

■

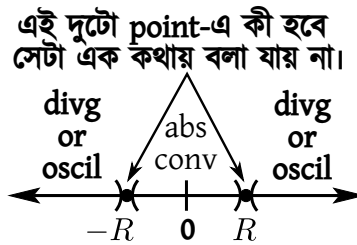
এই পুরো ব্যাপারটাকে বেশ গুছিয়ে লেখা যায় এইভাবে--ধরো তোমাকে একটা power series দিল $\sum a_n x^n$. দিয়ে জানতে চাইল x-এর কোন কোন value-র জন্য এটা absolutely converge করে, আর কোন কোন value-র জন্য আদৌ converge করে না। তাহলে তুমি প্রথমে $\limsup_n |a_n|^{1/n}$ বার করবে। তারপর এই সংখ্যাটা বার করবে--

$$R = \begin{cases} \infty & \text{if } \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell} & \text{if } \ell \in (0, \infty) \\ 0 & \text{if } \ell = \infty \end{cases}$$

তাহলে তুমি এক কথায় বলতে পারো যে power series-টা absolutely converge করবে যদি $|x| < R$ হয় আর আদৌ converge করবে না যদি $|x| > R$ হয়। Fig 1 দ্যাখো।

আমরা এতক্ষণ খালি সেই সব power series-দের নিয়ে আলোচনা করেছি যারা centred at 0. যদি centre অন্যত্র হয়, তবেও অসুবিধা নেই। যেমন যদি $\sum a_n (x-10)^n$ দেওয়া থাকে (এখানে centre হল 10), তবে আমরা $y = x - 10$ বসাব, তাতে power series-টা হয়ে যাবে $\sum a_n y^n$. এবার যথারীতি R বার করব, এবং বলব যে power series-টা absolutely converge করবে যদি $|y| < R$ হয়, মানে $|x - 10| < R$ হয়। আর যদি $|y| > R$ হয়, মানে $|x - 10| > R$ হয়, তবে power series-টা converge করবে না।

সুতরাং বুঝতেই পারছ যে এই R জিনিসটার গুরুত্ব অপরিসীম। এর একটা নাম আছে--radius of convergence.

Fig 1

DEFINITION: Radius of convergence

For the power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, let $\ell = \limsup |a_n|^{1/n}$ (may be ∞). The **radius of convergence** of the power series is defined as

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{\ell} & \text{if} & 0<\ell<\infty \\ 0 & \text{if} & \ell=\infty \\ \infty & \text{if} & \ell=0. \end{array}$$

একটা ছোট্টো অংক করে সংজ্ঞাটা মনে গেঁথে নেওয়া যাক--

Example 6: Determine the radius of convergence of the power series

$$1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\left(\frac{x}{5}\right)^4+\cdots.$$

[3] (**2013.1aiii)**

SOLUTION:

The power series is $\sum a_n x^n$, where

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & \text{if } n \text{ is odd} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^n & \text{otherwise} \end{cases}$$

So

$$|a_n|^{1/n} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{if } n \text{ is odd} \\ \frac{1}{5} & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Clearly $\limsup_n |a_n|^{1/n} = \frac{1}{5} < 1$.

So the required radius of convergence is $1/\frac{1}{5} = 5$.

■

প্রায় পুরো ব্যাপারটাই বেশ সুন্দর করে গোছানো গেছে, খালি একটা ছোট্টো খুঁত বাদে। সেই খুঁতটা অবশ্য root test-এর নিজস্ব খুঁত। যদি $\sum b_n$ একটা nonnegative term-ওয়ালা infinite series হয় তবে $\limsup b_n^{1/n} = 1$ হয়ে গেলেই root test মুস্কিলে পড়ে যায়। Power series-এর ক্ষেত্রে এর ফলে কী সমস্যা হয় দেখি। ধরো একটা power series আছে $\sum a_n x^n$. আমরা এর radius of convergence বার করেছি R. যদি $R=0$ বা $R=\infty$ হয়, তবে ঝামেলা নেই, কিন্তু ধরো $R\in(0,\infty)$ হয়েছে। তবে আমরা জানি যে $x\in(-R,R)$ হলে power series-টা absolutely converge করবে (সুতরাং এমনি convergence-ও হবে)। আবার যদি $x\in(-\infty,-R)\cup(R,\infty)$ হয় তবে power series-টা converge করবে না (তাই absolute convergence-এর প্রশ্নই ওঠে না)। কিন্তু যদি $x=-R$ বা $x=R$ হয় তবে? এই দুটো জায়গায় root test থমকে যাবে, কারণ $\limsup = 1$ হবে। তাই এই দুটো point-কে নিয়ে আলাদা করে মাথা ঘামানো ছাড়া পথ নেই।

চট্ করে ভেবে নিই যে এই দুটো point-এ power series-টার কী কী আচরণ করতে পারে--

1. absolutely converge করতে পারে,

2. আদৌ converge না করতে পারে,

3. conditionally converge করতে পারে, মানে converge করল কিন্তু absolutely converge করল না।

এই প্রতিটা আচরণই বাস্তবে দেখা যায়। শুধু তাই নয়, $x = R$-এ কি রকম আচরণ করবে তার সঙ্গে $x = -R$-এ কি রকম আচরণ করবে তারও কোনো সম্পর্ক নেই। এমন হতেই পারে যে $x = R$-এ conditionally converge করল, অথচ $x = -R$-এ আদৌ converge করল না। বা হয়তো দু জায়গাতেই absolutely converge করে গেল।
সুতরাং যদি প্রশ্ন করি যে কোন কোন x-এর জন্য power series-টা converge করবে তবে তার উত্তর হতে পারে চার রকম-- $(-R, R)$ বা $(-R, R]$ বা $[-R, R)$ বা $[-R, R]$. এদের বলে interval of convergence–

DEFINITION: Interval of convergence

For power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, the **interval of convergence** is defined as the set of all values of x for which the series converges. It is always an interval.

এখানে বলে রাখি যে কোনো কোনো বইতে interval of convergence বলতে সবসময়েই $(-R, R)$ বোঝায়। সুতরাং সেই সব বইয়ের মতে একটা power series তার interval of convergence-এর বাইরেও converge করতে পারে!
নীচের তালিকাটা দেখলে হয়তো radius of convergence-এর সঙ্গে interval of convergence-এর সম্পর্কটা খেয়াল রাখতে সুবিধা হবে।

Radius of convergence	Interval of convergence
0	$\{c\}$
∞	$\mathbb{R}$
$0 < R < \infty$	$(c-R, c+R)$ বা $[c-R, c+R)$ বা $(c-R, c+R]$ বা $[c-R, c+R]$

এই আলোচনার ভিত্তিতে কয়েকটা অংক করা যাক।

Example 7: Correct or justify: If $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converges at $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, then it converges absolutely for all x such that $|x| < |c|$.[2] **(2013.8a)**

SOLUTION:

> Let R be the radius of convergence of the power series (centred at 0).
> Since the power series converges at $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, so $R \geq |c|$.
> If we take any x with $|x| < |c|$, then $|x| < R$, or $x \in (-R, R)$.
> By standard result a power series must converge absolutely in the interior

of the interval of convergence.
So the given statemnt is correct.

■

Exercise 3: Let $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ be such that $|x_1| < |x_2|$. Show that if a power series $\sum a_n x^n$ converges at $x = x_2$, then it must also converge at $x = x_1$. ■

Exercise 4: Show that the power series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(x-2)^n$$

has radius of convergence $R = 1$. What is its interval of convergence? ■

Exercise 5: এরকম সবচেয়ে বেশী কতগুলো point থাকতে পারে যেখানে একটা power series খালি conditionally converge করে? ■

Exercise 6: A power series (centred at 1) converges conditionally at exactly two points. One of them is 3. What is the other point? What is the radius of convergence? ■

DAY 45
Finding radius of convergence

আমরা এবার এমন কিছু অংক কষব যেখানে একটা power series দেওয়া থাকবে $\sum a_n x^n$, এবং আমাদের কাজ হবে তার radius of convergence বার করা। এমনিতে কাজটা কঠিন কিছু নয়, কারণ আমরা radius of convergence-এর ফর্মুলা তো জানিই-- প্রথমে $\ell = \limsup_n |a_n|^{1/n}$ বার করতে হয়, তারপর $R = 1/\ell$ বার করলেই চলে (খালি যদি $\ell = 0$ হয় তবে $R = \infty$, আর $\ell = \infty$ হলে $R = 0$ নিতে হয়)। জিনিসটা শুনতে মন্দ না, কিন্তু হাতেকলমে বার করার পক্ষে ওই $\limsup_n |a_n|^{1/n}$ পদার্থটা ঠিক উপাদেয় ঠেকছে না। ওই বিচ্ছিরি জিনিসটার ভয়েই লোকে infinite series করার সময়ে root test-এর চেয়ে ratio test লাগাতেই বেশী ভালোবাসে (যদিও root test আসলে ratio test-এর চেয়ে বেশী শক্তিশালী)। Power series-এর ক্ষেত্রেও কি কোনোভাবে ratio test লাগিয়ে পার পাওয়া যায় না? উত্তর হল--হ্যাঁ, যায়, কখনো কখনো, সব সময়ে নয়। আমরা প্রথমে এমন কিছু অংক দেখব যেখানে root test লাগানো কঠিন নয়। Ratio test-এর কায়দাটা তারপরে শিখব।

45.1 Root test ব্যবহার করে

Example 8: Find the radius of convergence of the power series

$$\tfrac{1}{3} - x + \tfrac{x^2}{3^2} - x^3 + \tfrac{x^4}{3^4} - x^5 + \cdots.$$

(2010.5a)

SOLUTION:

The power series is $\sum a_n x^n$, where

$$a_n = \begin{cases} -1 & \text{if } n \text{ odd} \\ \frac{1}{3^n} & \text{if } n \text{ even} \end{cases}$$

So

$$|a_n|^{1/n} = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ odd} \\ \frac{1}{3} & \text{if } n \text{ even} \end{cases}$$

The odd subsequence converges to 1, and the even subsequence converges to $\frac{1}{3}$. Since any $n \in \mathbb{N}$ is either odd or even, so this bounded sequence has only two limit points 1 and $\frac{1}{3}$.

Hence $\limsup |a_n|^{1/n} = 1$.

So the required radius of convergence is $\frac{1}{1} = 1$.

■

Example 9: Given that $\sum_0^\infty |a_n| < \infty$, prove that the power series $\sum_0^\infty a_n^n x^n$ converges everywhere in $\mathbb{R}$.[3] **(2010.1f)**

SOLUTION:

$$\limsup \left(|a_n^n|\right)^{1/n} = \lim |a_n| = 0,$$

since $\sum |a_n| < \infty$. So the radius of convergence is ∞, ie, the power series converges everywhere, as required.

■

Example 10: The radius of convergence of the power series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(3 + (-1)^n\right)^n x^n$$

is 4.[3] **(2006.1d)**

SOLUTION: এই অংকটা ভুল, আসলে radius of convergence হবে $\frac{1}{4}$.

The series is $\sum a_n x^n$, where

$$a_n = \left(3 + (-1)^n\right)^n.$$

Now

$$\limsup |a_n|^{1/n} = \limsup \left(3 + (-1)^n\right) = 4.$$

So the radius of convergence is $\frac{1}{4}$.

■

Exercise 7: Determine the radius of covergence of the power series

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(x\sin\frac{n\pi}{3}\right)^n.$$

[3] **(2014.1aiv)**
HINT:
এখানে $a_n = \left(\sin\frac{n\pi}{3}\right)^n$. মাথার উপরে ওই n-টা যে power হিসেবে রয়েছে তাতেই বুঝতে পারছ যে root test দিয়ে সুবিধা হবে। এখানে $|a_n|^{1/n} = \left|\sin\frac{n\pi}{3}\right|$. এবার লক্ষ কর যে, n যখনই 3 দিয়ে ভাগ যাবে তখন এটা 0. যদি 3 দিয়ে ভাগ না যায় তবে এটা $\frac{\sqrt{3}}{2}$. তাহলে $\limsup|a_n|^{1/n}$ কত হচ্ছে? ■

এবার নানারকম power series দিলাম। প্রতিক্ষেত্রে radius of convergence বার করতে হবে।

45.2 Ratio test ব্যবহার করে

ধরো $\sum b_n$ একটা positive term-ওয়ালা infinite series. তাহলে root test কাজ করে $\limsup_n b_n^{1/n}$ নিয়ে। এই জিনিসটা <1 হলে convergence, আর >1 হলে divergence. আর ratio test কাজ করে দুটো জিনিস নিয়ে-- $\liminf_n \frac{b_{n+1}}{b_n}$ আর $\limsup_n \frac{b_{n+1}}{b_n}$. যদি $\limsup < 1$ হয় তবে convergence, আর $\liminf > 1$ হলে divergence. সুতরাং root test খালি একটা জিনিস দিয়েই convergence আর divergence দুয়েরই কাজ সেরে ফেলছে। কিন্তু ratio test দুটো আলাদা জিনিস ব্যবহার করছে। এদিকে radius of convergence তো খালি একটাই হবে। সেই কারণেই এতক্ষণ root test ব্যবহার করছিলাম। কিন্তু একটা ক্ষেত্রে ratio test-ও এক কথায় কাজ সেরে ফেলতে পারে, সেটা হল যদি $\lim_n \frac{b_{n+1}}{b_n}$-টা exist করে। তাহলে এটাই একাধারে $\liminf$ আবার $\limsup$. এর থেকেই জন্ম নেয় নীচের theorem-টা, যেটা প্রমাণ করার দায়িত্ব তোমার উপরেই ছেড়ে দিলাম। ভয় নেই, সহজ প্রমাণ!

> THEOREM
>
> Consider the power series $\sum a_n x^n$. If
>
> $$R = \lim\frac{a_n}{a_{n+1}} \text{ exists (may be } \infty),$$
>
> then the radius of convergence of the power series is R.

লক্ষ কর এখানে আমরা $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ না নিয়ে $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ নিয়ে কাজ করছি। তাই এই limit-টাই সরাসরি R দিচ্ছে, $R = 1/\text{limit}$ করতে হচ্ছে না।
এই theorem-টা খুব কাজের জিনিস। একটা power series পেলেই আমরা প্রথমে দেখে নেব $\frac{a_n}{a_{n+1}}$-এর limit-টা exist করে কি না। যদি করে তবে আর খামোখা root test-এর হয়রানির মধ্যে যাব না। যদি exist না করে তবে root test তো হাতের পাঁচ রইলই।

Exercise 8: একজন ছাত্র root test-কে ভীষণ ভয় পায়। তাকে $\sum a_n x^n$-এর radius of convergence বার করতে দেওয়া হয়েছে। দুঃখের বিষয়, সেই অংকটাতে $\lim\frac{a_n}{a_{n+1}}$-টা আবার exist করে না। কিন্তু তাও ছেলেটা root test-এর

পথে না গিয়ে $\liminf \frac{a_n}{a_{n+1}} = 3$ আর $\limsup \frac{a_n}{a_{n+1}} = 5$ বার করে ফেলেছে। এইটুকু মাত্র তথ্য থেকে radius of convergence সম্পর্কে কী সিদ্ধান্ত করা যায়? ■

Example 11: Find the radius of convergence of the power series

$$x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{2!}{3^3}x^3 + \frac{3!}{4^4}x^4 + \cdots .$$

[3] **(2011.1c)**

SOLUTION:

The given series is $\sum a_n x^n$, where

$$a_n = \frac{(n-1)!}{n^n}.$$

Now

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{(n-1)!}\\ &= \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+1)}\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(n+1)}\\ &\to \tfrac{1}{e}.\end{aligned}$$

So the radius of convergence is $1/\frac{1}{e} = e$.

■

Exercise 9: Find the radius of convergence of the power series

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 x + \left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 x^2 + \left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 x^3 + \cdots$$

[3] **(2012.1c)** ■

Exercise 10: যদি $\sum a_n x^n$-এর radius of convergence হয় 1, তবে দেখাও যে $\sum a_n^2 x^n$-এর radius of convergence-ও হবে 1. ওদের interval of convergence-ও কি একই হবে? ■

এইবার একগুচ্ছ অংক দিই, যেখানে কখনও ratio test লাগবে, কখনও বা root test.

Exercise 11: Find the radius of convergence of the following power series:
(1) $\sum_1^\infty n^n x^n$ **(2)** $\sum_0^\infty \frac{(x-1)^n}{n5^n}$ **(3)** $\sum_0^\infty \frac{(x+3)^n}{n+1}$ **(4)** $\frac{(\log 3)x^3}{3} + \frac{(\log 4)x^4}{4} + \frac{(\log 5)x^5}{5} + \cdots$
(5) $\sum_0^\infty \frac{(1-x)^n}{5n^2-45n+1}$ **(6)** $\sum_0^\infty \frac{5^n}{n^2+1}x^n$ **(7)** $\sum_2^\infty \frac{1}{10^n \log n}x^n$ **(8)** $\sum_1^\infty \frac{\log n}{3^n}x^n$ **(9)** $\sum_0^\infty \frac{3^n}{5^n\sqrt{n}}x^n$
(10) $\sum_0^\infty \frac{e^n}{\sqrt{1+4^n}}x^n$ **(11)** $\sum_0^\infty \frac{2^n}{n!}x^n$ **(12)** $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n x^n}{n2^n}$ **(13)** $\sum_0^\infty n^2 2^n x^n$ **(14)** $\sum_0^\infty \frac{1}{n+2}x^n$
(15) $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}x^n$ **(16)** $\sum_1^\infty \frac{e^n}{n^5}x^n$
■

এই লম্বা অংকটা করতে গিয়ে হয়তো একটা জিনিস চোখে পড়েছে, সেটা নীচের অংকে গুছিয়ে লিখি।

Exercise 12: যদি $p(n)$ হয় n-এর যে কোনো polynomial, যেমন $p(n) = 1-4n+\frac{1}{2}n^2-n^3$, তবে $\sum a_n x^n$ এবং $\sum p(n)a_n x^n$-এর radius of convergence একই হতে বাধ্য। এটা দেখাতে পারো? শুধু তাই নয়, $\sum \frac{a_n}{p(n)}x^n$-এর ক্ষেত্রেও radius of convergence একই থাকবে (খালি $p(n)\neq 0$ চাই)। এমন কি এই power series-গুলোর ক্ষেত্রেও একই কথা খাটবে--

$$\sum \sqrt{p(n)}a_n x^n, \quad \sum \sqrt[3]{p(n)}a_n x^n, \quad \sum \log p(n) a_n x^n.$$

শেষেরটার জন্য খালি $p(n) > 0$ লাগবে, নইলে log নেওয়া যাবে না। এগুলো সবই প্রমাণ করা মোটেই খুব শক্ত কিছু নয়। চেষ্টা করেই দ্যাখো! ■

এবার একটা সামান্য ঠকানো অংক।

Example 12: ধরো এই power series-টা দিলাম

$$1 - \frac{x^2}{2^1\times 1!} + \frac{x^4}{2^2\times 2!} - \frac{x^6}{2^3\times 3!} + - + - \cdots.$$

এটার radius of convergence কী হবে?

SOLUTION: লক্ষ কর যে এখানে খালি x-এর even (জোড়) power-গুলোই আছে। সুতরাং যদি $\sum a_n x^n$ আকারে লিখি, তবে a_1, a_3, a_5 ইত্যাদিরা সবাই 0. সুতরাং এই a_n-দের উপরে ratio test লাগাতে পারবে না। যদি root test লাগাতে যাও তবে পাবে

$$|a_n|^{1/n} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{(n/2)!}\right)^{1/n} & \text{if } n = 2,4,... \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

এটার $\limsup$ বার করাটা খুব সহজ মনে হচ্ছে না। কিন্তু এরকম অংক আসলে খুব সহজে করা যায়, এইভাবে--
প্রথমে $y = x^2$ বসাও। তাতে power series-টা হয়ে যাবে

$$1 - \frac{y}{2^1\times 1!} + \frac{y^2}{2^2\times 2!} - \frac{y^3}{2^3\times 3!} + - + - \cdots.$$

এটাকে যদি $\sum b_n y^n$ আকারে লিখি তবে

$$b_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}.$$

এবার নিশ্চিন্তে ratio test লাগাতে পারি--

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{1}{2(n+1)} \to 0.$$

সুতরাং $\sum b_n y^n$-এর radius of convergence হল ∞. অর্থাৎ

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \sum b_n y^n \text{ converges.}$$

সুতরাং যে কোনো x-এর জন্যই $\sum a_n x^n$-ও converge করবে। অতএব $\sum a_n x^n$-এর radius of convergence-ও হল ∞. ■

Exercise 13: Find the radius of convergence of

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + - + \cdots.$$

■

এবার কিছু অংক দিই যেখানে তোমাকে একটা power series-এর interval of convergence বার করতে হবে। এটা radius of convergence বার করার থেকে একটু বেশী কঠিন। প্রথমে অবশ্যই radius of convergence R বার করেই শুরু করতে হবে। যদি $R = 0$ হয় তবে interval of convergence হবে $\{c\}$, যেখানে c হল power series-টার centre. যদি $R = \infty$ আসে, তবে interval of convergence হবে $(-\infty, \infty)$. কিন্তু যদি $0 < R < \infty$ হয় তবে বাড়তি পরিশ্রম করতে হবে। আলাদা করে দেখতে হবে $x = c + R$ এবং $x = c - R$-এ power series-টা converge করে কিনা। একটা উদাহরণ দেখি।

Example 13: Find the interval of convergence of

$$\sum \frac{(x-3)^n}{10n}.$$

SOLUTION: প্রথমে radius of convergence বার করি--

> The series is $\sum a_n (x-c)^n$ where $a_n = \frac{1}{10n}$ and $c = 3$. Here
>
> $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n} \to 1.$$
>
> So by ratio test the radius of convergence is $R = 1$.

এবার দুই প্রান্ত নিয়ে গবেষণা করি--

> At $x = c + R = 3 + 1 = 4$, the series is $\frac{1}{10}\sum \frac{1}{n} = \infty$.
> At $x = c - R = 3 - 1 = 2$, the series is $\frac{1}{10}\sum \frac{(-1)^n}{n}$, which converges by Leibnitz test.
> So the required interval of convergence is $[c - R, c + R) = [2, 4)$.

■

এবার একই কায়দায় নীচের অংক কয়টা কর।

Exercise 14: Find the interval of convergence in each of the following cases.

(i) $1 + (2-x) + (2-x)^2 + (2-x)^3 + \cdots$.

(ii) $\sum_1^\infty \frac{(2+x)^n}{\sqrt{n}}$

(iii) $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n^3}$

■

Exercise 15: আমরা দেখেছি যে, $\sum \frac{x^n}{n}$-এর interval of convergence হল $[-1,1)$. এই ব্যাপারটা ব্যবহার করে এমন একটা power series বানাও যার interval of convergence হবে $(5,11]$. ■

DAY 46
Basic properties

46.1 Uniform convergence

এতক্ষণ আমরা pointwise convergence নিয়েই খালি মাথা ঘামাচ্ছিলাম। এবার uniform convergence-এর দিকে তাকাই। ধরো $\sum a_n x^n$ একটা power series, যার interval of convergence হল D. তার মানে D-এর মধ্যে যে কোনো x নিলেই power series-টা pointwise converge করে। সুতরাং স্বভাবতঃই প্রশ্ন জাগে যে পুরো D-এর উপরেই power series-টা uniformly converge করে কি না। আন্দাজ করতে পারছ হয়তো যে উত্তর হল--না। কিন্তু একেবারে হতাশ হয়ে পড়ার মত কিছু নেই। কারণ আমরা এটা দেখাতে পারব যে interval of convergence-এর যেকোনো closed, bounded subset-এর উপর convergence-টা uniform হতে বাধ্য। যেমন যদি interval of convergence হয় $(-2,2]$, তবে $[0,1]$-এর উপর uniform convergence হবে, আবার $[-1.9,2]$-এর উপরেও হবে। কিন্তু $(-2,0]$-র উপরে convergence-টা uniform নাও হতে পারে। মনে আছে নিশ্চয়ই যে $\mathbb{R}$-এর মধ্যে closed, bounded set-দের বলে compact. তাই আমরা বলতে পারি যে একটা power series পুরো interval of convergence-এর উপর uniformly converge নাও করতে পারে, কিন্তু interval of convergence-এর যে কোনো compact subset-এর উপরে অবশ্যই uniformly converge করবে। গুছিয়ে লিখলে ব্যাপারটা এইরকম--

THEOREM

Let a power series have interval of convergence I, and let $K \subseteq I$ be compact. Then the power series must converge uniformly on K.

এইটা আমরা ধাপে ধাপে প্রমাণ করব। কিন্তু আগে কিছু উদাহরণ দেখে গা গরম করে নিই।

Example 14: ধরো একটা power series-এর interval of convergence হল $[-1,1)$. ধরো $C \subseteq [-1,1)$ হল একটা compact set. তবে আমরা বলেছি যে C-এর উপর power series-টার convergence অবশ্যই uniform হতে বাধ্য। যদি C-টা compact না হত, তবে কী হবে সে বিষয়ে কিন্তু আমরা নীরব থেকেছি। নীচে কিছু C দিলাম যারা কেউই compact নয়। কিন্তু তা সত্ত্বেও এদের কারুর কারুর ক্ষেত্রে জোর দিয়ে বলা যায় যে uniform convergence হবেই। কাদের ক্ষেত্রে এবং কী করে?

(1) $(-1,0)$, **(2)** $(0,1)$, **(3)** $(-0.1,0.5)$.

SOLUTION: আমরা জানি যে যদি কোনো set-এর উপর uniform convergence হয়, তবে তার যে কোনো subset-এর উপরেও convergence-টা uniform হতে বাধ্য। এখানে $[-1,0] \subseteq [-1,1)$ হল একটা compact set. তাই $[-1,0]$-র উপরে uniform convergence হবে। যেহেতু $(-1,0)$ হল $[-1,0]$-র subset, তাই $(-1,0)$-এর উপরেও uniform convergence হবে।
একই রকম যুক্তি খাটে $(-0.1, 0.5)$-এর বেলাতেও।
কিন্তু $(0,1)$-এর বেলায় এই জোরটা খাটে না। সত্যিই এমন power series সম্ভব যার interval of convergence হল $[-1,1)$ এবং যেটা $(0,1)$-এর উপর uniformly converge করে না। একটা উদাহরণ হল $\log(1-x)$-এর Maclaurin series–

$$x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + \cdots.$$

■

Exercise 16: দেখাও যে $\sum x^n$-এর interval of convergence হল $(-1,1)$. দেখাও যে এই power series-টা পুরো $(-1,1)$-এর উপর uniformly converge করে না। খালি $(0,1)$-এর উপরে কী করে? ■

Example 15: Prove that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+1}{(n^7+3)4^n} x^n$$

is uniformly convergent for all x in $[-4,4]$.[4] **(2012.3b)**
SOLUTION:

আমাদের খালি এটুকু দেখাতে পারলেই হবে যে, $[-4,4]$ হল interval of convergence-এর একটা compact subset. তা, compact তো দেখাই যাচ্ছে, কারণ closed আর bounded. প্রশ্ন হল সেটা interval of convergence-এর মধ্যে আছে কিনা। তার জন্য এটা দেখানোই যথেষ্ট যে, $x = 4$ আর $x = -4$-এ power series-টা converge করে। কারণ $x = 4$ আর $x = -4$-এ converge করলেই পুরো $[-4,4]$-এর উপরেই converge করতে বাধ্য, যেহেতু interval (মানে মাঝে কোনো ফাঁক-ফোকর নেই)।

> When $x = 4$, the series is
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+1}{(n^7+3)4^n} 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+1}{(n^7+3)},$$
>
> which converges by comparison with the standard series $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$.
>
> At $x = -4$, the series is
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^5+1}{(n^7+3)},$$
>
> which also converges absolutely as above.
>
> So it must converge over $[-4,4]$.
>
> Thus $[-4,4]$ is a compact subset of the interval of convergnce.

এইবার আমাদের theorem-টা লাগাব--

> So by standard result the power series converges uniformly on $[-4, 4]$.

■

Example 16: Prove that the power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ is uniformly convergent on $[0,1]$ if $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is convergent and the radius of convergence of the power series is one.[4] **(2013.8b)**
SOLUTION: এই অংকটায় ভুল আছে। এখানে radius of convergence যে 1 হবেই এমন কোনই কথা নেই, খালি সেটা ≥ 1 হবে এটুকুমাত্র বলা যায়।

> The power series is centred at 0, and so converges at $x = 0$. Also by the givn condition, the power series converges at $x = 1$. So both 0 and 1 lies inside theinterval of convergence. Hence $[0,1]$ is a subset of the interval of convergence.
>
> Since $[0,1]$ is a compact set, so by standard result, the power series converges uniformly on $[0,1]$, as required.
>
> Let the radius of convergence be R. Since th series converges at $x = 1 \neq 0$, so $R > 0$.
> We know that the power series diverges for all $x \notin [-R, R]$.
>
> Since the series converges at $x = 1$, hence $1 \in [-R, R]$. Thus $R \geq 1$.

$R = 1$ যে জোর দিয়ে বলা যায় না, সেটা এই counterexample-টা দেখলেই বুঝবে। ধরো, $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. তাহলে $\sum a_n$ অবশ্যই converge করে, কিন্তু power series-টার radius of convergence হল $2 > 1$. ■

Example 17: Find the interval I of uniform convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n 2^n}.$$

[3] **(2003.4ai)**
SOLUTION: এই অংকে একটা কথা ব্যবহার করেছে--“the interval of uniform convergence”. এই কথাটার কোনো মানে হয়না। যেমন ধরো এই অংকে আমরা দেখব যে interval of convergence হবে $[-3, 1)$. সুতরাং এর যে কোনো compact subset-এর উপরেই uniform convergence হবে। $[-3, 0.9]$-এর উপরেও হবে, $[-3, 0.99]$-এর উপরেও হবে, আবার $[-3, 0.99999]$-এর উপরেও। সুতরাং এক কথায় কাউকেই “the interval of uniform convergence” বলা যায় না। আমরা এই অংকে তাই “uniform” শব্দটাকে অগ্রাহ্য করে খালি interval of convergence বার করব।

> Here the power series has centre -1, and is of the form $\sum a_n (x - (-1))^n$, where
>
> $$a_n = \frac{1}{n 2^n}.$$

Now

$$\begin{aligned}(a_n)^{1/n} &= \left(\frac{1}{n2^n}\right)^{1/n} \\ &= n^{-1/n}\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

So the radius of convergence is $\frac{1}{1/2} = 2$.

At $x = -1 + 2$, the series is

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum \frac{1}{n} = \infty.$$

At $x = -1 - 2$, the series is

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n},$$

which converges by Leibnitz's test. So the required interval of convergence is $[-1-2, -1+2) = [-3, 1)$.

■

এবার আমরা যে কয়টা জিনিস শিখব সেগুলো সবই আসে uniform convergence থেকে। আমরা জানি যে $f_n \to f$ uniformly হলে f_n-এর অনেক গুণ f-এর মধ্যেও সংক্রামিত হয়। এবার ধরো একটা function f-কে এইভাবে power series হিসেবে লেখা যায়--

$$f(x) = \sum a_n x^n.$$

এর মানে হল power series-টার interval of convergence-এর সর্বত্র power series-টা $f(x)$-এ converge করে। এর মানে যদি partial sum-গুলোকে $S_n(x)$ নাম দিই--

$$S_n(x) = \sum_0^n a_k x^k,$$

তবে $S_n \to f$ হবে pointwise. আমরা আগেই দেখেছি যে এর মানে interval of convergence-এর যে কোনো compact subset-এর উপর convergence-টা uniform হয়। সুতরাং আশা করা যায় যে $S_n(x)$ বিভিন্ন গুণ $f(x)$-এর মধ্যেও বর্তাবে। লক্ষ কর যে $S_n(x)$-গুলো হল একেকটা polynomial, আর polynomial-দের যে কত গুণ সে আর বলে শেষ করা যায় না--continuous, যতবার খুশী প্রাণভরে differentiate করলেও আপত্তি করবে না, চমৎকার integrate-ও করা যায়। আমরা এবার দেখব এই সব ভালো ভালো গুণ কিভাবে power series-দের মধ্যেও সংক্রামিত হয়। সবারই প্রমাণ বেশ সোজা, সরাসরি uniform convergence ব্যবহার করে। খালি একটা ব্যাপারে সাবধান--এই uniform conference কিন্তু পুরো interval of convergence-এর উপর নাও হতে পারে, খালি compact subset-দের উপরেই হবে। এই ছোট্টো সমস্যাটুকু কায়দা করে এড়িয়ে চলাটাই নীচের অংকগুলোর প্রধান কাজ।

46.2 Continuity and limit

Example 18: Let R be a radius of convergence of the power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Show that the

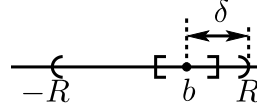



Fig 2

sum function f of this series is continuous on $(-R, R)$.[4] **(2005.4a)**

SOLUTION: এই অংকটা দেখেই তুমি হয়তো নেচে উঠবে এই বলে যে এখানে partial sum-গুলো যেহেতু সবাই polynomial, তাই ওরা continuous. আর power series-টা তো uniformly converge করেই সুতরাং power series-টাও $(-R, R)$-এর উপর continuous হবেই! দুঃখের কথা, এই যুক্তিটা ভুল! Power series-টা $(-R, R)$-এর উপর uniformly converge করে এমন কথা তোমায় কে বলল? তুমি খালি এইটুকু বলতে পারো যে $(-R, R)$-এর যাবতীয় compact subset-এর উপরে convergence-টা uniform হবে। কিন্তু তোমাকে তো প্রমাণ করতে দিয়েছে যে power series-টা পুরো $(-R, R)$-এর উপরেই continuous হবে, তাহলে?

> Shall show that
> $$\forall b \in (-R, R) \quad \sum a_n x^n$$
> is continuous at $x = b$.
>
> Take any $b \in (-R, R)$.

এবার আমাদের কাজ হল b-কে $(-R, R)$-এর মধ্যে একটা closed, bounded interval-এর ভিতরে ঢুকিয়ে দেওয়া। এর ফলে আমরা uniform convergence ব্যবহার করতে পারব। এই কাজটা কী করে করছি সেটা Fig 2 দেখলেই বুঝবে।

> Let $\delta = \min\{R - b, b + R\} > 0$. Then $\left[b - \frac{\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2}\right]$ is a compact subset of $(-R, R)$.

এইবার সেই theorem-টা লাগাব, যেটা বলে যে interval of convergence-এর যে কোনো compact subset-এর উপরে power series-রা uniformly converge করে।

> So the partial sums $S_n(x) = \sum_0^n a_k x^k$ converge uniformly to $f(x) = \sum_0^\infty a_k x^k$ on $\left[b - \frac{\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2}\right]$.
>
> Each $S_n(x)$ is a polynomial and hence continuous. So the uniform limit $f(x)$ must be continuous on $\left[b - \frac{\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2}\right]$.
>
> $\because b \in \left[b - \frac{\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2}\right]$,
>
> $\therefore f(x)$ must be continuous at $x = b$, as required.

■

লক্ষ কর যে আমরা b-তে continuity দেখানোর জন্য b-কে ঘিরে একটা compact set তৈরী করলাম, যার মধ্যে b-কে ঘিরে একটা neighbourhood আছে। এই কাজটা করা গেল কারণ b-টা $(-R, R)$-এর মধ্যে ছিল। যদি $b = R$ বা $b = -R$ হয়ে যেত তবে এটা করা যেত না। তাহলে কি power series-টা তার interval of convergence-এর দুই প্রান্তে continuous নাও হতে পারে? অবশ্য দুইপ্রান্তে power series-টা আদৌ converge-ই নাও করতে পারে, সেক্ষেত্রে continuity-র প্রশ্নই ওঠে না। কিন্তু যদি converge করে, তবে কি continuous হবেই? উত্তর হল--হ্যাঁ। একে বলে Abel's theorem. দেখো, যেন Abel's test-এর সঙ্গে গুলিয়ে ফেলো না!

Abel's theorem

If a power series $f(x) = \sum a_n x^n$ has radius of convergence R, and if it converges at $x = R$, then $f(x)$ is left continuous there. Similarly, if it converges at $x = -R$, then $f(x)$ is right continuous there.

এইটাই প্রমাণ করতে বলেছে নীচের অংকের দ্বিতীয় অংশে। এখানে অবশ্য $R = 1$ নিয়েছে, আর খালি ডানদিকের প্রান্তটা নিয়ে কাজ করতে বলেছে। কিন্তু সেটা করতে পারলে বাঁপ্রান্ত বা অন্য R নিয়ে একইভাবে এগোনো যাবে।

Example 19: Suppose $\sum_{n=0}^\infty a_n$ is a convergent series of real numbers. Let

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \quad \text{for } x \in (-1, 1).$$

Prove that $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ is uniformly convergent on $[0, 1]$. Show that

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n.$$

[5] **(2009.4a)**

SOLUTION: মনে রেখো যে $\sum a_n$-টা converge করছে মানে $x = 1$-এ power series-টা converge করছে। সুতরাং প্রথম অংশটা আগের অংকের মতই, খালি R-এর জায়গায় এখানে 1 দিয়েছে। সেটা আর নতুন করে করলাম না। দ্বিতীয় অংশটার জন্য লক্ষ কর যে আমরা আসলে $f(x)$-কে $x = 1$-এও define করতে পারি এইভাবে--$f(1) = \sum a_n$, যেহেতু এই series-টা converge করে। সুতরাং পুরো $[0, 1]$-এর উপরেই power series-টা converge করে। যেহেতু $[0, 1]$ হল compact, তাই এই convergence-টা uniform হবে। এবার ঠিক আগের অংকের যুক্তিটাই এখানেও খাটবে। তা থেকেই এসে যাবে যে, $f(x)$ হল $x = 1$-এ left-continuous. এটাই Abel's theorem-এ দাবী করা হয়েছিল।

> Second part:
>
> We define $f(1) = \sum a_n$, since the series is assumed to converge.
>
> Then the power series converges to $f(x)$ over $[0, 1]$.
>
> Since $[0, 1]$ is compact, so by standard result, this convergence is uniform.
>
> Let $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.
>
> Then each $S_n(x)$ is a polynomial and hence is continuous.
>
> So their unifirm limit $f(x)$ is also continuous on $[0, 1]$.
>
> Hence $\lim_{x \to 1-} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^\infty a_n$, as required.

■

Exercise 17: Prove or disprove:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^7 + 1}{n^{11} + 3} \left(\frac{x}{5}\right)^n$$

has a continuous sum function in $[-3,4]$.[3] (**2013.1aiv)**

HINT:

পুরো করে দেব না, খালি কায়দাটা ধরিয়ে দিচ্ছি। প্রথমে দেখাও যে $x=4$-এ power series-টা converge করে। সেটা দেখানো খুবই সহজ, ওই মস্ত $\frac{n^7+1}{n^{11}+3}$-টা দেখতে যতই বিচ্ছিরি হোক, সবসময়েই $[0,1]$-এর মধ্যে আছে। বাকি রইল $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ (মনে রেখো $x=4$ নিয়ে কাজ হচ্ছে)। Geometric series-টাকে চিনতে অসুবিধা হচ্ছে না নিশ্চয়ই?

$x=4$-এর convergence হয়ে গেল। Centre আছে 0-তে, তাই $(-4,4]$-এর উপর convergence হতে বাধ্য। সুতরাং $[-3,4]$ হল interval of convrgence-এর একটা compact subset. তা থেকে পাবে uniform convergence, এবং তা থেকে continuity. ■

DAY 47
Term by term operations

47.1 কাকে বলে?

আমরা জানি যে নীচের জিনিসগুলোকে polynomial বলে--

$$1+x+x^2, \quad 1-3x+\frac{1}{2}x^3, \quad 1+2x+3x^3+\cdots+10x^9.$$

এদের general form হল

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n=\sum_0^n a_kx^k.$$

বুঝতেই পারছ যে এই sum-টাকে যদি ∞ অবধি টেনে নিয়ে চলি, তবেই আমরা একটা power series পাব। সুতরাং polynomial-দের বিভিন্ন গুণ আমরা power series-দের মধ্যেও প্রত্যাশা করতে পারি । এরকম দুটো গুণের কথা এবার আমরা শিখব--প্রথমটাকে বলে term by term integration আর দ্বিতীয়টাকে বলে term by term differentiation. ধরো এই polynomial-টাকে 1 থেকে 2-এর মধ্যে integrate করতে বললাম-- $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$. অমনি তুমি এইভাবে কষে ফেলবে--

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 a_0+a_1x+a_2x^2\,dx\\
=\;& a_0\int_1^2 dx+a_1\int_1^2 xdx+a_2\int_1^2 x^2dx\\
=\;& a_0x\Big|_1^2+\frac{a_1}{2}x^2\Big|_1^2+\frac{a_2}{3}x^3\Big|_1^2\\
=\;& a_0(2-1)+\frac{a_1}{2}(2^2-1^2)+\frac{a_2}{3}(2^3-1^3).
\end{aligned}$$

এখানে polynomial-টায় তিনটে term ছিল। তুমি integrate করার সময়ে term-গুলোকে আলাদা আলাদা করে integrate করলে। এইটাকেই বলে term by term integration. যদি একটা polynomial-কে $\sum_0^n a_kx^k$ লিখি, তবে term by term integration করা মানে

$$\int_a^b \sum_0^n a_kx^k dx=\sum_0^n a_k\int_a^b x^k dx=\sum_0^n \frac{a_k}{k+1}(b^{k+1}-a^{k+1}).$$

এই জিনিসটা power series-দের ক্ষেত্রেও খাটে (যদি integration-টা করা হয় interval of convergence-এর কোনো closed, bounded subset-এর উপরে)। এটাই নীচের theorem-টার বক্তব্য।

Term by term integration

Let I be the interval of convergence of the power series $\sum a_k x^k$. Let $[a,b] \subseteq I$ be any closed, bounded interval. Then the function denoted by the power series is Riemann integrable on $[a,b]$ and

$$\int_a^b \sum a_k x^k dx = \sum \frac{a_k}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1}).$$

In particular,

$$\forall t \in I \quad \int_0^t \sum a_k x^k dx = \sum \frac{a_k}{k+1} t^{k+1}.$$

এটা প্রমাণ করা খুবই সহজ, কিন্তু আগে একটা উদাহরণ দেখে নিই।

Example 20: আমরা জানি যে $\int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = e - 1$. আবার এও জানি যে

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}.$$

দ্যাখো তো এই power series-টাকে term by term integrate করলে একই উত্তর আসে কি না।
SOLUTION: আমরা জানি যে এই power series-টার interval of convergence হল $(-\infty, \infty)$, আর এখানে $[0,1] \subseteq (-\infty, \infty)$. সুতরাং term by term integration চলবে--

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!} dx &= \sum_0^\infty \int_0^1 \frac{x^k}{k!} dx \\ &= \sum_0^\infty \frac{1^{k+1} - 0^{k+1}}{(k+1)k!} \\ &= \sum_0^\infty \frac{1}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \\ &= e - 1, \end{aligned}$$

ঠিক যেমনটি চেয়েছিলাম। ■

তবে একটা ব্যাপারে সাবধান--integration করার উৎসাহে যেন interval of convergence-এর বাইরে চলে যেও না! তবে কি রকম করুণ পরিণতি হতে পারে সেটা নীচের উদাহরণটা দেখলেই টের পাবে।

Example 21: আমরা শিখেছিলাম যে $|x| < 1$ হলে

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

হয়। এখানে interval of convergence হল $(-1, 1)$. কিন্তু মনে করো একজন ছাত্র উৎসাহের চোটে $[-2, 0]$-এর উপরে term by term integration লাগিয়ে বসে আছে। বাঁদিকটাকে integrate করে পেয়েছে

$$\int_{-2}^{0} \frac{dx}{1-x} = -\log(1-x)\Big|_{-2}^{0} = \log 3.$$

এতে কোনো ভুল নেই। কিন্তু ডানদিকের power series-টাকে term by term integrate করে পেয়েছে--

$$\int_{-2}^{0} \sum_{0}^{\infty} x^k dx \underbrace{=}_{\text{ভুল}} \sum_{0}^{\infty} \int_{-2}^{0} x^k dx = \sum_{0}^{\infty} \frac{-(-2)^{k+1}}{k+1} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{k+1}}{k+1}.$$

সুতরাং এই ভুলটা করলে সিদ্ধান্ত দাঁড়াচ্ছে যে

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{k+1}}{k+1} = \log 3 \quad \boxed{\text{একেবারে ভুল!}}$$

কেন ভুল সেটা নিশ্চয়ই আর বলে দিতে হবে না--বাঁদিকের infinite series-টার general term হল $\frac{(-1)^k 2^{k+1}}{k+1}$, যেটা মোটেই 0-র দিকে যাচ্ছে না! যে series-এর general term-টা 0-র দিকেই যায় না, সে আবার converge করবে কি করে? ■

Example 22: Determine the sum function of $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Hence prove that

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

[1+3] **(2014.8c)**

SOLUTION: এই অংকের দ্বিতীয় অংশটায় একটা প্যাঁচ আছে। প্রথম অংশটা তো স্রেফ geometric series–

> $\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$ for $x \neq 1$, and $= N+1$ for $x = 1$.
> So as $N \to \infty$, the limit exists finitely if an only if $|x| < 1$ and the limit is $\frac{1}{1-x}$, which is the required sum function.

এবার দ্বিতীয় অংশ। মোটামুটি কায়দাটা হল এক্ষুণি যেটা বার করলাম, মানে

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \quad (|x| < 1),$$

সেটার দুপাশকে -1 থেকে 0 পর্যন্ত integrate করে দেওয়া, তাহলে পাবে

$$\log 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - + \cdots,$$

ঠিক যেমনটা চেয়েছে। সমস্যা একটাই, -1 থেকে 0 অব্‌ধি integrate করা গেল কী করে? -1-এ তো power series-টা converge-ই করে না! প্যাঁচটা এখানেই। একবার Abel's theorem লাগাতে হবে। প্রথমে integration-টা করব t থেকে 0 পর্যন্ত যেখানে $t \in (-1, 0)$.

Integrating term by term for x in $[t,0]$ (for $t\in(-1,0)$) we have

$$\int_t^0 \frac{dx}{1-x} = \int_t^0 dx + \int_t^0 xdx + \int_t^0 x^2xd + \cdots,$$

or

$$\log(1-t) = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^3 + \cdots. \qquad (*)$$

এইবার একটা অদ্ভুত জিনিস দেখবে--যদি $t=-1$ বসাই তবে ডানদিকের power series-টা দিব্যি converge করছে! মানে integration করার পর interval of convergence-টা বেড়ে গেছে!

At $t=-1$ the power series in the RHS is $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots$, which converges by Leibnitz's test.

So by Abel's theoreom the sum function is right continuous at $t=-1$. Since $\log(1-t)$ is also (right) continuous at $t=-1$, hence $(*)$ actually holds even at $t=-1$ giving

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

as required.

■

একটা power series-কে যেমন term by term integrate করা যায়, তেমনি term by term differentiate-ও করা যায় (অবশ্যই interval of convergence-এর মধ্যে)। প্রথমে একটা polynomial-এর ক্ষেত্রে কী হয় দেখে নিই--

$$\frac{d}{dx}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = 0 + a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1},$$

বা summation দিয়ে লিখলে

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_0^n a_kx^k\right] = \sum_1^n ka_kx^{k-1}.$$

লক্ষ কর differentiation-এর ফলে constant term-টা উড়ে গেছে, তাই ডানদিকের sum-টা শুরু হচ্ছে $k=1$ থেকে। একইভাবে power series-এর বেলায় লিখতে পারি--

Term by term differentiation

Let I be the interval of convergence of the power series $\sum a_kx^k$. Then the function denoted by the power series is differentiable everywhere in I, and $\forall x\in I$

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_0^\infty a_kx^k\right] = \sum_1^\infty ka_kx^{k-1}.$$

এটাও প্রমাণ করা মোটেই কঠিন নয়। আগে একটা অংক কষা যাক।

Exercise 18: আমরা জানি যে $\sin x$-কে differentiate করলে $\cos x$ হয়। আরও জানি যে এদের power series হল

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - + - + \cdots,\\ \cos x &= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - + - + \cdots.\end{aligned}$$

দ্যাখো তো $\sin x$-এর power series-টাকে term by term differentiate করলে $\cos x$-এর power series-টা পাও কি না। ■

এবার আমরা প্রমাণে হাত দেব। দুটো প্রমাণেরই মূল কথা একই--একটা power series তার interval of convergence-এর মধ্যে যে কোনো closed, bounded set-এর উপর uniformly converge করে।

47.2 Integration-এর বেলায় প্রমাণ

যদি $f_n \to f$ uniformly on $[a,b]$ হয়, আর f_n-গুলো হয় $[a,b]$-র উপর Riemann integrable, তবে আমরা জানি যে f-ও $[a,b]$-র উপর Riemann integrable হবে আর

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$$

হবে।

Power series-এর বেলায় partial sum function-গুলো সবাই polynomial, তাই continuous, এবং তাই Riemann integrable. আর uniform convergence তো আছেই (compact subset-এর উপরে)।

Example 23: Prove that a power series can be integrated term by term on any closed subinterval of its interval of convergence. **(2010.5b)**

SOLUTION: এখানে আমরা Riemann integration-এর কথা বলছি তাই খালি closed interval বলা হলেও ধরে নিতে হবে closed, bounded interval.

W.l.g, we consider a power series $\sum a_n x^n$, centred at 0. Let I be its interval of convergence. Let $[a,b] \subseteq I$ be any closed, bounded interval. Let the limit function be

$$f(x) = \sum a_n x^n \quad x \in I.$$

Shall show

$$\int_a^b f(x)dx = \sum \int_a^b a_n x^n dx = \sum a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Let $S_n(x) = \sum_0^n a_k x^k$.

Then we know that $S_n \to f$ uniformly on $[a,b]$.

$\because S_n$'s are all continuous, $\therefore$ they are Riemann integrable on $[a,b]$.

So f is also Riemann integrable on $[a,b]$.

Also $\int_a^b S_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$.

Now,

$$\int_a^b S_n(x)dx = \sum_0^n a_k \int_a^b x^k dx \to \sum_0^\infty a_k \int_a^b x^k dx.$$

So

$$\int_a^b f(x)dx = \sum \int_a^b a_n x^n dx = \sum a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1},$$

as required.

■

47.3 Differentiation-এর বেলায় প্রমাণ

Uniform convergence-এর ক্ষেত্রে differentiation করার ব্যাপারে কিঞ্চিৎ ঝামেলা আছে, সেটা আমরা আগেই দেখেছি। $f_n \to f$ uniformly হলেও (এবং f_n, f সবাই differentiable হলেও) $f_n' \to f'$ হবার কোনো স্থিরতা নেই। কিন্তু যদি $f_n' \to g$ uniformly হয়, এবং অন্ততঃ একটা কোনো $x = b$-এ $\{f_n(b)\}$ convergent হয়, তবে f_n-রা uniformly converge করবে, এবং যদি f_n-এর limit-টাকে বলি $f(x)$, তবে $f'(x) = g(x)$ হবে। এইবার এটা আমাদের কাজে লাগবে।

Example 24: Prove that a power series can be differentiated term by term strictly within its interval of convergence.[4] **(2008.4a,2003.3c)**

SOLUTION: এখানে "strictly within its interval of convergence" মানে হল interval of convergence-এর interior-এ।

Let $\sum a_k x^k$ be a power series with radius of convergence $R > 0$.

Let the sum function be $f(x)$. We shall show that

$$\forall x_0 \in (-R, R) \quad f'(x_0) \text{ exists, and } = \sum k a_k x_0^{k-1}.$$

$\forall x_0$ Take any $x_0 \in (-R, R)$.

The radius of convergence of the power series $\sum k a_k x^{k-1}$ is

$$\frac{1}{\limsup |k a_k|^{1/k}} = \frac{1}{\limsup |a_k|^{1/k}} \quad [\because k^{1/k} \to 1]$$
$$= R.$$

So by standard power series result we know that the power series $\sum k a_k x^{k-1}$ converges uniformly on any compact subset of $(-R, R)$.

Let $\delta = \min\{x_0 + R, R - x_0\} > 0$.

Then $A = \left[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 - \frac{\delta}{2}\right]$ is a compact set such that

$$x_0 \in A \subseteq (-R, R).$$

> Let the sum function be $g(x)$.
> Let $f_n(x) = \sum_0^n a_k x^k$.
> Then $f_n'(x) = \sum_1^n k a_k x^{k-1}$.
> Thus
>
> - $f_n \to f$ (uniformly) on A,
> - $f_n' \to g$ uniformly on A.
>
> So by standard result f is differentiable and $f' = g$, everywhere on A.
> In particular, at $x_0 \in A$,
>
> $$f'(x_0) = \sum k a_k x_0^{k-1},$$
>
> as required.

■

Example 25: If the sum function of the power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ is an odd function, prove that $a_{2n} = 0$ for all n.[2] **(2014.8b)**

SOLUTION: অংকটা মজার। এর জন্য একটা জিনিস লাগবে, সেটা হল এই যে, যদি $f(x)$ একটা এমন odd function হয় যেটাকে অন্ততঃ দুবার differentiate করা যায়, তবে $f''(x)$-ও ফের একটা odd function হবে। প্রমাণটা অতি সহজ। যেহেতু $f(x)$-টা odd function, তাই $f(-x) = -f(x)$. একবার differentiate করলে $-f'(-x) = -f'(x)$, বা $f'(-x) = f'(x)$. আরেকবার differentiate করলে $-f''(-x) = f''(x)$, অর্থাৎ f''-ও একটা odd function. এবার বল তো $f(0)$ কত হবে? যেহেতু $f(-x) = -f(x)$, তাই $x = 0$ বসালেই দেখবে $f(0) = 0$ হবে। এবার অংকটায় হাত দিই--

> Let the sum function be $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, which is assumed to be odd.
>
> So $f(0) = f(-0) = -f(0)$, or $f(0) = 0$.
>
> Hence $a_0 = 0$.
>
> Also f can be differentiated infinitely often, and the even number derivatives are again odd functions.
>
> Now for any $k \in \mathbb{N}$ we have $f^{(k)}(0) = k! a_k$.
>
> So $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = 0$, as required.

■

47.3.1 Uniqueness

এবার যে অংকটা করব সেটা দেখতে ছোট্টো কিন্তু এর গুরুত্ব অনেক। আমরা জানি যে যদি দুটো polynomial সব x-এর

জন্যই সমান হয়--

$$\forall x \quad a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n,$$

তবে coefficient-গুলো আলাদা করে সমান হয়, মানে

$$a_0 = b_0, \quad ..., a_n = b_n$$

হতে বাধ্য। একই কথা কি power series-দের জন্যও বলা যায়? উত্তর হল--হ্যাঁ। এটাই দেখাতে বলেছে নীচের অংকটায়।

Example 26: If two power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ converge in the same interval of convergence to the same function then prove that $a_n = b_n$ for all n.[3] **(2004.3c)**

SOLUTION:

Let $R > 0$ be such that

$$\forall x \in (-R, R) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n = f(x), \text{ say.}$$

Then $f(0) = a_0 = b_0$.

Also, differentiating the two power series term by term

$$\sum_{1}^{\infty} na_nx^{n-1} = \sum_{1}^{\infty} nb_nx^{n-1} = f'(x).$$

Hence $f'(0) = a_1 = b_1$.

In general, for $k \in \mathbb{N}$, differentiating the two power series k times term by term

$$\sum_{k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k} = \sum_{k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)b_nx^{n-k} = f^{(k)}(x).$$

So $f^{(k)}(0) = k!a_k = k!b_k$.

Hence $\forall k \in \mathbb{N} \quad a_k = b_k$, as required.

■

ধরো $f(x)$ একটা function. আমি এটার একটা power series representation বার করলাম--

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots, \quad x \in (-R, R)$$

আবার তুমি হয়তো অন্য কোনো কায়দায় ওই একই $f(x)$-এর power series representation বার করলে

$$f(x) = b_0 + b_1x + \cdots, \quad x \in (-R, R).$$

আমরা দুজনে হয়তো সম্পূর্ণ আলাদা কায়দায় কাজটা করেছি, কিন্তু তাও আমরা জানি যে আসলে দুজনের power series-ই একই হতে বাধ্য। এই কথাটাকেই একটু ঘুরিয়ে বললে হয়--কোনো function-এর power series representation হল unique. নীচের অংকে এর চেয়েও শক্তিশালী একটা কথা বলেছে।

Example 27: Prove that the power series representation of a function of x in a given interval is unique.[3] **(2008.3c)**

SOLUTION: এই অংকটা যেভাবে লিখেছে তাতে একটু ভুল ধারণা জন্মাতে পারে, সে বিষয়ে সাবধান করে দিই। যদি তোমাকে কোনো একটা $f(x)$ আর কোনো একটা interval দিই, তার মানেই কিন্তু এই নয় যে ওই interval-এর উপরে $f(x)$-এর একটা unique power series representation আছে। এমন হতেই পারে যে আদৌ কোনো power series representation নেই। যেটা বলা উচিত ছিল সেটা লিখে শুরু করি--

> Let $\sum a_n(x-c)^n$ and $\sum b_n(x-c)^n$ be two power series that converge and are equal on an interval (p,q). Then we have to show that $\forall n \quad a_n = b_n$.

এইটা প্রমাণ করা সম্ভব কিন্তু তার জন্য অনেক কিছু জানতে হবে যেগুলো এই বইয়ের ধরাছোঁয়ার অনেক বাইরে। কিন্তু একটা বিশেষ ক্ষেত্রে প্রমাণটা খুবই সহজ--যখন $c\in(p,q)$ হবে। আমরা খালি সেই ক্ষেত্রটাই করব।

> We shall prove it only in the special case when $c\in(p,q)$. Let $y = x-c$. Then we have
> $$\forall y \in (p-c, q-c) \quad \sum a_n y^n = \sum b_n y^n.$$

এবার আগের অংকটা করে গেলেই হবে, অর্থাৎ বার বার করে $y=0$-তে differentiate করা। লক্ষ কর যে এইজন্যই $c\in(p,q)$ ধরেছিলাম, যাতে $0\in(p-c,q-c)$ হয়। ■

Exercise 19: দুটো power series দিলাম, $\sum a_n x^n$ আর $\sum b_n x^n$. প্রথমটার radius of convergence হল 2. যদি দেখা যায় যে

$$\forall x \in (-1,1) \quad \sum a_n x^n = \sum b_n x^n,$$

তবে $\sum b_n x^n$-এর radius of convergence কত হবে? ■

DAY 48
Applications to Maclaurin series

একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে power series-এর সঙ্গে আমাদের প্রথম পরিচয় কিন্তু এই বইয়ের দ্বিতীয় খণ্ডেই হয়েছিল, যখন আমরা Maclaurin series শিখেছিলাম। Maclaurin series শেখার স্মৃতিটা অনেক ছাত্রের পক্ষেই খুব সুখকর হয় না। Maclaurin series-এর convergence প্রমাণ করতে গিয়ে এত পরিশ্রম করতে হয়েছিল যে অনেকেই মনে মনে "আর জীবনে Maclaurin-এর মুখদর্শন করব না" শপথ করে বসে। কিন্তু প্রমাণগুলো যতই বিচ্ছিরি হোক, জিনিসটা কিন্তু আসলে বেশ কাজের। $e^x, \sin x, \cos x, \log(1+x)$ এবং $(1+x)^a$ জাতীয় কয়েকটা গুরুত্বপূর্ণ function-কে এর সাহায্যে বেশ

সহজ কিছু power series-এর আকারে লেখা যায়--

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots, \quad x\in\mathbb{R}\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+-+\cdots, \quad x\in\mathbb{R}\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+-+\cdots, \quad x\in\mathbb{R}\\
\log(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-+-+\cdots, \quad x\in(-1,1]\\
(1+x)^a &= \binom{a}{0}+\binom{a}{1}x+\binom{a}{2}x^2+\cdots, \quad x\in(-1,1),
\end{aligned}$$

যেখানে

$$\binom{a}{k}=\frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}.$$

লক্ষ কর যে কোনোটাই কিন্তু কঠিন দেখতে নয়, মনে রাখাও বেশ সহজ। সন্তানজন্মের পরে মা যেমন সদ্যোজাত বাচ্চার মুখ দেখে প্রসববেদনার কথা ভুলে যায়, আমরাও তেমনি প্রমাণের যন্ত্রণা ভুলে গিয়ে এইগুলো ব্যবহার করব।
দ্বিতীয় খণ্ডে আমরা power series নিয়ে কাজ করা শিখি নি, তাই খালি Maclaurin series-গুলো বার করেই ক্ষান্ত দিয়েছিলাম (আর তুমি হয়তো মনে মনে ভেবেছিলে যে খামোখা এত খেটে লাভটা কী হল!) এইবার আমরা দেখব যে এদেরকে term by term differentiate বা integrate করে আরও কতরকম power series বানানো যায়। কিন্তু তাতেই বা লাভটা কী হবে? উত্তর হল-- আমরা এতক্ষণ খালি power series-এর convergence-ই পরীক্ষা করতে শিখেছি, converge করলে limit-টা কী হবে সেটা বার করতে শিখি নি। Limit-টা বার করার সবচেয়ে সহজ কায়দা হল কোনো পরিচিত Maclaurin series-এর সঙ্গে একটা সম্পর্ক খুঁজে পাওয়া।

Example 28: Given that

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad -\infty<x<\infty.$$

With proper justification evaluate

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

[3] **(2004.4c)**
SOLUTION: প্রথমে লক্ষ কর যে limit-টা আসলে $x=0$-তে e^x-এর derivative ছাড়া আর কিছুই নয়। অর্থাৎ তোমাকে এখানে খালি term by term differentiate করতে হবে।

> We know that a power series can be differentiated term by term at any point in the interior of the interval of convergence.
>
> Now $e^0=1$.

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}\\
&= \left.\frac{d}{dx}e^x\right|_{x=0}\\
&= \left.\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\right|_{x=0}
\end{aligned}$$

এইবার আমরা term by term differentiate করব--

$$\begin{aligned}
&= \left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right)\right|_{x=0} \qquad \left[\text{ differentiating term by term at } x=0\in(-\infty,\infty)\right]\\
&= \left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}\right|_{x=0}\\
&= \left.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right|_{x=0}\\
&= \left.\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\right|_{x=0} \qquad \left[\text{ putting } m=n-1\right]\\
&= e^0=1.
\end{aligned}$$

■

এই অংকটা খুবই সহজ ছিল। যেহেতু e^x-কে differentiate করলে আবার e^x-ই হয়, তাই নতুন কোনো power series পাওয়া গেল না। কিন্তু পরের অংকটা বেশী মজার, এখানে একটা নতুন series-এর গল্প আছে।

Example 29: Assuming the expansion

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \qquad \text{for } -1<x\leq 1,$$

prove that

$$\int_0^1\frac{\log_e(1+x)}{x}dx=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots.$$

[4] **(2008.4c)**

SOLUTION: অংকটা দেখেই আন্দাজ করতে পারা উচিত কোন পথে এগোতে হবে। প্রথমে আমরা $\log(1+x)$-এর Maclaurin series-টাকে x দিয়ে ভাগ করে দেব, তারপর term by term integrate করলেই উত্তরটা আসা উচিত। অবশ্যই আসবে। খালি আমাদের সাবধান হতে হবে x দিয়ে ভাগ করা নিয়ে, $x=0$ হলে কী করব? প্রথমে $x\neq 0$ নিয়ে কাজ করি।

Dividing the given power series for $\log_e(1+x)$ by x for $x \in (-1,1]\setminus\{0\}$ we get

$$\frac{\log_e(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots.$$

বাঃ, বেশ একটা নতুন power series পাওয়া গেল। তা বলে যেন ভেবে বোসো না যে, যেকোনো power series-কে x দিয়ে ভাগ করলেই নতুন একটা করে power series পাওয়া যায়। এখানে $\log(1+x)$-এর series-টায় কোনো constant term ছিল না, তাই রক্ষে, নইলে গোড়ায় একটা $\frac{1}{x}$ এসে গেলেই সব মজা মাটি হয়ে যেত!
এবার $x = 0$ হলে কী করা যায় দেখি--

At $x = 0$ the new power series converges to 1. Thus if we take

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log_e(1+x)}{x} & \text{if } x \in (-1,1]\setminus\{0\} \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

then the following power series expansion holds over $(-1,1]$:

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots. \qquad (*)$$

এইবার খালি term by term integration-এর অপেক্ষা।

We know that a power series can be integrated term by term over any closed, bounded interval inside its interval of convergence.

Integrating (*) the given power series term by term over $[0,1]$ we get

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 \frac{\log_e(1+x)}{x}dx \\
&= \int_0^1 \left(\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}\right)dx \\
&= \sum_1^\infty \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}dx \quad \left[\text{term by term integration}\right] \\
&= \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}dx \\
&= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots,
\end{aligned}$$

as required.

■

আগের অংক দুটোতে কোন Maclaurin series ব্যবহার করলে সুবিধা হবে সেটা বলে দিয়েছিল। এবার সেটা আর বলে দেবে না। আমাদের আন্দাজ করতে হবে।

Example 30: The function $f(x)$ is defined by the equality

$$f(x) = 1 + 2 \times 3x + \cdots + n \times 3^{n-1}x^{n-1} + \cdots .$$

Show that $f(x)$ is continuous in the open interval $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Evaluate $\int_0^{1/8} f(x)dx$.[2+2] **(2003.4c)**

SOLUTION: প্রথমে লক্ষ কর যে x-এর সঙ্গে সব সময়ে একটা 3 লেগে আছে। সুতরাং $t = 3x$ বসাই, তাহলে হল

$$1 + 2t + 3t^2 + \cdots .$$

হুম, চেহারাটা দেখেই differentiation-এর কথা মনে পড়ছে। যদি আমরা

$$1 + t + t^2 + t^3 + \cdots$$

নিয়ে শুরু করে term by term differentiate করতাম তবে তো ঠিক এটাই পেতাম। আমরা জানি যে $(1-t)^{-1}$-এর Maclaurin series হল $1 + t + t^2 + \cdots$ যখন $|t| < 1$. এটাকে differentiate করলে হয় $(1-t)^{-2}$.

We know that the Maclaurin series for $(1+t)^a$ is

$$(1+t)^a = \sum_0^\infty \binom{a}{n} t^n \quad |t| < 1.$$

Putting $t = -3x$ we see that

$$(1-3x)^a = \sum_0^\infty \binom{a}{n} (-3x)^n \quad |3x| < 1,$$

Putting $a = -2$, we have, for $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$,

$$(1-3x)^{-2} = \sum_0^\infty \binom{-2}{n} (-3x)^n.$$

Now

$$\binom{-2}{n} = \frac{-2 \times -3 \times \cdots (-2-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(n+1)!}{n!} = (-1)^n (n+1).$$

So, for $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$,

$$(1-3x)^{-2} = \sum_0^\infty (n+1)(3x)^n,$$

which is the given series.

বাকি কাজ সহজ--

We know that every power series is continuous inside its interval of convergence.

So $f(x)$ is continuous over $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, as required.

Also $f(x) = (1-3x)^{-2}$. So

$$\begin{aligned}\int_0^{1/8} f(x)dx &= \int_0^{1/8} (1-3x)^{-2}dx \\ &= -\tfrac{1}{3}\int_1^{5/8} y^{-2}dy \quad \left[\text{putting } y = 1-3x\right] \\ &= \left.\frac{1}{3y}\right|_1^{5/8} = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

কিন্তু যদি সময় মত Maclaurin series-টা তোমার মনে না পড়ত, তবে? তাহলেও অংকটা করা যায়, যদিও উত্তরটা খুব সুন্দরভাবে আসে না। এবার সেটা দেখাই।

বিকল্প পদ্ধতি

Here $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$, where $a_n = (n+1)3^n$.

Since

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{3} \to \frac{1}{3},$$

so the radius of convergence is $\frac{1}{3}$.

We know that every power series is continuous inside its interval of convergence.

So $f(x)$ is continuous over $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, as required.

Also, a power series can be integrated term by term on any closed interval inside its interval of convergence.

Integrating $f(x)$ over $[0, \frac{1}{8}]$ we get

$$\begin{aligned}\int_0^{1/8} f(x)dx &= \int_0^{1/8} \sum_1^\infty n3^{n-1}x^{n-1}dx \\ &= \sum_1^\infty n3^{n-1}\int_0^{1/8} x^{n-1}dx \\ &= \sum_1^\infty 3^{n-1}\left(\tfrac{1}{8}\right)^n \\ &= \tfrac{1}{8}\sum_1^\infty \left(\tfrac{3}{8}\right)^{n-1} = \tfrac{1}{8} \times \frac{1}{1-\frac{3}{8}} = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

■

Example 31: Starting from

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

deduce the power series expansion of $\log_e(1+x)$ and also find the region of validity of the expansion. [4] **(2010.5c)**

SOLUTION:

> We know that a power series can be integrated term by term over any closed bounded interval within the interval of convergence. Also we know that
> $$\log_e(1+x) = \int_0^x (1+t)^{-1} dt.$$
> So for every $x \in (-1,1)$ we have
> $$\log_e(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - + - + \cdots .$$

এবার দেখতে হবে region of validity কী হয়, কোন কোন x-এর জন্য এই power series-টা $\log_e(1+x)$-এ converge করে। আমরা এক্ষুণি $x \in (-1,1)$ লিখলাম বলে ধরে নিও না যে, $(-1,1)$-ই হল উত্তর। আমরা খালি এটুকু দেখেছি যে $(-1,1)$-এর উপরে convergence হয়, তার বাইরেও হয় কিনা সেটা এখনও জানিনা। সেটাই এবার পরীক্ষা করে দেখব। প্রথম কাজ radius of convergence বার করে নেওয়া--

> The series is $\sum_1^\infty a_n x^n$, where $a_n = \frac{-1)^{n+1}}{n}, \quad n \geq 1.$
> So, by ratio test, the radius of convergence is
> $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$
> Hence the power series diverges outside $[-1,1]$.

অতএব এখন খালি $x = -1$ আর $x = 1$-এ পরীক্ষা করে দেখলেই চলবে।

> At $x = -1$, the series is $-\sum_1^\infty \frac{1}{n}$, which diveges (standard result).
>
> At $x = 1$, the series is $-\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, which converges by Leibnitz test, since it is an alternating series with $\frac{1}{n}$ decreasing to 0.

তার মানে দেখা গেল যে convergence-টা হচ্ছে $(-1,1]$-এর উপরে। এবার দেখতে হবে limit-টা সত্যিই $\log_e(1+x)$ হয় কিনা।

> Thus the interval of convergence is $(-1,1]$.
>
> By Abel's theorem, the power series must be left-continuous at $x = 1$.
> Also $\log_e(1+x)$ is continuous at $x = 1$.
> So the power series must converge to $\log_e(1+x)$ for $x \in (-1,1]$.

Hence the required region of validity is $(-1, 1]$.

এখানে একটা মজা হল, দেখলে? $(1+x)^{-1}$-এর power series-টা converge করছিল খালি $(-1,1)$-র উপরে, কিন্তু যেই integrate করলাম অমনি interval of convergence-টা বেড়ে কেমন $(-1,1]$ হয়ে গেল! ■

একই অংক একটু অন্য ভাষায়।

Exercise 20: Using $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdot$, where $|x| < 1$, obtain the power series expansion of $\log_e(1+x)$ together with its region of convergence.[4] **(2013.8c)** ■

Example 32: If the radius of convergence of $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ is 1, find the interval of convergence of

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

[3] **(2011.4c)**

SOLUTION: প্রথম series-টাকে term by term integrate করলে দ্বিতীয় series-টা পাওয়া যায়। কিন্তু এই অংকে সেটার কোনোই প্রয়োজন পড়ে না। দ্বিতীয় series-টা হল $\sum a_n x^n$, যেখানে $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. সুতরাং ratio test লাগালেই দেখবে radius of convergence হল এবার খালি পরীক্ষা করে দেখতে হবে $x = 1$ আর $x = -1$-এ কী হয়। সেটা তোমার জন্য ছেড়ে দিলাম। খালি দুটো জিনিস মনে করিয়ে দিই যেগুলো এই বইয়ের দ্বিতীয় খণ্ডে শিখেছিলে--এক, $\sum \frac{1}{n} = \infty$, আর দুই, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge করে (প্রমাণ করা যায় Leibnitz test দিয়ে)। ■

আচ্ছা, $\frac{1}{1+x^2}$-কে integrate করলে যে $\tan^{-1} x$ পাওয়া যায়, সেটা নিশ্চয়ই ভুলে যাও নি। একইভাবে $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$-কে integrate করলে আসে $\sin^{-1} x$. এই দুটো জিনিস যদি মনে থাকে তবে নীচের অংকদুটো অনায়াসে পারবে।

Exercise 21: Starting from the power series $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, prove that

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad 0 < x < 1.$$

[3] **(2012.4c)** ■

Exercise 22: Assuming the power series expansion for $(1-x^2)^{-1/2}$ as

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^4 + \cdots, \quad |x| < 1,$$

obtain the power series for $\sin^{-1} x$ in $(-1,1)$.[4] **(2009.4b)** ■

এবার যে অংকটা করব সেটাতে বেশ কিছুটা প্যাঁচ আছে।

Example 33: Show that

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad -1 \le x \le 1.$$

Hence show that

$$\frac{1}{2}\left(\tan^{-1} x\right)^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{x^6}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \cdots, \quad -1 \le x \le 1.$$

[4+3] **(2005.4b)**

SOLUTION:

First part: From Maclaurin series of $(1+x)^{-1}$ we have

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 - + - + \cdots \text{ for } |x| < 1.$$

Putting x^2 in place of x we have

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 - + - + \cdots \text{ for } |x| < 1.$$

Integrating term by term over $[0,x]$ or $[x,0]$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \text{ for } |x| < 1.$$

We notice that at $x=-1$ the series converges by Leibnitz's test. Let the sum be A.
Then, by Abel's theorem,

$$A = \lim_{x\to -1+} \tan^{-1} x = \tan^{-1}(-1),$$

since $\tan^{-1} x$ is continuous at $x=-1$.
Similarly, at $x=1$ the series converges by Leibnitz's test. Let the sum be B.
Then, by Abel's theorem,

$$B = \lim_{x\to 1-} \tan^{-1} x = \tan^{-1} 1,$$

since $\tan^{-1} x$ is continuous at $x=1$.
So we have

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \text{ for } -1 \le x \le 1,$$

as required.
<u>Second part:</u> Now putting $t = \tan^{-1} x$ we get

$$t = \tan t - \frac{\tan^3 t}{3} + - \cdots \text{ for } -\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}.$$

এবার যে কোনো একটা $y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ নাও। এবার integrate করব 0 থেকে y-এর পর্যন্ত। Integrate করলে বাঁদিকটা হয়ে যাবে $\frac{y^2}{2}$. আর ডানদিকে কিছু বিচ্ছিরি বিচ্ছিরি জিনিস আসবে। বিচ্ছিরি জিনিসগুলো হল $\int \tan t dt, \int \tan^3 t dt, \int \tan^5 t dt$, ইত্যাদি। এই জিনিসগুলোকে সম্পূর্ণ কষে ফেলা সহজ নয়, তাই একটা কৌশল করব। প্রথমে একটা নাম দিয়ে নিই--

Let $I_n = \int_0^y \tan^n t dt$.
Then integrating term-by-term,

$$\frac{y^2}{2} = \frac{I_1}{1} - \frac{I_3}{3} + - + - \cdots. \qquad (*)$$

এবার ভালো করে বুঝে নাও কী করতে চলেছি। আমাদের দেখাতে হবে এই series-টা--

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{x^6}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \cdots,$$

আর আমরা দেখিয়েছি (*)। এদের দুজনেরই partial sum-দের আমরা দুটো নাম দিয়ে নিই--

Let $S_n = \underbrace{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{x^6}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \cdots}_{n \text{ terms}}$,
and
$T_n = \underbrace{\frac{I_1}{1} - \frac{I_3}{3} + - + - \cdots}_{n \text{ terms}}$.

আমরা (*)-এ দেখিয়েছি যে $T_n \to \frac{1}{2}y^2$. আমাদের দেখাতে হবে $S_n \to \frac{1}{2}y^2$. সুতরাং যদি S_n আর T_n-দের পার্থক্যটা $\to 0$ দেখাতে পারি তবেই কেল্লা ফতে! এই পার্থক্যটাকে সুন্দরভাবে লেখা সম্ভব। এর জন্য I_n-দের মধ্যে একটা সম্পর্ক বার করে রাখলে সুবিধা হবে।

For $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^y \tan^n t dt \\ &= \int_0^y \tan^{n-2} t(\sec^2 t - 1)dt \\ &= \int_0^y \tan^{n-2} t \sec^2 t dt - \int_0^y \tan^{n-2} t dt \\ &= \int_{t=0}^y \tan^{n-2} t d(\tan t) - I_{n-2} \\ &= \frac{\tan^{n-1} y}{n-1} - I_{n-2}. \end{aligned}$$

So

$$I_{n-2} = \frac{\tan^{n-1} y}{n-1} - I_n = \frac{x^{n-1}}{n-1} - I_n.$$

এবার S_n আর T_n-দের মধ্যে পার্থক্যটাকে ধাপে ধাপে লেখা যাক--

$$T_2 = \frac{I_1}{1} - \frac{I_3}{3} = \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - I_3\right)}_{I_1} - \frac{I_3}{3} = \frac{x^2}{2} - \left(1 + \frac{1}{3}\right) I_3 = S_1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right) I_3.$$

Similarly, writing I_3 in terms of I_5, we get

$$T_3 = S_2 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) I_5.$$

In general,

$$T_n = S_{n-1} + \underbrace{(-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) I_{2n-1}}_{R_n, \text{ say}}.$$

এবার দেখাব যে $R_n \to 0$. এর জন্য ফের আরেকটা কৌশল--

$$\begin{aligned} |I_{2n-1}| &= \left|\int_0^y \tan^{2n-1} t dt\right| \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{2n-1} t dt \quad [\because y \in [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}]] \\ &= \int_0^1 \frac{u^{2n-1} du}{1+u^2} \quad \left[\text{putting } u = \tan t\right] \\ &\leq \int_0^1 u^{2n-1} du \quad [\because 1 + u^2 \geq 1] \\ &= \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Thus $|R_n| \le \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)/(2n) \to 0.$

⟦ Because:

If $a_n \to 0$ then $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \to 0.$

⟧

Hence $\lim S_n = \lim T_n = \frac{1}{2}y^2, ie,$

$$\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}x\right)^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{x^6}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \cdots, \quad -1 \le x \le 1,$$

as required.

■

DAY 49
Uniform convergence-এর প্রমাণ

আজকে আমরা প্রমাণ করব যে, interval of convergence-এর যে কোনো compact subset-এর উপর একটা power series অবশ্যই uniformly converge করে। একবার মনে করিয়ে দিই যে $\mathbb{R}$-এর compact subset মানে closed, bounded subset. এইটা আমরা ধাপে ধাপে প্রমাণ করব। সবচেয়ে সহজ কেসটা হল যখন compact subset-টা পুরোটাই interval of convergence-এর interior-এ থাকে। যেমন interval of convergence যদি $(-1,1]$ হয় তবে $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]$ হল একটা উদাহরণ। কিন্তু $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ যদিও interval of convergence-এর একটা subset, কিন্তু এর মধ্যে একটা প্রান্তবিন্দু 1 ঢুকে আছে, তাই interior-এ নেই।
আমরা প্রথমে interior-এর compact subset-দের নিয়ে কাজ করব। পরে $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ জাতীয় কেসগুলো দেখব।

Example 34: Let the power series $\sum a_n x^n$ have radius of convergence $R>0$ (may be ∞). Let r be any number with $0<r<R$. Then the power series converges uniformly over $[-r,r]$.
SOLUTION: এটা অনায়াসে Weierstrass's M-test দিয়ে হয়ে যাবে।

$\forall x \in [-r,r] \quad |a_n x^n| \le |a_n r^n| = M_n > 0,$ say.
$\because r \in (-R,R)$
$\therefore$ the power series converges absolutely at $x=r$.
Thus $\sum M_n < \infty$.
Hence by Weierstrass's M-test, the power series converges uniformly over $[-r,r]$, as required.

■

Example 35: ধরো $\sum x^n$ নিলাম। এর interval of convergence হল $(-1,1)$. আগের অংকটা ব্যবহার করে বল

তো নীচের কোন কোন set-এর উপরে এটা uniformly converge করবে?

(1) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ **(2)** $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ **(3)** $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ **(4)** $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ **(5)** $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ **(6)** $\left[-\frac{1}{3}, 0\right] \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

SOLUTION: যেহেতু $R = 1$, আর $\frac{1}{3} < R$, সুতরাং আগের অংকটা বলছে যে, $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$-এর উপর তো uniformly converge করবেই। দুই, তিন আর ছয় নম্বর অংকের জন্য লক্ষ কর যে, একইভাবে $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$-এর উপরেও uniform convergence হবে। কোনো set-এর উপর যদি uniform convergence হয়, তবে তার সব subset-এর উপরেও uniform convergence হবে। সুতরাং দুই, তিন আর ছয়ের ক্ষেত্রেও uniform convergence হবে। চার নম্বরটা তো interval of convergence-এর বাইরে বেরিয়ে গেছে, সুতরাং 1-এ uniform convergence তো দূরের কথা pointwise convergence পর্যন্ত হবে না! পাঁচ নম্বর অবশ্য interval of convergence-এর মধ্যেই আছে, কিন্তু তাও uniform convergence হবে না। কেন? ■

এই অংকটা করেই বুঝতে পারলে যে, বহু non-compact subset-এর বেলাতেও uniform convergence হয়ে থাকে। প্রমাণ করার জন্য দেখাতে হয় ওরা কোনো আরও বড় compact subset-এর ভিতরে আছে।

Exercise 23: True of false: If a power series has radius of convergence $R > 0$, then it must converge uniformly over $[-R, R]$. ■

Exercise 24: True of false: If a power series has radius of convergence $R > 0$, then it must converge uniformly over $(-R, R)$. ■

ধরো তোমাকে কিছু সংখ্যা দিলাম $A_1, ..., A_p$, এরা positive, negative বা শূন্য যা খুশী হতে পারে। খালি বলে দিলাম যে

$$|A_1 + \cdots + A_p| \leq 100.$$

এবার ধরো এদেরকে বিভিন্ন nonnegative সংখ্যা $b_1, ..., b_p$ দিয়ে গুণ করলাম, যেখানে b_i-রা সবাই ≤ 1. তবেও নিশ্চয়ই

$$|A_1 b_1 + \cdots + A_p b_p| \leq 100$$

হবে? ঠিক?

না, ভুল!!! যেমন ধরো যদি তিনটে সংখ্যা দিতাম

$$A_1 = 238, \quad A_2 = -80, \quad A_3 = -60,$$

তবে $|A_1 + A_2 + A_3| = 98 \leq 100$. এবার যদি $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{10}$ আর $b_3 = \frac{1}{6}$ নিই, তাহলে

$$|A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3| = |119 - 8 - 10| = 101 > 100.$$

এখানে সমস্যা হল কারণ A_1-টা ছিল ভীষণ বড়, A_2 আর A_3 ওকে টেনে নামিয়ে রেখেছিল বলেই $|A_1 + A_2 + A_3|$-টা ≤ 100 ছিল। আমরা যখন A_k-গুলোকে b_k দিয়ে গুণ করছিলাম, তখন আমরা A_1-কে খালি অর্ধেক করেছিলাম, কিন্তু A_2, A_3-কে অনেকটা করে কমিয়ে দিয়েছিলাম, ফলে গুণ করার পর A_2, A_3 এত ছোটো হয়ে গেছে যে দুজনে মিলেও আর A_1-কে সামাল দিতে পারে নি। Abel নামের একজন গণিতজ্ঞ একটা শর্ত বার করেছিলেন, যাতে এমন ব্যাপার না হতে পারে--যাতে কোনো A_k যেন বেয়াড়ারকমের বড় হয়ে না যায়, এবং b_k-গুলোও যেন পক্ষপাতশূন্য হয় (মানে রুই-কাৎলাদের অল্প কমিয়ে চুনোপুঁটিদের বেশী না কমায়)। একে বলে Abel's lemma.

Abel's lemma

Let $A_1, ..., A_p$ be some numbers such that

$$|A_1|, \quad |A_1 + A_2|, ..., |A_1 + \cdots + A_p|$$

are all $\leq M$, for some $M > 0$. Let $b_1, ..., b_p$ be some numbers such that

$$1 \geq b_1 \geq \cdots \geq b_p \geq 0.$$

Then

$$|A_1 b_1 + \cdots + A_n b_p| \leq M.$$

Proof: শর্তগুলো ভালো করে লক্ষ কর। এবার খালি $|A_1 + \cdots + A_p| \leq M$ নিয়েই ক্ষান্ত হইনি, $|A_1|, \quad |A_1 + A_2|, ...$ ইত্যাদিকেও $\leq M$ নিয়েছি, যাতে কোনো A_k কোথাও বেশী মাথাচাড়া দিয়ে উঠতে না পারে। আরও ধরেছি যে $b_1 \geq b_2 \cdots \geq b_p$, যাতে b_k-গুলো পক্ষপাতশূন্য থাকে।

Let

$$\begin{aligned} S_1 &= A_1 \\ S_2 &= A_1 + A_2 \\ &\vdots \\ S_p &= A_1 + \cdots + A_p. \end{aligned}$$

Then $A_1 = S_1$ and $A_k = S_k - S_{k-1}$ for $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_1^p A_k b_k &= S_1 b_1 + (S_2 - S_1) b_2 + \cdots + (S_p - S_{p-1}) b_p \\ &= S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \cdots + S_{p-1}(b_{p-1} - b_p) + S_n b_p. \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} \therefore \left| \sum_1^p A_k b_k \right| &\leq |S_1(b_1 - b_2)| + |S_2(b_2 - b_3)| + \cdots + |S_{p-1}(b_{p-1} - b_p)| + |S_n b_p| \\ &= |S_1|(b_1 - b_2) + |S_2|(b_2 - b_3) + \cdots + |S_{p-1}|(b_{p-1} - b_p) + |S_p| b_p \\ &\qquad [\because b_1 \geq \cdots \geq b_p \geq 0] \\ &\leq M\big[(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{p-1} - b_p) + b_p\big] \\ &= M b_1 \leq M, \quad [\because 0 \leq b_1 \leq 1] \end{aligned}$$

as required.

[Q.E.D]

Example 36: If a power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converges at the end point $x = R'$ of the interval of convergence $(-R', R')$, prove that the series is uniformly convergent in $[0, R']$.[4] **(2007.3b)**

SOLUTION:

Given $\sum a_n (R')^n$ is convergent,

to show $\sum a_n x^n$ converges uniformly on $[0, R']$,

ie, $\sum a_n x^n$ is uniformly Cauchy on $[0, R']$,

ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \geq N \quad \forall x \in [0, R'] \quad |\textstyle\sum_{m+1}^{n} a_k x^k| < \epsilon.$$

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার একটা যুৎসই $N \in \mathbb{N}$ পেতে হবে। এর জন্য Abel's lemma-টা কাজে লাগবে। আমরা জানি যে $\sum a_n (R')^n$-টা converge করে। সুতরাং Cauchy criterion লাগিয়ে এমন $N \in \mathbb{N}$ পেতেই পারি যাতে $n > m \geq N$ হলেই $\left|\sum_{m+1}^{n} a_k (R')^k\right|$-কে ছোটো রাখা যায়। এবার দেখা যাক এই দুটো sum-এর মধ্যে কোনো সম্পর্ক বার করা যায় কিনা--

$$\sum_{m+1}^{n} a_k (R')^k \text{ আর } \sum_{m+1}^{n} a_k x^k.$$

লক্ষ কর যে

$$a_k x^k = \underbrace{a_k (R')^k}_{A_k} \times \underbrace{\left(\frac{x}{R'}\right)^k}_{b_k}.$$

একটু চিন্তা করলেই দেখবে যে A_k আর b_k-গুলো Abel's lemma-র শর্তগুলো সব পালন করে, কারণ $0 \leq \frac{x}{R'} \leq 1$. সুতরাং $\left|\sum_{m+1}^{n} a_k (R')^k\right|$-কে যথেষ্ট ছোটো করতে পারলেই $\left|\sum_{m+1}^{n} a_k x^k\right|$-ও যথেষ্ট ছোটো হবে। এই কথাটা ভালো করে বুঝে দ্যাখো।

সুতরাং এইভাবে $N \in \mathbb{N}$ নিলেই হবে--

$\because \sum a_n (R')^n$ converges,

$\therefore$ By Cauchy criterion,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N \quad \left|\sum_{m+1}^{n} a_k (R')^k\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

$\exists N$ Choose this N.

এর পরের কাজ সোজা--

Take any $n \geq m \geq N$.

Take any $x \in [0, R']$.

Let $b_k = \left(\frac{x}{R'}\right)^k$ for $k = m+1, ..., n$. Then $1 \geq b_{m+1} \geq \cdots \geq b_n \geq 0$.

Also let $A_k = a_k(R')^k$ for $k = m+1, ..., n$. Then

$$\sum_{m+1}^{n} a_k x^k = \sum_{m+1}^{n} A_k b_k.$$

এবার Abel's lemma লাগাব। কিন্তু যেহেতু Abel's lemma খুব বিখ্যাত কোনো জিনিস নয়, তাই আমরা Abel's lemma-র প্রমাণটা সরাসরি এখানে লিখে দেব।

Let $T_{m+k} = A_{m+1} + \cdots + A_{m+k}$.
Then $A_{m+1} = T_{m+1}$ and $A_{m+k} = T_{m+k} - T_{m+k-1}$ for $k \geq 2$.
Also $\forall k = m+1, ..., n \quad |T_k| < \frac{\epsilon}{2}$.
Now

$$\begin{aligned}\sum_{m+1}^{n} A_k b_k &= T_{m+1}b_{m+1} + (T_{m+2} - T_{m+1})b_{m+2} + \cdots + (T_n - T_{n-1})b_n \\ &= T_{m+1}(b_{m+1} - b_{m+2}) + T_{m+2}(b_{m+2} - b_{m+3}) + \cdots \\ &\quad + T_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + T_n b_n.\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{m+1}^{n} A_k b_k\right| \\ \leq\ & |T_{m+1}(b_{m+1} - b_{m+2})| + |T_{m+2}(b_{m+2} - b_{m+3})| + \cdots + |T_{n-1}(b_{n-1} - b_n)| + |T_n b_n| \\ =\ & |T_{m+1}|(b_{m+1} - b_{m+2}) + |T_{m+2}|(b_{m+2} - b_{m+3}) + \cdots + |T_{n-1}|(b_{n-1} - b_n) + |T_n|b_n \\ & \qquad [\because b_{m+1} \geq \cdots \geq b_n \geq 0] \\ \leq\ & \frac{\epsilon}{2}\left[(b_{m+1} - b_{m+2}) + (b_{m+2} - b_{m+3}) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + b_n\right] \\ =\ & \frac{\epsilon}{2} b_{m+1} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,\end{aligned}$$

as required.

■

Example 37: If a power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converges at $x = r$, where $r > 0$ is the radius of convergence of the power series, then prove that the power series converges uniformly on $[0, r]$.[4] **(2011.4b)**
SOLUTION: আগের অংকটাই। ■

একই যুক্তি কাজে লাগিয়ে এই theorem-টাকেও প্রমাণ করা যাবে--

THEOREM

A power series converges uniformly on any compact subset of its interval of convergence.

এর প্রমাণটা পুরো করে দেব না, কারণ আসল জিনিসটা আগের অংকের সমাধানেই বলা হয়ে গেছে। খালি বলি সেই কায়দাতেই কী করে এই theorem-টাকেও কাত করা যাবে। প্রথমে এই অংকটা কর।

Example 38: If a power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converges at some point $x = R' > 0$, prove that the series is uniformly convergent in $[0, R']$.

SOLUTION: এটা একেবারেই আগের অংকটা, খালি এখানে R'-কে interval of convergence-এর একপ্রান্তে থাকার দরকার নেই। ভালো করে আগের অংকের সমাধানটা পড়ে দ্যাখো, দেখবে যে ওই সমাধান এখানেও হুবহু খাটবে। ■

একই যুক্তি প্রযোজ্য নীচের অংকটাতেও।

Exercise 25: If a power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converges at some point $x = -R' < 0$, prove that the series is uniformly convergent in $[-R', 0]$. ■

Exercise 26: উপরের দুটো অংক ব্যবহার করে এবার theorem-টা প্রমাণ কর দেখি। ■

Example 39: If $r > 0$ is the radius of convergence of $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, prove that this power series is uniformly convergent on $[a, b] \subseteq (-r, r)$. When will the series be uniformly convergent on $[-r, r]$?[3+1] **(2014.8a)**

SOLUTION: প্রথম অংশের আলোচনা তো হয়েইছে। এবার দ্বিতীয় অংশ।

> Second part: The series wil be uniformly convergent on $[-r, r]$ if and only if it is convrgent at both r and $-r$.

যদিও প্রমাণ চায় নি, তাও অতি সংক্ষেপে কারণটা বলে দেওয়া যায়--

> ⟦ Because:
> Only if: If uniform convergence on $[-r, r]$ then must have pointwise convergence on $-r, r$.
> If: If convergence at $-r, r$, then interval of convergence is $[-r, r]$. So $[-r, r]$ is a compact subset of the interval of convergence, and hence we have uniform convergence.
> ⟧

■

Answers

1. $|x| < 1$. **2.** Oscillate. **4.** $(1, 3)$. **5.** দুটো, $x = \pm R$. **6.** $-1, 2$. **7.** $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **8.** $3 \leq R \leq 5$. **9.** Ratio test লাগালে পাবে $R = 1$. **10.** নাও হতে পারে, যেমন $a_n = \frac{1}{n}$ নিলে। **11.** **(1)** 0, **(2)** 5,

(3) 1, **(4)** 1, **(5)** 1, **(6)** $\frac{1}{5}$, **(7)** 10, **(8)** 3, **(9)** $\frac{5}{3}$, **(10)** $\frac{2}{e}$, **(11)** ∞, **(12)** 2, **(13)** $\frac{1}{2}$, **(14)** 1, **(15)** 1, **(16)** $\frac{1}{e}$.

12. $n^{1/n} \to 1$ ব্যবহার কর, root test লাগাও। **13.** 1. **14.** **(1)** $(1,3)$, **(2)** $[-3,-1)$, **(3)** $[-1,1]$. **15.** $\sum \frac{(-1)^n(x-8)^n}{n3^n}$. **16.** না। **17.** ঠিক। **19.** 2. **21.** $(1+t)^{-1}$-এর Maclaurin series-টা লেখো, $t = x^2$ বসালে $(1+x^2)^{-1}$-এর Maclaurin series-টা বেরোবে। এবার term by term integrate কর।
22. $(1-x^2)^{-1/2}$-এর Maclaurin series-টাকে term by term integrate কর। **23.** False. **24.** False, x^n-এর কথা ভাবো।

Chapter VIII
Bounded variation

DAY 50
Bounded variation

50.1 ছবি দিয়ে বোঝা

Fig 1-এ একটা function $f(x)$-এর গ্রাফ রয়েছে। মনে করো একটা লোক x-axis বরাবর a থেকে b পর্যন্ত হেঁটে যাচ্ছে। একটা বাঁদর সেই তালে তালে y-axis বরাবর ওঠানামা করছে, এমনভাবে যাতে লোকটা যদি x-এ থাকে তবে বাঁদরটা থাকবে $f(x)$-এ। প্রশ্ন হল লোকটা যতক্ষণে a থেকে b-তে পৌঁছবে ততক্ষণে বাঁদরটা মোট কত দূরত্ব ওঠানামা করবে? ছবি দেখে উত্তরটা বোঝা কঠিন নয়--প্রথমে বাঁদরটা p থেকে q অব্ধি উঠবে, এবং তারপর q থেকে r অব্ধি নামবে, তার মানে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে

$$\underbrace{q-p}_{\text{ওঠা}}+\underbrace{q-r}_{\text{নামা}}=2q-p-r.$$

এই মোট দূরত্বটার একটা নাম আছে, একে বলে $[a,b]$-র উপর f-এর total variation. লেখার সময়ে লিখি $V_a^b(f)$. লক্ষ কর যে এখানে আমরা খালি দূরত্ব নিয়ে মাথা ঘামাচ্ছি, তাই ওঠা আর নামা দুটোর দূরত্বই যোগ করে দিয়েছি, উঠলে যোগ, নামলে বিয়োগ এরকম নয়।

Example 1: আরেকটা উদাহরণ দেখি, এবার আমরা কাজ করব $\sin x$ নিয়ে, গ্রাফটা আছে Fig 2-তে। এখানেও মনে মনে x-axis বরাবর মানুষ আর y-axis বরাবর বাঁদর কল্পনা করে নাও। মানুষটা যখন 0 থেকে 2π যাবে, তখন বাঁদরটা মোট কত দূরত্ব ওঠানামা করবে? যদি $\sin x$ না নিয়ে Fig 3-এর মত $\sin 2x$ নিতাম তবে?

SOLUTION: $\sin x$-এর বেলায় উত্তর হল 4 (ওঠা 1, নামা 2, ওঠা 1.) আর $\sin 2x$-এর বেলায় $8=1+2+2+2+1$. ■

Fig 1

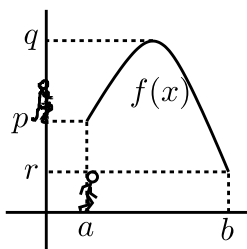



Fig 2

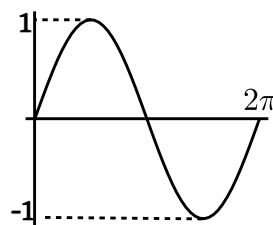



Fig 3

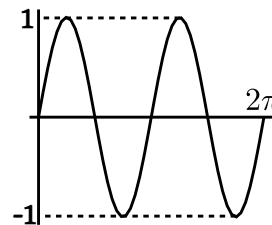
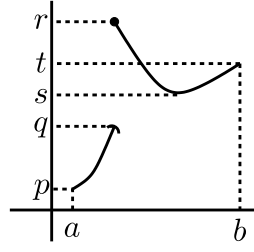



Fig 4

বুঝতেই পারছ যে গ্রাফটা যত বেশী ওঠানামা করবে উত্তরটা ততই বাড়বে। যেহেতু এই সংখ্যাটা দেখে গ্রাফটার মোট লাফালাফির পরিমাণ বোঝা যায়, তাই একে বলে total variation. আমরা অংকের ভাষায় এর সংজ্ঞা শীঘ্রই লিখব, কিন্তু তার আগে আরেকটা উদাহরণ দেখে নিই যেখানে function-টা continuous নয়।

Example 2: Fig 4-তে যে function-এর গ্রাফটা রয়েছে সেটা continuous নয়। এখানে $V_a^b(f)$ কত হবে?

SOLUTION: এখানে লোকটা যাচ্ছে a থেকে b-তে। কিন্তু বাঁদরটার একটু সমস্যা হয়েছে। ও p থেকে q পর্যন্ত এসে discontinuity-টাতে আটকে যাবে। তারপর কী করবে? উত্তর হল-- বাঁদর তো, লাফ মারবে! একলাফে q থেকে r-এ যাবে, এবং সেখান থেকে s-এ নেমে আসবে, তারপর আবার বেয়ে বেয়ে t-তে হাজির হবে। সুতরাং

$$V_a^b(f) = \underbrace{q-p}_{\text{বেয়ে ওঠা}} + \underbrace{r-q}_{\text{লাফিয়ে ওঠা}} + \underbrace{r-s}_{\text{বেয়ে নামা}} + \underbrace{t-s}_{\text{বেয়ে ওঠা}}.$$

লক্ষ কর যে লাফিয়েই যাক আর বেয়েবেয়েই যাক, দুটোই আমরা অতিক্রান্ত দূরত্বের মধ্যে ধরছি। ■

এবার কয়েকটা উদাহরণ দেখব যেখানে প্রতিক্ষেত্রে কিছু একটা সমস্যা আছে।

Example 3: মনে কর আমাদের function-টা Fig 5-এর মত, একটা infinite discontinuity আছে। এখানে $V_a^b(f)$ কত হবে?

SOLUTION: এবার লোকটা যতই a থেকে b-র দিকে এগোবে, বাঁদরটা ততই উপরে উঠবে। উঠতেই থাকবে, উঠতেই থাকবে, ওঠা কখনোই শেষ হবে না, তাই মোট দূরত্বও আর কোনোদিন বার করা হয়ে উঠবে না। এখানে আমরা বলব $V_a^b(f) = \infty$. ■

আরেকটা সমস্যার উদাহরণ দেখি।

Example 4: যদি

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

হয়, তবে $V_0^1(f)$ কত হবে?

SOLUTION: এই বইয়ের আগের খণ্ডগুলোতে $f(x)$-এর গ্রাফটা কয়েকবার আঁকতে হয়েছিল, তাই Fig 6-টা অপরিচিত হবার কথা নয়। লক্ষ কর এখানে গ্রাফটা ক্রমাগত উঠছে আর নামছে। যতই 0-র কাছে যাচ্ছে ততই ওঠানামাটা ঘন থেকে ঘনতর হচ্ছে। তাই বাঁদরের যাত্রা আর কোনো দিনই শেষ হবে না। ফলে $V_0^1(f) = \infty$ হবে। ■

আগেই বলেছি যে $V_a^b(f)$ কিসের জন্য ব্যবহার হয়--$[a,b]$-র উপরে $f(x)$ মোট কতটা লাফালাফি করছে সেটা মাপার জন্য। যদি $V_a^b(f) = \infty$ হয় তার মানে $[a,b]$-র উপরে $f(x)$-টা বেয়াড়ারকমের বেশী লাফালাফি জুড়ে দিয়েছে--হয়

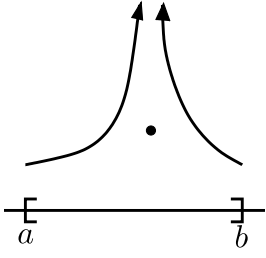
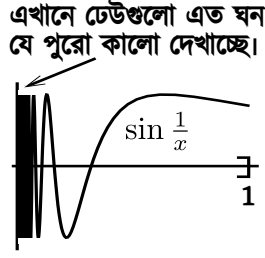
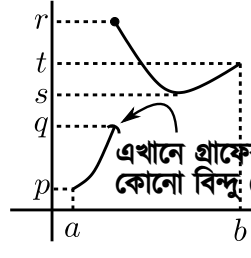
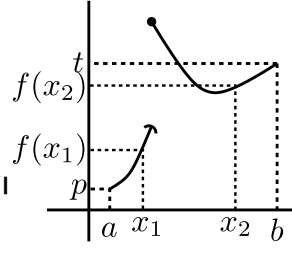



Fig 5 **Fig 6** **Fig 7** **Fig 8**

লাফিয়ে লাফিয়ে ∞ বা $-\infty$-র দিকে রওনা দিয়েছে, বা ক্রমাগত উপরনীচ করে চলেছে, মোটেই থামবার কোনো লক্ষণ দেখাচ্ছে না। যারা এরকম বেয়াড়ারকমের লাফালাফি করে না, তাদের বলে functions of bounded variation, মানে যদি $V_a^b(f) < \infty$ হয় তবে বলব f is a function of bounded variation on $[a, b]$.

50.2 অংকের ভাষায়

এতক্ষণ আমরা পুরো ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বুঝলাম। এবার সবটা অংকের ভাষায় প্রকাশ করব। বাঁদরের গল্পটাকে সরাসরি অংকের ভাষায় লিখে দেওয়ার একটা ছোট্টো সমস্যা আছে। সেটা বোঝার জন্য Fig 7 দ্যাখো। এই উদাহরণটা আমরা একটু আগেই করেছি। তখন বলেছিলাম যে বাঁদরটা p থেকে q, তারপর q থেকে লাফ মেরে r, ইত্যাদি পথে যায়। কিন্তু ঠিক q উচ্চতায় তো গ্রাফটার কোনো বিন্দু নেই, তবে বাঁদরটা সেখানে যায় কী করে, আর সেখান থেকে লাফই বা মারল কী করে? ও অবশ্যই q-এর খুব কাছে গিয়ে লাফ মারতে পারে, যত খুশী কাছে। সুতরাং আন্দাজ করতে পারছ যে এখানে একটা limit-এর গন্ধ পাওয়া যাচ্ছে। একটা discontinuity-তেই এই ঝকমারি, যদি function-টা আরও গোলমেলে হয় তবে তো বাঁদরের হদিশ রাখতে গিয়ে মাথাখারাপ হবার জোগাড় হবে!

সেই কারণে আমরা একটু ঘুরপথে এগোব। মূল ধারণাটা একই থাকবে, কিন্তু অংকের ভাষাটাকে সহজ রাখব।

লোকটাকে আমরা টানা এগোতে দেব না। খালি কয়েকবার মাত্র পা ফেলতে দেব। Fig 8 দ্যাখো। ধরো লোকটা a থেকে লাফিয়ে x_1-এ, এবং সেখান থেকে লাফিয়ে x_2, এবং সেখান থেকে আরেক লাফে b-তে গেল। তাহলে বাঁদরটা $f(a)$ থেকে একলাফে $f(x_1)$, সেখান থেকে আরেক লাফে $f(x_2)$, এইভাবে যাবে। সুতরাং মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব এইবার হবে

$$|f(a) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(b)|.$$

লক্ষ কর যে এখানে আমরা যেহেতু finite-সংখ্যকবার পা ফেলছি, তাই কোনো limit-এর প্রশ্ন উঠছে না। বুঝতেই পারছ যে কতবার এবং কোথায় কোথায় পা ফেলছি তার উপর নির্ভর করে এই দূরত্বটা বদলে যেতে পারে। এই দূরত্বটাকে আমরা বলব variation, যার সংজ্ঞাটা এইরকম--

DEFINITION: **Variation**

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be any function. Let P be a partition

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Then the variation of f over P is defined as

$$T(P, f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

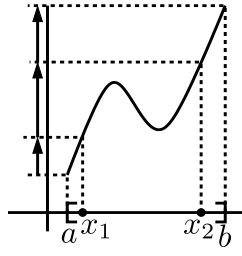



Fig 9

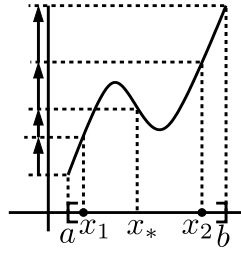



Fig 10

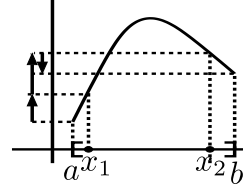



Fig 11

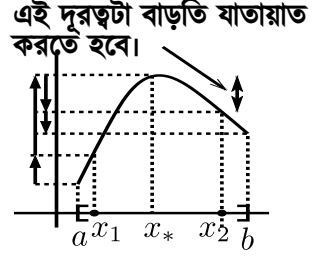



Fig 12

এবার একটা গুরুত্বপূর্ণ জিনিস করব। তার জন্য মনে কর কোনো একটা partition নিয়েছি

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b,$$

অর্থাৎ খালি এইসব point-এই পা ফেলছি। এবার ধরো এর সঙ্গে আরো একটা point জুড়ে দিলাম, x_*, মনে করো সেটা রয়েছে x_1 আর x_2-র মাঝখানে কোথাও। এর ফলে একটা একটা নতুন partition পেলাম P'. বলতে পারো কোনটা বড় হবে, $T(P,f)$ না কি $T(P',f)$?

একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে $T(P',f) \geq T(P,f)$ হতে বাধ্য। কারণ যদি $f(x_*)$-টা $f(x_1)$ থেকে $f(x_2)$ যাবার পথেই পড়ে, তবে বাঁদরটাকে বাড়তি দূরত্ব যেতে হবে না, খালি যাবার সময়ে $f(x_*)$-এ একবার দাঁড়ালেই হবে। Fig 9 আর Fig 10 দেখলেই বুঝবে। এক্ষেত্রে $T(P',f) = T(P,f)$ হবে। কিন্তু যদি ব্যাপারটা হয় Fig 11 আর Fig 12-এর মত, তবে $f(x_*)$ আর $f(x_1)$ থেকে $f(x_2)$ যাবার পথে নেই, তাই বাঁদরটাকে $f(x_*)$ গিয়ে আবার ফিরে আসতে হবে, ফলে বেশী দূরত্ব অতিক্রম করতে হবে। এক্ষেত্রে হবে $T(P',f) > T(P,f)$.

তার মানে যতই নতুন নতুন point যোগ করে তুমি partition-টাকে সূক্ষ্ম থেকে সূক্ষ্মতর করবে ততই variation-এর পরিমাণ বাড়বে, অন্ততঃ কমবে না। এদিকে partition-টা যতই সূক্ষ্ম হবে ততই আমরা total variation-এর দিকে এগিয়ে যাব। সুতরাং যদি যাবতীয় partition P-এর জন্যই আমরা $T(P,f)$ বার করি তবে তাদের sup নিলেই $V_a^b(f)$ পাব। অবশ্যই sup নিতে হলে দুটো জিনিস হতে হবে--এক, যাবতীয় $T(P,f)$-এর set-টা nonempty হতে হবে, আর দুই, set-টাকে bounded above হতে হবে। এদের মধ্যে প্রথম শর্তটা এক্ষেত্রে এমনিই হবে, অন্ততঃ একটা partition তো আছেই--$\{a,b\}$ স্বয়ং। দ্বিতীয় শর্তটা অবশ্য পালিত নাও হতে পারে, যেমন যদি function-টা unbounded হয় বা $\sin\frac{1}{x}$-এর মত ভীষণ লাফালাফি জুড়ে দেয়।

Example 5: When is a function $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ said to be of bounded variation on $[a,b]$?[2]

(2010.7ap1,2006.7a)

SOLUTION:

> DEFINITION: **Bounded variation**
>
> Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be any function. We call f a function of <u>bounded variation</u> over $[a,b]$ if the set
>
> $$\{T(P,f) \ : \ P\in\mathbb{P}([a,b])\}$$
>
> is bounded above.

■

Bounded variation function-দের জন্য sup নিতে অসুবিধা নেই। এ থেকেই নীচের definition-টার জন্ম।

DEFINITION: Total variation

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be any function of bounded variation over $[a, b]$. Then the **total variation** of f over $[a, b]$ is defined as

$$V_a^b(f) = \sup \{T(P, f) \ : \ P \in \mathbb{P}([a, b])\}.$$

50.3 Computing total variation

এবার আমরা শিখব একটা function দেওয়া থাকলে কী করে তার total variation বার করতে হয়। সব সময়েই যে কাজটা সহজ এমন নয়, কিন্তু কোনো কোনো বিশেষক্ষেত্রে প্রায় চোখে দেখেই বলে দেওয়া যায়। তার মধ্যে সবচেয়ে সহজ অবশ্যই monotone function-রা, যাদের কথা এবার বলব।

50.3.1 Monotone

কিছু কিছু function আছে যাদের ছবি দেখেই total variation বলে দেওয়া যায়, যেমন monotone function-দের বেলায় (Fig 13 আর Fig 14)। বুঝতেই পারছ যে দুইক্ষেত্রেই বাঁদরটা একেবারে একপ্রান্ত থেকে অন্যপ্রান্তে গিয়ে থামবে। তার মানে

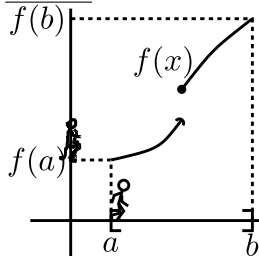
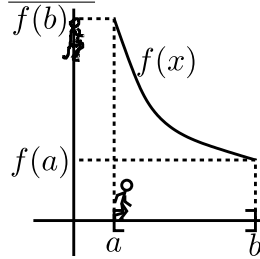
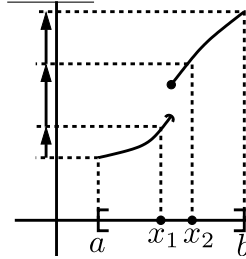
$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$$

হবে। এটাই প্রমাণ করতে দিয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 6: If f is monotonic on $[a, b]$, prove that f is of bounded variation on $[a, b]$ and

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|.$$

[3] **(2008.9a)**

SOLUTION: প্রমাণ করার জন্য আমরা যথারীতি partition নিয়ে এগোব। প্রথমে ছবি দিয়ে বুঝি। ধরো Fig 13-র function-টা নিয়ে কাজ করছি। এখানে বাঁদরটা কখনও নামছে না, খালি উঠছে। সুতরাং যাই partition নিই না কেন, তার জন্য বাঁদরটাকে কোনো বাড়তি দূরত্ব যেতে হবে না, ওঠার পথে ছুঁয়ে ছুঁয়ে গেলেই হবে। Fig 15 দ্যাখো। তাই যাই $P \in \mathbb{P}([a, b])$ নিই না কেন, $T(P, f)$ ওই $|f(b) - f(a)|$-ই থাকবে। সুতরাং sup নিলেও একই জিনিস পাব।

We shall show that

$$\{T(P,f) \;:\; P \in \mathbb{P}([a,b])\} = \{|f(b)-f(a)|\}.$$

This will complete the proof, as a singleton set is always bounded, and its only element is its supremum.

বুঝতেই পারছ যে f-এর গ্রাফটা উঠলেও প্রমাণটা যা হবে, নামলেও একইভাবে হবে। সুতরাং আমরা খালি nondecreasing দিকটা দেখাব। এতে যে সত্যিই কিছু বাদ যাচ্ছে না সেটা বুঝিয়ে দেব w.l.g. (অর্থাৎ without loss of generality) লিখে। যুক্তিটা এরকম--যদি f-টা nonincreasing হত তবে f-এর জায়গায় $-f$ নিয়ে কাজ করতাম। তাতে কিছুই বদলাত না, কারণ সব জায়গাতেই f আছে absolute value চিহ্নের ভিতরে।

We assume w.l.g. that f is nondecreasing. Otherwise, the same proof will work for $-f$, since f is always inside absolute value sign.

For nondecreasing f, we have $|f(b)-f(a)| = f(b)-f(a)$.

এইবার তবে প্রমাণ শুরু করি--

To show

$$\forall P \in \mathbb{P}([a,b]) \quad T(P,f) = f(b)-f(a).$$

$\forall P$ Take any $P \in \mathbb{P}([a,b])$. Let P be

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Then

$$\begin{aligned} T(P,f) &= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] \quad \left[\because f \text{ is nondecreasing}\right] \\ &= f(b) - f(a), \end{aligned}$$

as required.

এই শেষের ধাপটা কী করে হল বুঝলে তো? $\sum[f(k_k) - f(x_{k-1})]$ হল যাকে বলে telescopic sum, প্রত্যেকটা term-এর মাইনাস অংশটা পাশের term-এর প্লাস অংশটার সঙ্গে কাটাকাটি হয়ে যায়। ■

এবার একটা প্রয়োগ দেখি--

Example 7: Find the total variation of $\tan x + 5\sin x$ on $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.[2] **(2012.7a)**

SOLUTION:

Let $f(x) = \tan x + 5\sin x$ for $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.
Now $f'(x) = \sec^2 x + 5\cos x > 0$ for $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.
So $f(x)$ is monotone, and hence

$$\begin{aligned} V_{\pi/4}^{\pi/3}(f) &= \left|f\left(\tfrac{\pi}{3}\right) - f\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right| \\ &= \left|\left(\sqrt{3} + 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(1 + 5 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| \\ &= \left|\frac{7\sqrt{3}}{2} - \left(1 + \frac{5}{\sqrt{2}}\right)\right| \\ &= \frac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{2} - 1. \end{aligned}$$

■

Example 8: Find the total variation of $\sin x \cos x$ on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.[3] **(2006.7b)**

SOLUTION:

Let $f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$. This is a monotone increasing function on $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ and monotone decreasing on $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.
So

$$\begin{aligned} V_0^{\pi/2}(f) &= V_0^{\pi/4}(f) + V_{\pi/4}^{\pi/2}(f) \\ &= \left[f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - f(0)\right] + \left[f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

Exercise 1: Find $V_a^b(f)$ in each of these cases:
(1) $f(x) = [x], \quad a = 0, b = 2.$ **(2)** $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 1, b = 2.$ **(3)** $f(x) = \log x, \quad a = 1, b = 3.$
■

Exercise 2: Determine the total variation of $x^3 - x + 1$ on $[1, 2]$.[2] **(2014.1bi)**

HINT:

এটা একটা polynomial, সুতরাং গ্রাফটা একটা ঢেউখেলানো কিছু হবে। আমাদের খালি দেখতে হবে ঢেউগুলো কতটা উঠছে আর কতটা নামছে। তার জন্য আগে জানা দরকার ঢেউগুলোর অবস্থান। তার জন্য differentiate করে দেখি। Derivative-টা positive হওয়া মানে উঠছে, negative মানে নামছে। এখানে derivative হল

$$\frac{d}{dx}(x^3 - x + 1) = 3x^2 - 1.$$

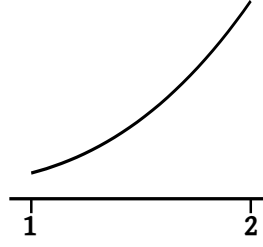



Fig 16

লক্ষ কর যে এটা $[1, 2]$-এর উপরে সর্বদাই positive. তার মানে function-টা monotone. ছবিতে দেখতে Fig 16-এর মত। ব্যস্, এবার তোমার নিজের করতে পারা উচিত। ■

DAY 51
Properties

51.1 Bounded variation functions

আমরা bounded variation function-দের নিয়ে আগ্রহী কেন? কারণ এইসব function-দের নানারকমের ভালো ভালো গুণ আছে। তাই "bounded variation" শর্তটা বহু দরকারী theorem-এর গোড়াতেই দেখা যায়। কোনো function $f(x)$-এর উপরে সেই সব theorem লাগাতে হলে প্রথমেই পরীক্ষা করে দেখতে হয় যে $f(x)$-টা একটা bounded variation function কিনা। এই কাজের জন্য bounded variation function-দের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য জানা থাকলে সুবিধা হয়, যেমন ধরো যদি $f(x)$ আর $g(x)$ দুজনেই bounded variation function হয় তাহলে $f(x) + g(x)$-ও একটা bounded variation function হতে বাধ্য। এই তথ্যটা একবার প্রমাণ করে রাখলে আর প্রতি ক্ষেত্রে আলাদা করে $f(x) + g(x)$-এর bounded variation দেখাতে হয় না। নীচের অংকে এটাই প্রমাণ করতে দিয়েছে। এটা triangle inequality দিয়েই অনায়াসে হয়ে যাবে। চেষ্টা করে দ্যাখো।

Exercise 3: Prove that if f, g both have bounded variation on $[a, b]$, then $f + g$ and $-g$ also have bounded variation over $[a, b]$. ■

শুধু যোগের বেলাতেই নয়, গুণের বেলাতেও একই কথা খাটে। কিন্তু এটা প্রমাণ করা একটু কম সহজ। এবার সেটাই আলোচনা করব। তার জন্য একটা তথ্য লাগবে--যেকোনো bounded variation function মাত্রেই bounded হতে বাধ্য। এটা আমরা গুছিয়ে অংকের ভাষায় প্রমাণ করব কালকে। কিন্তু আপাততঃ এর পিছনের সহজ যুক্তিটা বাঁদরের উপমা দিয়ে বুঝে রাখলেই চলবে। যদি function-টা unbounded হয়, তবে সেটা হয় উঠতে উঠতে ∞ বা নামতে নামতে $-\infty$-র দিকে চলেছে। সুতরাং বাঁদরটা হয় উঠতেই থাকবে, নয়তো নামতেই থাকবে। ঠিক যেমন কয়েক পাতা আগে Fig 5-এ দেখেছিলাম। অতএব function-টা আর bounded variation হয় কী করে?

Example 9: Let f, g be two functions of bounded variation on $[a, b]$. Prove that their product is also of bounded variation on $[a, b]$.[3] **(2006.7c)**

SOLUTION:

Let $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ have bounded variation.

To show

$\exists K > 0 \quad \forall P \in \mathbb{P}([a,b]) \quad T(P, fg) \leq K.$

Let $B > 0$ be a bound for f and g over $[a,b]$.

এখানে আমরা একই B দিয়ে কী করে f আর g দুজনকেই bound করতে পারলাম? কারণ বলা আছে যে f, g দুজনেই $[a,b]$-র উপরে bounded. সুতরাং f-এর জন্য একটা bound $B_1 > 0$ আর g-এর জন্য একটা bound $B_2 > 0$ পেতে পারি। এবার যদি $B = \max\{B_1, B_2\} > 0$ নিই, তবে এই এক B দিয়েই f, g দুজনেই bounded থাকবে।
প্রথম কাজ হল একটা উপযুক্ত $K > 0$ নির্বাচন করা। একটু রাফ করে নিই। আমাদের কাজ হল এমন K নেওয়া যাতে যেকোনো partition P-এর জন্যই $T(P, fg) \leq K$ হয়। এখন $T(P, fg)$ হল $\sum [f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})]$.
এখানে summation-এর ভিতরে term-গুলোকে আমরা একটু কায়দা করে bound করব--

$$\begin{aligned}
& |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
= \; & |f(x_i)g(x_i) - f(x_i)g(x_{i-1}) + f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
\leq \; & |f(x_i)g(x_i) - f(x_i)g(x_{i-1})| + |f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
\leq \; & B\big[|g(x_i) - g(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})|\big]
\end{aligned}$$

সুতরাং summation-টা লাগালেই পাচ্ছি

$$T(P, fg) \leq B \cdot (T(P, f) + T(P, g)).$$

এখানে আমরা জানি যে $T(P, f)$ কখনই $V_a^b(f)$-এর উপরে উঠবে না, আর $T(P, g)$ উঠবে না $V_a^b(g)$-এর উপরে। তাই--

$\boxed{\exists K}$ Choose $K = B\big[V_a^b(f) + V_a^b(g)\big] > 0.$

$\boxed{\forall P}$ Take any $P \in \mathbb{P}([a,b])$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

এবার খালি রাফটাকে গুছিয়ে লিখে দেওয়ার অপেক্ষা।

Then

$$\begin{aligned}
& |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
= \; & |f(x_i)g(x_i) - f(x_i)g(x_{i-1}) + f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
\leq \; & |f(x_i)g(x_i) - f(x_i)g(x_{i-1})| + |f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
= \; & |f(x_i)| \cdot |g(x_i) - g(x_{i-1})| + |g(x_{i-1})| \cdot |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
\leq \; & B\big[|g(x_i) - g(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})|\big]
\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}
T(P, fg) &= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
&\leq B \sum_{i=1}^{n} \big[|g(x_i) - g(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})|\big] \\
&= B\big[T(P, g) + T(P, f)\big] \\
&\leq B\big[V_a^b(f) + V_a^b(g)\big] = K,
\end{aligned}$$

as required.

■

নীচের অংকটা একই জিনিস, সামান্য অন্য ভাষায়।

Exercise 4: Show that the class of functions of bounded variation on $[a, b]$ is closed under pointwise multiplication.[3] **(2012.7c)** ■

যোগ, বিয়োগ, গুণের ব্যাপারটা তো দেখলাম। স্বভাবতঃই এবার প্রশ্ন আসে যে ভাগের বেলায় একই রকম কথা বলা যায় কিনা। মানে, f, g দুজনেই যদি bounded variation function হয়, তবে f/g-ও তাই হতে বাধ্য কিনা। অবশ্যই $g(x) \neq 0$ হতে হবে, নইলে তো f/g করাই যাবে না। শুধু তাই নয়, g-কে 0-র একেবারে কাছেও যেতে দেওয়া চলবে না, কারণ তাহলে f/g-টা ∞ বা $-\infty$-র কাছে গিয়ে উপস্থিত হবে (মানে unbounded হয়ে যাবে)। সুতরাং এমন একটা $\delta > 0$ থাকতে হবে যাতে

$$\forall x \in [a, b] \quad |g(x)| \geq \delta$$

হয়। কিন্তু তাতেই কী কাজ হবে, নাকি আরও শর্ত চাপাতে হবে? নীচের অংকে সেটাই পরীক্ষা করে দেখতে বলেছে। পরীক্ষা করার সময়ে f/g নিয়ে কাজ না করে $1/g$ নিয়ে কাজ করা সুবিধাজনক। $1/g$-এর যদি bounded variation হয় তবে $f/g = f \times \frac{1}{g}$-এর তো হবেই।

Exercise 5: Let $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a function of bounded variation over $[a, b]$ which is also bounded away from 0, *i.e.*,

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad |g(x)| \geq \delta.$$

Is it true that $1/g$ must also have bounded variation over $[a, b]$? ■

এবার একটা অন্য ধরণের অংক দিই--function-টা একই রাখব, কিন্তু interval-টা অন্য নেব।

Example 10: ধরো $[a, b]$-র উপরে $f(x)$ একটা bounded variation function. এবার যদি কোনো $[c, d] \subseteq [a, b]$ দিই, তবে কি $f(x)$-টা $[c, d]$-র উপরেও একটা bounded variation function হবেই?

SOLUTION: যেহেতু $[a, b]$-র উপরে f-এর bounded variation, তার মানে f-টা $[a, b]$-র কোথাওই খুব বেশী লাফালাফি করে না। সুতরাং $[c, d]$-র উপরে আর বেশী লাফালাফি করবে কি করে? কারণ $[c, d]$ তো $[a, b]$-এর ভিতরে! এই কথাটাই এবার গুছিয়ে লিখব।

Yes, shall show that f has bounded variation over $[c, d]$, ie,

$$\exists B \geq 0 \quad \forall P \in \mathbb{P}([c, d]) \quad T(P, f) \leq B.$$

$\exists B$ Choose $B = V_a^b(f) \geq 0$.

$\forall P$ Take any $P \in \mathbb{P}([c, d])$.

Let $Q \in \mathbb{P}([a, b])$ be $P \cup \{a, b\}$.

Then

$$T(Q, f) = |f(a) - f(c)| + T(P, f) + |f(d) - f(b)| \geq T(P, f).$$

So
$$T(P,f) \leq T(Q,f) \leq V_a^b(f) = B,$$
as required.

■

51.2 Total variation function

নিশ্চয়ই লক্ষ করেছ যে bounded variation ব্যাপারটার সঙ্গে Riemann integration-এর অনেক মিল আছে। দুই ক্ষেত্রেই আমরা একটা partition নিয়ে শুরু করি, এবং সেই partition-এর জন্য একটা sum বানাই। Riemann integration-এর বেলায় $L(P,f)$ আর $U(P,f)$ ছিল এরকম sum, আর bounded variation-এর বেলায় $T(P,f)$. তার পর আমরা P-কে সূক্ষ্মতর করতে থাকি এবং দেখি যে sum-টার limit কী হয়। এই limit-টাকে অবশ্য আমরা সরাসরি limit দিয়ে না লিখে sup বা inf দিয়ে লিখি, কিন্তু সেটা লেখার সুবিধার জন্য। Riemann integration-এর ক্ষেত্রে আমরা দেখেছিলাম যে, f যদি $[a,b]$-র উপর Riemann integrable হয়, তবে যে কোনো $[c,d] \subseteq [a,b]$-এর উপরেও Riemann integrable হতে বাধ্য। ঠিক একই রকম কথা আমরা bounded variation-এর ক্ষেত্রেও দেখেছি--$[a,b]$-র উপর bounded variation হলে যে কোনো $[c,d] \subseteq [a,b]$-র উপরেও হবে। এই সাদৃশ্যটাকে আমরা এবার আরেকধাপ এগিয়ে নিয়ে যাব। Riemann integration-এর বেলায় আমরা indefinite integral-দের নিয়ে কাজ করেছিলাম--

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

এখানেও আমরা একই রকম জিনিস define করতে পারি-- $V_a^x(f), \quad x \in [a,b]$. একে বলে total variation function. এর কিছু গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য আছে যেগুলো এক্ষুণি আমাদের কাজে দেবে।
প্রথম বৈশিষ্ট্য হল $\forall x \in [a,b] \quad V_a^x(f) \geq 0$. এই প্রসঙ্গে একটা প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করি--

Exercise 6: যদি $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ একটা constant function হয়, তবে $V_a^b(f) = 0$ হবে। এর converse-ও কি ঠিক, মানে যদি $V_a^b(f) = 0$ হয় তবে কি f-কে একটা constant function হতেই হবে? ■

দ্বিতীয় বৈশিষ্ট্য হল--$c \in [a,b]$ হলে
$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$
হয়। এইটাও সেই Riemann integration-এর মত ব্যাপার--

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

নীচের অংকের উত্তরে প্রমাণটা রয়েছে।

Example 11: If f has bounded variation on both $[a,c]$ and $[c,b]$ then show that f must have bounded variation on $[a,b]$ also, and

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

SOLUTION:

To show

$$\sup\{T(P,f) \ : \ P \in \mathbb{P}([a,b])\} = V_a^c(f) + V_c^b(f),$$

Step 1: Shall show

$$\forall P \in \mathbb{P}([a,b]) \quad T(P,f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

$\forall P$ Take any $P \in \mathbb{P}([a,b])$.

Let $Q = P \cup \{c\} \in \mathbb{P}([a,b])$.

Also let $P_1 = Q \cap [a,c]$ and $P_2 = Q \cap [c,b]$.

Then

$$\begin{aligned} T(P,f) &\leq T(Q,f) \quad [\because P \subseteq Q] \\ &= T(P_1,f) + T(P_2,f) \\ &\leq V_a^c(f) + V_c^b(f), \end{aligned}$$

as required.

Step 2: Shall show

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists Q \in \mathbb{P}([a,b]) \quad T(Q,f) \geq V_a^c(f) + V_c^b(f) - \epsilon.$$

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \because V_a^c(f) &= \sup\{T(P,f) \ : \ P \in \mathbb{P}([a,c])\} \\ V_c^b(f) &= \sup\{T(P,f) \ : \ P \in \mathbb{P}([c,b])\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\exists Q_1 \in \mathbb{P}([a,c]) \qquad T(Q_1,f) > V_a^c(f) - \tfrac{\epsilon}{2}, \\ &\exists Q_2 \in \mathbb{P}([c,b]) \qquad T(Q_2,f) > V_c^b(f) - \tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

$\exists Q$ Choose $Q = Q_1 \cup Q_2$.

Then

$$T(Q,f) = T(Q_1,f) + T(Q_2,f) > V_a^c(f) - \tfrac{\epsilon}{2} + V_c^b(f) - \tfrac{\epsilon}{2} = V_a^c(f) + V_c^b(f) - \epsilon,$$

as required.

■

Total variation function-এর তৃতীয় বৈশিষ্ট্যটা পাবে প্রথম দুটো বৈশিষ্ট্যকে মেলালেই-- $V_a^x(f)$ হল x-এর একটা nondecreasing function. প্রমাণটা এক লাইনের, আশা করি সেটা আর করে দিতে হবে না!
তার মানে আমরা পেলাম যে $V_a^x(f)$ হল $[a,b]$-র উপরে একটা nondecreasing function. সুতরাং bounded-ও বটে (কেন?) সুতরাং নীচের অংকটা দেখতে যতই শক্ত লাগুক, আসলে সোজাই।

Exercise 7: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a function of bounded variation. Show that the total variation function $V_a^x(f)$ cannot have any type 2 discontinuity in $[a, b]$. ■

আচ্ছা $V_a^x(f)$ কি আদৌ discontinuous হতে পারে? Riemann integration-এর সময়ে দেখেছিলাম যে indefinite integral-রা সব সময়ে continuous হয়। সেরকম কোনো কথা কি total variation function-এর ক্ষেত্রে বলা চলে?

Exercise 8: Show that it is possible to have $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ of bounded variation such that its total variation function is not continuous on $[a, b]$.
HINT:
উত্তরটা কিন্তু খুব সহজ। এরকম function আমরা এই অধ্যায়ে কয়েকবার ইতিমধ্যেই দেখেছি। ■

এবার অংকটাকে একটু কঠিন করি। নীচের অংকটা খালি মজা পাওয়ার জন্য দিয়েছি। না পারলে ঘাবড়ে যেও না, ওটা পরে কোথাও ব্যবহার করব না।

Exercise 9: Is it possible to have a *continuous* function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ of bounded variation such that its total variation function is not continuous on $[a, b]$? ■

51.3 Difference of nondecreasing functions

ধরো তোমাকে বললাম যে একটা function $f(x)$-এর পক্ষে bounded variation হওয়া মানে কী, আর একটা function-এর পক্ষে monotone হওয়া মানেই বা কী। এর মধ্যে কোনটা বোঝানো সহজ? নিশ্চয়ই তুমি বলবে যে monotone ব্যাপারটা বোঝানো অনেক বেশী সহজ। মজার কথা হল bounded variation function-দের সংজ্ঞা আরেকভাবেও লেখা যায়, কেবল মাত্র monotone function ব্যবহার করে। এই সংজ্ঞাটা দেখতে অনেক সহজ, যদিও সংজ্ঞাটা থেকে দেখে বোঝার জো নেই যে bounded variation ব্যাপারটার সঙ্গে function-টার লাফালাফির পরিমাণের কোনো সম্পর্ক আছে। সংজ্ঞাটা এইরকম-- $f(x)$-কে তখনই bounded variation function বলব যদি আমরা $f(x)$-কে

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

আকারে লিখতে পারি, যেখানে $g(x)$ এবং $h(x)$ দুটোই হল nondecreasing function. এই সংজ্ঞাটা যে আমাদের সেই partition-ওয়ালা সংজ্ঞাটার সঙ্গে সমার্থক সেটা বিশ্বাস হওয়া শক্ত। সেটাই আমরা এবার প্রমাণ করব। আগে একটা ছোট্টো জিনিস আলোচনা করে নিই, যেটা প্রমাণটায় কাজে লাগবে। মনে করো $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ একটা bounded variation function. যদি $p, q \in [a, b]$ যা খুশি দুটো সংখ্যা হয়, তবে বলতে পারো এদের মধ্যে কে বেশী বড়--

$$V_a^b(f) \text{ নাকি } f(p) - f(q)?$$

একটু চিন্তা করলেই বুঝবে $V_a^b(f) \geq f(p) - f(q)$ হতে বাধ্য, কারণ বাঁদরের উপমা দিয়ে ভাবলে $V_a^b(f)$ হল বাঁদরের মোট লাফালাফির পরিমাণ, তার মধ্যে $f(p)$ থেকে $f(q)$ পর্যন্ত লাফানোও ধরা আছে। তাই $V_a^b(f) \geq |f(p) - f(q)|$ হবেই, সুতরাং $V_a^b(f) \geq f(p) - f(q)$-ও হতে বাধ্য। এই ব্যাপারটায় নীচের theorem-টা প্রমাণ করতে এক জায়গায় কাজে লাগবে।

> THEOREM
> A function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ has bounded variation over $[a, b]$ iff it can be written as the difference of two nondecreasing functions.

Proof: একটা দিকের প্রমাণ খুবই সহজ--

Difference of nondecreasing $\implies$ bdd variation:

We know that monotone functions defined on $[a, b]$ have bounded variations. Also, the difference of two bounded variation functions have bounded variation.

So the difference of two monotone functions must have bounded variation, as required.

এবার অন্যদিকটা। এখানে total variation function-টা কাজে লাগবে।

Bdd variation $\implies$ difference of nondecreasing:

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be any function with bounded variation over $[a, b]$.
Let

$$\begin{aligned} T(x) &= V_a^x(f), \\ R(x) &= T(x) - f(x). \end{aligned}$$

Then

$$f(x) = T(x) - R(x).$$

এইবার দেখাব যে $T(x)$ আর $R(x)$ দুজনেই হল nondecreasing.

Shall show $T(x)$ and $R(x)$ are nondecreasing functions.

Let $x < y \in [a, b]$.
Then

$$T(y) - T(x) = V_a^y(f) - V_a^x(f) = V_x^y(f) \geq 0.$$

So $T(x)$ is nondecreasing.

Also

$$\begin{aligned} R(y) - R(x) &= T(y) - T(x) - (f(y) - f(x)) \\ &= V_x^y(f) - (f(y) - f(x)) \geq 0. \end{aligned}$$

এইটা কেন হলে বুঝলে তো? $V_x^y(f)$ হল বাঁদরের মোট লাফালাফির পরিমাণ, তার মধ্যে $f(y) - f(x)$ ধরাই আছে।

So $R(x)$ is nondecreasing.

This completes the proof.

[Q.E.D]

নীচের অংকটা একই জিনিস, খালি nodecreasing-এর জায়গায় increasing বলেছে।

Exercise 10: If $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is a function of bounded variation on $[a, b]$, then prove that f can be expressed as the difference of two monotone increasing functions on $[a, b]$.[4] **(2013.3a)**

■

DAY 52
অন্য বৈশিষ্ট্যদের সঙ্গে সম্পর্ক (part 1)

একটা function-এর নানা রকম বৈশিষ্ট্যের কথা আমরা শিখেছি--bounded বনাম unbounded, continuous বনাম discontinuous, differentiable বনাম not differentiable, ইত্যাদি। এখন আরও একটা নতুন বৈশিষ্ট্যের কথা জানলাম--bounded variation বনাম unbounded variation (মানে total variation ∞). স্বাভাবিকভাবেই প্রশ্ন ওঠে যে এই নতুন বৈশিষ্ট্যটার সঙ্গে পুরোণো বৈশিষ্ট্যগুলোর সম্পর্ক কী! যেমন, এই ধরণের কথা বলা যায় কি না--একটা function যদি $[a, b]$-র উপরে bounded variation হয়, তবে সেটা bounded হতেও বাধ্য।

52.1 Boundedness

প্রথমে শুরু করি boundedness নিয়েই। আমরা বাঁদরের উপমা দিয়ে আলোচনা করার সময়েই দেখেছিলাম যে, $f(x)$ যদি unbounded হয়, তবে বাঁদরটা হয় আকাশে উঠে মিলিয়ে যায়, নয়তো পাতালে গিয়ে সেঁধোয়। তাই সেই সব function-এর bounded variation হওয়া সম্ভব নয়। ঘুরিয়ে বললে--bounded variation function-রা অবশ্যই bounded হতে বাধ্য।

52.1.1 যদি bounded variation হয়...

Example 12: Show that a function of bounded variation on $[a, b]$ is bounded there.[2] **(2010.7ap2)**

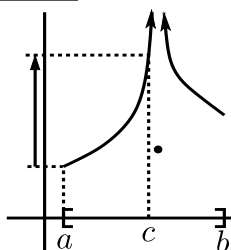
SOLUTION:

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be unbounded. Shall show that it cannot have bounded variation there, ie,

$$\forall M > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([a, b]) \quad T(P, f) > M.$$

$\boxed{\forall M}$ Take any $M > 0$.

এবার সেই বাঁদর লাফানোর ব্যাপারটা করব। লোকটা a থেকে এমনভাবে b-তে যাবে যাতে বাঁদরটাকে অন্ততঃ M দূরত্ব অতিক্রম করতেই হয়। আমরা গ্রাফের উপর এমন একটা point নেব যার a থেকে দূরত্ব M-এর চেয়ে বেশী। এমন point পাবই, কারণ f হল unbounded. Fig 17 দ্যাখো। ধরো এরকম একটা point-এ x-এর value হল c.সুতরাং লোকটা যদি প্রথম পদক্ষেপে c-তে যায়, তাহলেই কাজ হবে। পরের পদক্ষেপে কী করছে তাতে কিচ্ছু এসে যায় না, কারণ আমরা প্রথম পদক্ষেপেই বাঁদরটার ঘাম ছুটিয়ে দিতে পেরেছি।

Fig 17

$\because f(x)$ is unbounded on $[a,b]$,

$$\therefore \exists c \in [a,b] \quad f(c) \notin [f(a)-M, f(a)+M].$$

$\boxed{\exists P}$ Choose $P \in \mathbb{P}([a,b])$ as

$$a < c < b.$$

অর্থাৎ আমরা a থেকে c-তে গেলাম, তার পরেই b-তে চলে গেলাম।

Then

$$T(P,f) = |f(a) - f(c)| + |f(c) - f(b)| \geq |f(a) - f(c)| > M,$$

as required.

■

Example 13: Prove that the function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{if } x \in (0,1] \\ 5 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

is not of bounded variation on $[0,1]$.[2] **(2013.1bi)**

SOLUTION:

We know that functions of bounded variation are also bounded function.

However, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} = \infty$.

So f is not bounded on $[0,1]$. So it cannot have bounded variation there.

■

নীচের অংকটা আসলে bounded function-এর অংক, এখানে bounded variation-এর ভূমিকা সামান্যই।

Example 14: Let $\{f_n\}_n$ be a sequence of bounded variation functions defined on a set S of real numbers such that $\{f_n\}_n$ converges uniformly to the function $f : S \to \mathbb{R}$. Prove that f is bounded on S.[4] **(2014.6b)**

SOLUTION:

We have $f_n \to f$ uniformly on S.

So $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in S \quad |f_N(x) - f(x)| < 1$.

We know that bounded variation functions are also bounded. So f_N is bounded.

Let $B > 0$ be a bound for f_N.

Then $\forall x \in S \quad |f(x)| < |f_N(x)| + 1 \leq B + 1$.

So f is bounded on S, as required.

■

52.1.2 যদি bounded হয়...

Bounded function মাত্রেরই কি bounded variation হতে বাধ্য? উঁহু। নীচের অংকে একটা counterexample রয়েছে।

Example 15: True or false. Justify. Every bounded function defined on $[a, b]$ is of bounded variation on that interval.[3] **(2006.1h)**

SOLUTION:

The statement is false.

Counterexample: Let $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ be defined as

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then f is bounded on $[0, 1]$, but shall show that f does not have bounded variation there, ie

$$\forall M > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([0, 1]) \quad T(P, f) > M.$$

$\forall M$ Take any $M > 0$.

By Archimedian property,

$\exists N \in \mathbb{N} \quad 2N > M$. $\because \mathbb{Q}^c$ is dense in $\mathbb{R}$,

$$\therefore \forall k \in \{1, ..., n\} \quad \exists \text{ irrational } w_k \in \left[\tfrac{k-1}{N}, \tfrac{k}{N}\right].$$

$\exists P$ Choose $P \in \mathbb{P}([a, b])$ as

$$0 < w_1 < \tfrac{1}{N} < w_2 < \tfrac{2}{N} < \cdots < w_N < 1.$$

Then

$$\begin{aligned} T(P, f) &= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \left| f\left(\tfrac{i-1}{N}\right) - f(w_i) \right| + \left| f(w_i) - f\left(\tfrac{i}{N}\right) \right| \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \{1 + 1\} \\ &= 2N > M, \end{aligned}$$

as required.

■

52.2 Continuity

Continuity হল real analysis-এর একটা গুরুত্বপূর্ণ স্তম্ভ। এর সঙ্গে বহু জিনিসের ওতপ্রোত সম্পর্ক। কিন্তু bounded variation-এর সঙ্গে এর খুব একটা সম্পর্ক নেই। এবার সেটাই দেখব।

52.2.1 যদি continuous হয়...

Example 16: Construct a real-valued function on a compact interval which is continuous, but not of bounded variation on that interval.[4] **(2009.6b)**

SOLUTION:

Define $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ as

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{if } x\in(0,1]\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$$

Let $a_n=\frac{2}{(4n+1)\pi}$ and $b_n=\frac{1}{2n\pi}$.

Then $\forall n\in\mathbb{N}\quad f(a_n)=a_n$ and $f(b_n)=0$.

Let $P_n\in\mathbb{P}([0,1])$ be the partition

$$0<a_n<b_n<a_{n-1}<b_{n-1}<\cdots<a_1<b_1<1.$$

Then

$$\begin{aligned} T(P_n,f) &= |f(a_n)-f(0)| \\ &\quad +\sum_1^n |f(b_k)-f(a_k)| \\ &\quad +\sum_2^n |f(a_{k-1})-f(b_k)| \\ &\quad +|f(1)-f(b_1)| \\ &= |a_n-0|+\sum_1^n|0-a_k|+\sum_2^n|a_{k-1}-0|+|f(1)-0| \\ &\geq \sum_1^n |a_k| \\ &= \sum_1^n \frac{2}{(4n+1)\pi}\to\infty \end{aligned}$$

as $n\to\infty$, because $\sum\frac{1}{n}=\infty$.

$\therefore$ As $n \to \infty$, we have $T(P_n, f) \to \infty$. So the set

$$\{T(P,f) \; : \; P \in \mathbb{P}([a,b])\}$$

is unbounded.

Hence f does not have bounded variation over $[0,1]$.

■

Exercise 11: Show, by an example, that a continuous function may not be a function of bounded variation.[3] **(2006.7ap2)** ■

Exercise 12: Show by an example that a continuous function defined on a closed and bounded interval in $\mathbb{R}$ may not be of bounded variation.[3] **(2010.7ap3)** ■

52.2.2 যদি bounded variation হয়...

Example 17: Prove or disprove: If a function $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is of bounded variation on $[a,b]$ then f is continuous on $[a,b]$.[3] **(2011.1g)**

SOLUTION:

The statement is false.

Counterexample: Consider $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ defined as

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [0,1] \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

এই function-টা যে bounded variation সেটা বুঝতেই পারছ, কারণ এটা একটা monotone function. আমরা অবশ্য প্রমাণটা সরাসরি সংজ্ঞা থেকেই দেখাচ্ছি।

Shall show

$$\forall P \in \mathbb{P}([0,2]) \quad T(P,f) = 1.$$

$\forall P$ Take any $P \in \mathbb{P}([0,2])$.

Let P be $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2$, where

$$x_k \leq 1 < x_{k+1}$$

for some $k \in \{0, ..., n-1\}$.

Then

$$\begin{aligned} T(P,f) &= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \left[\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})|\right] + |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \\ &\quad + \left[\sum_{i=k+2}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|\right] \\ &= 0 + 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

So f has bounded variation over $[0, 2]$, but it is not continuous there.

■

তবে একটা কথা বলা যায়, সেটা হল এই যে একটা bounded variation function-এর যতই discontinuity থাক, discontinuity-গুলো কখনোই type 2 হতে পারে না, মানে infinite discontinuity বা essential discontinuity হতে পারে না। খালি jump discontinuity বা removable discontinuity-ই হতে পারে। এটা বস্তুতঃ এক লাইনে প্রমাণ করে দেওয়া যায় এইভাবে--যদি $f(x)$-এর bounded variation হয়, তবে $f(x)$-কে দুটো nondecreasing function-এর difference হিসেবে লেখা যাবে--

$$f(x) = g(x) - h(x),$$

যেখানে $g(x), h(x)$ দুজনেই nondecreasing. আমরা জানি যে monotone function-দের কখনো type 2 discontinuity থাকে না, সুতরাং $g(x)$ বা $h(x)$-এর কোনো type 2 discontinuity নেই। অতএব $g(x) - h(x)$-এরও থাকতে পারে না।

নিচে আমরা একই জিনিস প্রমাণ করেছি, কিন্তু সরাসরি সংজ্ঞা থেকে, Cauchy criterion ব্যবহার করে। আমরা যখন sequence শিখেছিলাম (এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে) তখন একটা Cauchy criterion শিখেছিলাম--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |a_n - a_m| < \epsilon.$$

আরও দেখেছিলাম যে $\{a_n\}_n$-এর পক্ষে Cauchy হওয়া আর convergent হওয়া সমার্থক। যে কোনো limit-এর জন্যই এরকম Cauchy criterion দেওয়া যায়। যেমন

$$\lim_{x \to c} f(x) \text{ exists finitely}$$

এই কথাটার সঙ্গে সমার্থক নীচের Cauchy criterion-টা--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in N'(c, \delta) \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

এটা আসলে sequence-এর Cauchy criterion থেকেই এসেছে, limit-এর sequential criterion ব্যবহার করে।

Example 18: Correct or justify: A function of bounded variation on $[a, b]$ cannot have any discontinuity of the second kind in $[a, b]$.[3] **(2007.1c)**

SOLUTION:

The given statement is correct. We shall show that if $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ has bounded variation, then $\forall c\in[a,b)\ \ f(c+)$ exists finitely, and $\forall c\in(a,b]\ \ f(c-)$ exists finitely.

Discontinuity of type II-র সংজ্ঞা থেকেই এটা পেলাম--কোথাও একটা left limit বা right limit ∞ বা $-\infty$ হবে, কিংবা আদৌ exist-ই করবে না। আর left limit মানে $f(c-)$-এর কথা যখন উঠছে তখন $c\in(a,b]$ নিতে হল কারণ $c=a$ হল সবচেয়ে বাঁদিকের প্রান্ত, সেখানে left limit-এর প্রশ্নই ওঠে না। একইভাবে $f(c+)$-এর জন্য $c\in[a,b)$ নিতে হয়েছে।

Let, if possible, $f(c+)$ fail to exist finitely for some $\forall c\in[a,b)$. (The argument for $f(c-)$ is similar).

Shall show that f is of unbounded variation on $[a,b]$, ie,

$$\forall M>0\quad \exists P\in\mathbb{P}([a,b])\quad T(P,f)>M.$$

$\forall M$ Take any $M>0$.

By assumption, $f(c+)$ does not exist finitely.

$\therefore$ Using Cauchy criterion,

$$\exists\epsilon>0\quad\forall\delta>0\quad\exists x,y\in(c,c+\delta)\cap[a,b]\quad |f(x)-f(y)|\geq\epsilon.$$

Let $\delta_1=1>0$.

Taking $\delta=\delta_1$, we get $x_1,y_1\in(c,c+\delta_1)\cap[a,b]$ such that $|f(x_1)-f(y_1)|\geq\epsilon$.

Clearly, $x_1\neq y_1$. W.l.g., let $y_1<x_1$.

এই "w.l.g."-র ব্যাপারটা বুঝলে তো? $x_1\neq y_1$ হবে বোঝাই যাচ্ছে, কারণ তা নইলে তো $f(x_1)-f(y_1)=0$ হয়ে যেত $\geq\epsilon$ হত না! সুতরাং x_1,y_1-র মধ্যে একজন ছোটো অন্যজন বড়। ছোটোটাকেই আমরা y_1 নাম দিলাম।

Let $\delta_2=y_1-c>0$.

Taking $\delta=\delta_2$, we get $x_2,y_2\in(c,c+\delta_2)\cap[a,b]$ such that $|f(x_2)-f(y_2)|\geq\epsilon$.

Again, w.l.g., $y_2<x_2$.

Continuing in this way we get

$$x_1>y_1>x_2>y_2>\cdots\in[a,b]$$

such that

$$\forall i\in\mathbb{N}\quad |f(x_i)-f(y_i)|\geq\epsilon.$$

By Archimedian property, $\exists n\in\mathbb{N}\quad n\epsilon>M$.

$\exists P$ Choose the partition P given by

$$a<y_n<x_n<\cdots<y_1<x_1<b.$$

Shall show that $T(P,f) > M$.
Now

$$\begin{aligned} T(P,f) &= |f(a)-f(y_n)| + |f(y_n)-f(x_n)| + \cdots \\ &\quad +|f(x_1)-f(b)| \\ &\geq |f(y_n)-f(x_n)| + |f(y_{n-1})-f(x_{n-1})| + \cdots \\ &\quad +|f(y_1)-f(x_1)| \\ &\geq n\epsilon > M, \end{aligned}$$

as required.

■

DAY 53
অন্য বৈশিষ্ট্যদের সঙ্গে সম্পর্ক (part 2)

53.1 Riemann integrability

Riemann integration-এর সঙ্গে bounded variation-এর বেশ ভালো সম্পর্ক আছে।

53.1.1 যদি bounded variation হয়...

Bounded variation function-রা সব সময়ে Riemann integrable হয়। প্রমাণ করা খুব কঠিন কিছু নয়।

Example 19: Prove or disprove: If $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is a function of bounded variation over $[a,b]$, then it is Riemann integrable on $[a,b]$.[3] **(2012.6a)**

SOLUTION:

$\because f$ has bounded variation over $[a,b]$,
$\therefore f$ must be bounded over $[a,b]$.
Shall show

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}([a,b]) \quad U(P,f) - L(P,f) < \epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.
Let $V = V_a^b(f)$.
By Archimedean property, $\exists n \in \mathbb{N} \quad n\epsilon > V \cdot (b-a)$.
$\exists P$ Choose P as the partition that divides $[a,b]$ into n equal parts $I_1, ..., I_n$.

Let

$$M_i = \sup\{|f(x)-f(y)| \ : \ x,y \in I_i\}.$$

Then $\sum_i M_i \leq V$.

So

$$\begin{aligned} U(P,f) - L(P,f) &= \sum_i M_i |I_i| \\ &= \tfrac{b-a}{n} \sum_i M_i \\ &\leq \tfrac{b-a}{n} \times V < \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

■

53.1.2 যদি integrable হয়...

একটা function যদি Riemann integrable হয়, তাহলেই কি সেটা একটা bounded variation function হতে বাধ্য? এটাই নীচের প্রশ্নে জানতে চাওয়া হয়েছে। উত্তরটা কিন্তু তোমার জানা। এই অধ্যায়ে এতক্ষণ যা যা আলোচনা করেছি, তার মধ্যে উত্তরটা একাধিকবার আলোচিত হয়ে গেছে!

Exercise 13: Prove or disprove: Every integrable function on a compact interval is of bounded variation.[3] **(2014.3b)** ■

Example 20: If g is Riemann integrable on $[a,b] \subset \mathbb{R}$ and $f(x) = \int_a^x g(t)dt,\ x \in [a,b]$, then show that f is of bounded variation on $[a,b]$.[3] **(2010.1e)**

SOLUTION:

Shall show that $\{T(P,f) \ : \ P \in \mathbb{P}([a,b])\}$ is bounded from above, ie,

$$\exists B > 0 \quad \forall P \in \mathbb{P}([a,b]) \quad T(P,f) \leq B.$$

$\because g$ is Riemann integrable on $[a,b]$,

$\therefore g$ is bounded on $[a,b]$, ie,

$$\therefore \exists K > 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad |g(x)| \leq K.$$

$\boxed{\exists B}$ Choose $B = K \cdot (b-a) > 0$.

$\boxed{\forall P}$ Take any $P \in \mathbb{P}([a,b])$.

Let P be

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

Then

$$\begin{aligned} T(P,f) &= \sum_1^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \sum_1^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx \right| \\ &\leq \sum_1^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)|dx \\ &\leq \sum_1^n K \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= K \sum_1^n (x_i - x_{i-1}) = K \cdot (b-a) = B, \end{aligned}$$

as required.

■

Example 21: If f is continuous on an interval $[a,b]$ and $F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x \in [a,b]$, then show that F is of bounded variation on $[a,b]$.[3] **(2007.6ap2)**
SOLUTION: Riemann integrable হলেই হত আগের অংকের মত। ■

Example 22: Let $F(x) = \int_1^x [t]dt,\ 1 \leq x \leq 10$. Is F a function of bounded variation on $[1,10]$? Justify.[2] **(2014.2c)**
SOLUTION: এই অংকটা অন্ততঃ দুভাবে করা যায়। এক, এক্ষুণি যেটা শিখলাম সেটা কাজে লাগিয়ে--

> We know that integrals of Riemann inegrable functions are of bounded variation. Since $[t]$ is Riemann integrable, so F is of bounded variation.

আরেকটা কায়দা হল monotone function কাজে লাগিয়ে--

<u>বিকল্প পদ্ধতি</u>

> $[t]$ is a nonnegative function. So its integral $F(x)$ is a nondecreasing function.
> We know that any monotone function has bounded variation on a compact interval. So F has bounded variation on $[0,10]$.

■

53.2 Lipschitz

53.2.1 যদি Lipschitz হয়...

Lipschitz condition মানে হল এমন একটা $K > 0$ আছে যাতে

$$\forall x, y \quad |f(x) - f(y)| < K \cdot |x - y|$$

হয়। ফলে x, y-এর দূরত্ব দিয়ে $f(x), f(y)$-এর দূরত্বকে নিয়ন্ত্রণে রাখা যায়। সুতরাং f-এর পক্ষে বেশী লাফালাফি করা অসম্ভব।

Example 23: The function $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ obeys Lipschitz's condition on $[a, b]$. Prove that ϕ is of bounded variation.[2] **(2012,2014)**

SOLUTION:

Let the Lipschitz's condition be

$$\forall x, y \in [a, b] \quad |\phi(x) - \phi(y)| \leq K \cdot |x - y|.$$

Let $P \in \mathbb{P}([a, b])$ be any partition

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Then

$$\begin{aligned} T(P, \phi) &= \sum_{i=1}^{n} |\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} K \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= K \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\ &= K(b - a). \end{aligned}$$

Thus, $K \cdot (b - a)$ is an upper bound of $\{T(P, \phi) \ : \ P \in \mathbb{P}([a, b])\}$.
Hence ϕ has bounded variation over $[a, b]$, as required.

■

53.2.2 যদি bounded variation হয়...

কিন্তু যেকোনো bounded variation function-ই কি Lipschitz condition পালন করতে বাধ্য?

Example 24: Prove that a function satisfying Lipschitz condition on $[a, b]$ is of bounded variation on $[a, b]$. Is the converse true?[3+1] **(2014.3a)**

SOLUTION: প্রথম অংশ আগেই করেছি। দ্বিতীয় অংশের উত্তর হল--"না"। কিন্তু counterexample ভেবে পাওয়া খুব সহজ নাও লাগতে পারে। একটা counterexample এরকম--

$$f(x) = \begin{cases} x^{3/2}\sin\frac{1}{x} & \text{if } x \in (0,1] \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

এই অংকে কোনো কারণ দেখাতে বলে নি, তাই খালি counterexample-টাই যথেষ্ট। কিন্তু কারণটা জেনে রাখা ভালো। এটা Lipschitz condition পালন করে না (কারণ, হিসেব করলেই দেখবে যে function-টা differentiable হলেও, derivative-টা bounded নয়)। কিন্তু তাও $f(x)$-টা bounded variation হবে। প্রমাণটা একেবারে সহজ নয়। লক্ষ কর যে, $f(x)$-টা ক্রমাগত উঠছে নামছে। চূড়াগুলো আসছে যখন $\frac{1}{x}$ হচ্ছে $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ আকারের, এবং চূড়াটার উচ্চতা হল $x^{3/2} = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-3/2}$. একইভাবে খাদগুলো আসছে যখন $\frac{1}{x}$ হচ্ছে $2n\pi - \frac{\pi}{2}$ আকারের। খাদটার গভীরটা হল $x^{3/2} = \left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^{-3/2}$. সুতরাং একটা চূড়া থেকে তার পরবর্তী খাদে নামতে অতিক্রান্ত দূরত্ব হচ্ছে

$$\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^{-3/2} + \left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^{-3/2}.$$

এরকম ভাবে বারবার হয়েই চলেছে। সুতরাং চূড়া থেকে খাদে নামার দূরত্বগুলো যোগ করলে পাচ্ছি

$$\sum_n \left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^{-3/2} + \left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^{-3/2}.$$

যেহেতু $\frac{3}{2} > 1$ তাই $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$-এর সঙ্গে তুলনা করে দেখা যাচ্ছে যে এইভাবে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব $< \infty$. অবশ্য এটা খালি অর্ধেকটা গল্প। বাকি অর্ধেকটা হল খাদ থেকে পরবর্তী চূড়ায় ওঠা। কিন্তু একই যুক্তিতে সেখানেও মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব $< \infty$-ই হবে। সুতরাং দুইয়ে মিলে পাচ্ছি যে $f(x)$-এর bounded variation আছে। ■

53.3 Derivative

53.3.1 যদি derivative bounded হয়...

Example 25: If a function $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ has a bounded derivative on $[a,b]$, then prove that f is of bounded variation on $[a,b]$. Give an example (justification not necessary) to show that the converse may not be true.[3+1] **(2011.7a)**

SOLUTION:

Shall show that $\{T(P,f) \ : \ P \in \mathbb{P}([a,b])\}$ is bounded from above, ie,

$$\exists B > 0 \quad \forall P \in \mathbb{P}([a,b]) \quad T(P,f) \leq B.$$

$\because f$ has bounded derivative on $[a,b]$,

$\therefore \exists K > 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad |f'(x)| \leq K.$

$\exists B$ Choose $B = K \cdot (b-a) > 0$.

$\forall P$ Take any $P \in \mathbb{P}([a,b])$.

Let P be

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

Then

$$\begin{aligned} T(P,f) &= \sum_1^n |f(x_i)-f(x_{i-1})| \\ &= \sum_1^n |f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})| \quad [\text{ for some } \xi\in(x_{i-1},x_i) \text{ by MVT}] \\ &\leq \sum_1^n K\cdot(x_i-x_{i-1}) \\ &= K\sum_1^n (x_i-x_{i-1}) = K\cdot(b-a)=B, \end{aligned}$$

as required.

দ্বিতীয় অংশের জন্য আগের অংকের counterexample-টাই খাটবে।

Second part:

$$f(x)=\begin{cases} x^{3/2}\sin\frac{1}{x} & \text{if } x\in(0,1] \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$$

This function has unbounded derivative, but bounded variation.

■

Exercise 14: Prove or disprove: If f has a derivative at every point of $[a,b]$ and if f' is bounded on $[a,b]$, then f is of bounded variation.[3] **(2007.1d)** ■

53.3.2 যদি bounded variation হয়...

যদি একটা bounded variation function $f(x)$ নিই, তবে কি তার derivative সব সময়েই bounded হতে বাধ্য? এ প্রশ্নটার মানেই হয় না, কারণ $f(x)$-টা differentiable নাই হতে পারে। যেমন $f(x)=|x|, \quad x\in[-1,1]$ নিলে f মোটেই $x=0$-তে differentiable নয়, কিন্তু দিব্যি একটা bounded variation function. আচ্ছা যদি বাড়তি এটাও বলে দিই যে $f(x)$ একটা differentiable function? এটাই নীচের অংকের জিজ্ঞাস্য।

Exercise 15: Let $f(x)$ be a differentiable function having bounded variation over $[a,b]$. Then show that $f'(x)$ need not be bounded on $[a,b]$.
HINT: এরকম একটা counterexample আমরা কিছুক্ষণ আগেই দেখেছি! ■

Answers

1. **(1)** 2, **(2)** $\frac{1}{2}$, **(3)** $\log 3$. **2.** $7-1=6$. **5.** হ্যাঁ। এই কথাটা ব্যবহার কর-- $\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(y)}\right| \leq \frac{|g(x)-g(y)|}{\delta^2}$. **6.** হ্যাঁ। **7.** Bounded monotone function-দের কোনো type 2

discontinuity থাকতে পারে না। **9.** না। **13.** না, একটা counterexample হল--$f(x) = \sin\frac{1}{x}$ যদি $x \in (0,1]$, আর $f(0) = 0$. **15.** $f(x) = \begin{cases} x^{3/2}\sin\frac{1}{x} & \text{if } x \in (0,1] \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$

Chapter IX
Rectifiability

DAY 54
Rectifiability

Real analysis-এ partition যে কত গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে তার দুটো উদাহরণ আমরা আগেই দেখেছি--Riemann integration আর bounded variation. এবার আরও একটা একই রকম উদাহরণ দেখব। এবার আমাদের উদ্দেশ্য হবে একটা গ্রাফ দেওয়া থাকলে তার দৈর্ঘ্য বার করা।

Example 1: Fig 1-এ $f(x) = x$-এর গ্রাফ রয়েছে। এই গ্রাফের যে অংশটা $[1, 2]$-এর উপরে রয়েছে (ছবিতে মোটা করে দেখিয়েছি) তার দৈর্ঘ্য কত?

SOLUTION: Fig 2-এর মত করে একটা right angled triangle এঁকে Pythagoras's theorem লাগালেই বুঝবে যে উত্তর হল $\sqrt{2}$. ■

এখানে আমরা দিব্যি Pythagoras's theorem লাগিয়ে পার পেয়ে গেলাম কারণ গ্রাফটা একটা সরলরেখা ছিল। যদি $f(x) = x^2$ নিতাম (Fig 3) তবে কী করে দৈর্ঘ্য বার করতে? তার জন্য একটা কায়দা আছে, যেটা শেখাই আমাদের উদ্দেশ্য। ধরো একটা function দিলাম $f(x)$, দিয়ে বললাম যে $[a, b]$-এর উপরে এর গ্রাফের যে অংশটা আছে তার দৈর্ঘ্য বার কর (Fig 4). তবে প্রথম কাজ হল $[a, b]$-এর একটা partition নেওয়া। ধরো partition-টা হল P :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

প্রতিটা x_i-এর জন্য গ্রাফের উপরে একটা করে বিন্দু রয়েছে। এই বিন্দুগুলোকে পরপর সরলরেখা দিয়ে যোগ করে দাও। তাহলে পেলাম Fig 5. এই সরলরেখাগুলোর মোট দৈর্ঘ্য বার করা কঠিন নয়। যেহেতু সরলরেখা তাই এখানে নিশ্চিন্তে Pythagoras's theorem লাগানো চলবে। তা থেকে $[x_{i-1}, x_i]$-এর উপরের সরলরেখাটার দৈর্ঘ্য বেরোচ্ছে--

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Fig 1

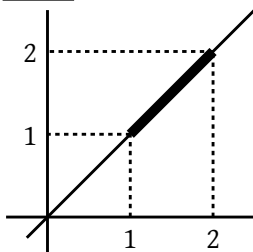



Fig 2

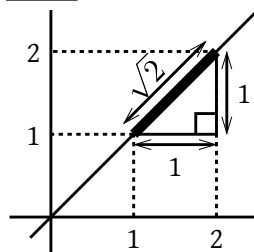



Fig 3

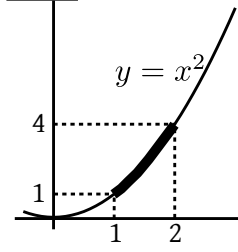



Fig 4

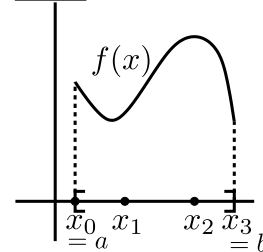
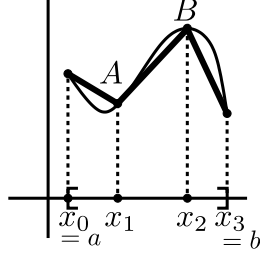
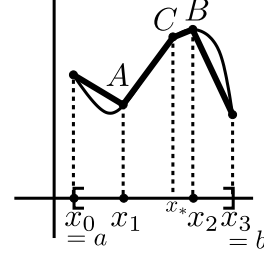



Fig 5 **Fig 6**

এরকম মোট n-খানা সরলরেখা আছে। সুতরাং মোট দৈর্ঘ্য হল $\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$. এটার একটা নাম দেব--$\ell(P, f)$. তার মানে

$$\ell(P, f) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

আশা করি সন্দেহ নেই যে P যত সূক্ষ্ম থেকে সূক্ষ্মতর করব, ততই $\ell(P, f)$ এগিয়ে যাবে গ্রাফটার প্রকৃত দৈর্ঘ্যের দিকে। এবার একটা ছোট্টো জিনিস লক্ষ করলেই আমাদের কাজ শেষ হবে। ধরো একটা partition আছে P :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b.$$

Fig 5 দ্যাখো। এতে আরেকটা নতুন point যোগ করলাম। তবে $\ell(P, f)$ বাড়বে নাকি কমবে? ধরো নতুন point-টা হল x^*, যেটা পড়েছে মনে করো x_1 থেকে x_2-এর মধ্যে কোথাও (Fig 6). এখন আমাদের হাতে দুটো partition আছে--এক, গোড়ায় যেটা নিয়ে শুরু করেছিলাম সেই P, আর এই নতুন partition-টা, যার নাম দেওয়া যাক Q :

$$a = x_0 < x_1 < x^* < x_2 < x_3 = b.$$

প্রশ্ন হল কোনটা বড়--$\ell(P, f)$ নাকি $\ell(Q, f)$. Fig 5 আর Fig 6 তুলনা করলেই বুঝবে যে $\ell(P, f)$ আর $\ell(Q, f)$-এর সরলরেখাগুলো সবই প্রায় এক, খালি $[x_1, x_2]$-এর উপরে $\ell(P, f)$-এর বেলায় একটা সরলরেখা, কিন্তু $\ell(Q, f)$-এর বেলায় সেটা দুটো সরলরেখায় ভেঙে গেছে। লক্ষ কর যে তিনটে সরলরেখা মিলে একটা ত্রিভুজ সৃষ্টি করেছে। যেহেতু কোনো ত্রিভুজের দুটো বাহুর মোট দৈর্ঘ্য তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্যের চেয়ে কম হতে পারে না, তাই

$$\ell(P, f) \leq \ell(Q, f).$$

সুতরাং একটা partition- নতুন point যোগ করলে $\ell(P, f)$ বাড়বে বই কমবে না। এইভাবে পরপর নতুন নতুন point যোগ করে যদি একটা partition P-কে সূক্ষ্ম থেকে সূক্ষ্মতর করতে থাকি তবে $\ell(P, f)$ বাড়তে বাড়তে গ্রাফের প্রকৃত দৈর্ঘ্যের দিকে এগিয়ে যাবে। সুতরাং গ্রাফের প্রকৃত দৈর্ঘ্যের সংজ্ঞা আমরা এইভাবে দিতে পারি--

$$\sup\{\ell(P, f) \ : \ P \in \mathbb{P}([a, b])\}.$$

অবশ্য sup লাগানোর আগে দেখে নিতে হবে যে $\{\ell(P, f) \ : \ P \in \mathbb{P}([a, b])\}$-টা একটা nonempty set কিনা, এবং bounded from above কিনা। Nonempty নিয়ে কোনো সমস্যা নেই, কারণ যে কোনো একটা partition নিলেই তার জন্য একটা $\ell(P, f)$ পাবে যেটা এই set-এ থাকবে। কিন্তু set-টা সবসময়ে bounded from above নাও হতে পারে। সেক্ষেত্রে গ্রাফটার দৈর্ঘ্য নিয়ে কথা বলার মানেই হয় না। একটু বাদেই একটা উদাহরণ নিয়ে দেখব এইসব গ্রাফরা দেখতে কিরকম হয়। এদের কথা বাদ দিলে বাকীরা যারা পড়ে থাকে, মানে যাদের বেলায় $\{\ell(P, f) \ : \ P \in \mathbb{P}([a, b])\}$ হল bounded from above, তাদের ক্ষেত্রে গ্রাফের দৈর্ঘ্য বার করতে কোনো অসুবিধা নেই। এই ভদ্র-সভ্য function-দের একটা নাম আছে--rectifiable. সুতরাং সংজ্ঞাটা দাঁড়ালো এই রকম--

DEFINITION: Rectifiable function

A function $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is called **rectifiable** on $[a,b]$ if the set $\{\ell(P,f) \ : \ P \in \mathbb{P}([a,b])\}$ is bounded from above, where for a partition P :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

we define

$$\ell(P,f) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

DEFINITION: Length of graph of function

If a function $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is rectifiable on $[a,b]$ then the length of its graph over $[a,b]$ is defined as $\sup\{\ell(P,f) \ : \ P \in \mathbb{P}([a,b])\}$, which exists as a finite number by the rectifiability assumption.

54.1 Parametric form

একটা সরলরেখার দৈর্ঘ্য বার করা সহজ, সেটা আমরা ছোটোবেলা থেকেই জানি। সমস্যা হচ্ছিল curve-এর বেলায়, যেমন $f(x) = x^2$-এর গ্রাফ। সেই সমস্যা আমরা সমাধান করেছি। (অন্ততঃ দৈর্ঘ্যের একটা সংজ্ঞা দিতে পেরেছি, কী করে সেই সংজ্ঞা কাজে লাগিয়ে সত্যি সত্যি দৈর্ঘ্যটা বার করা যাবে সেটা একটু পরে দেখব)। কিন্তু যদি ধরো curve-টা হয় Fig 7-এর মত?

এইরকম curve কোনো function-এর গ্রাফ হতে পারে না (কেন?)। এরকম curve-কে অংকের ভাষায় প্রকাশ করার জন্য আমরা parametric form ব্যবহার করি। এর জন্য প্রথমে একটা সুবিধামত x-axis আর y-axis নিতে হয়, তারপর curve-এর প্রতিটা বিন্দু (x,y)-কে $(x(t), y(t))$ আকারে লিখতে হয়। অর্থাৎ এমনি function-এর গ্রাফের বেলায় যেমন আমরা y-কে x-এর function হিসেবে লিখি, এখানে তা না করে x, y দুজনকেই তৃতীয় একটা variable t-এর function হিসেবে লেখা হয়। এই variable-টাকে বলে parameter. যেমন আমাদের উদাহরণে যদি আমরা Fig 8-এর মত করে axis দুটো নিই তবে

$$x(t) = \sin 2t, \quad y(t) = \cos t$$

নিলে এই curve-টা পাওয়া যায়। একটা curve-এর ছবি দেখে বোঝা কঠিন যে $x(t), y(t)$ ঠিক কী কী নিলে curve-টা পাওয়া যায়, কিন্তু $x(t), y(t)$ দেওয়া থাকলে তা থেকে curve-টা এঁকে ফেলা সোজা। এই উদাহরণে $t \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. মনে

Fig 7

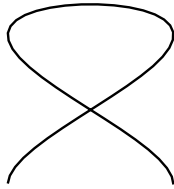



Fig 8

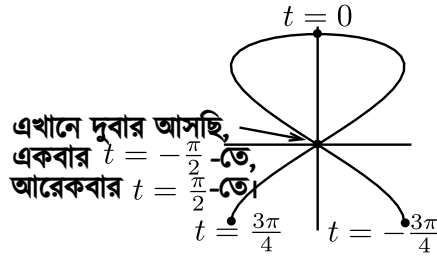
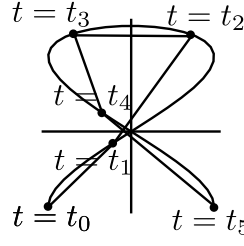



Fig 9

রেখো t-এর বিভিন্ন value-র জন্য তুমি curve-টার উপরে বিভিন্ন বিন্দু পাবে। যেন একটা গাড়ী চলে গেছে, curve-টা হল তার চাকার দাগ। t সময়ে গাড়ীটার অবস্থান ছিল $(x(t), y(t))$. এরকম কিছু বিন্দু দেখানো আছে Fig 8-এ।
Curve-টার দৈর্ঘ্য বার করার জন্য এখানেও আমরা আগের মতই এগোব। প্রথমে একটা partition নেব $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$-এর। ধরো এর নাম দিলাম P :

$$-\tfrac{3\pi}{4} = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 = \tfrac{3\pi}{4}.$$

এই ছয়টা value পেলাম t-এর তার জন্য curve-টার উপর ছয়টা point পাব। এদেরকে পরপর সরলরেখা দিয়ে যোগ করে দেব (Fig 9). এদের মোট দৈর্ঘ্যকে যদি $\ell(P, \gamma)$ নাম দিই তবে

$$\ell(P, \gamma) = \sum_{i=1}^{5} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

এরপরের গল্প ঠিক আগেরই মত--আমরা curve-টার দৈর্ঘ্যের সংজ্ঞা দেব

$$\sup \left\{ \ell(\gamma, P) \ : \ P \in \mathbb{P}\left(\left[-\tfrac{3\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}\right]\right) \right\}.$$

অবশ্যই এখানেও sup নেওয়ার আগে আগে দেখে নিতে হবে set-টা bounded from above কি না। যদি না হয়, তবে বলব যে curve-টা rectifiable নয়, সেক্ষেত্রে দৈর্ঘ্যের প্রশ্ন নেই। যদি set-টা bounded from above হয়, তবে curve-টাকে বলব rectifiable, এবং সেক্ষেত্রে দৈর্ঘ্যটাকে sup দিয়ে লেখা যাবে।

DEFINITION: Rectifiable curve

A curve $\gamma = (x(t), y(t))$ for $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ is called **rectifiable** if the set $\{\ell(P, f) \ : \ P \in \mathbb{P}([a, b])\}$ is bounded from above, where for a partition P :

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

we define

$$\ell(P, \gamma) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

DEFINITION: Length of curve

If a function $\gamma = \big(x(t), y(t)\big)$ for $t \in [a,b]$ is rectifiable then its **length** is defined as $\sup\{\ell(P,\gamma) \;:\; P \in \mathbb{P}([a,b])\}$, which exists as a finite number by the rectifiability assumption.

লক্ষ কর যে এই দুটো definition আগের দুটোর চেয়ে বেশী শক্তিশালী। যদি এই দুটোতে $x(t) = t$ আর $y(t) = f(t)$ বসিয়ে দাও, তবে আগের definition দুটো ফেরত পাবে। তাই বলতে পারি যে আগের দুটো হল পরের দুটোর special case.

54.2 Relation with bounded variation

সব লিখেছে, কেবল দেখ পাচ্ছিনেকো লেখা কোথায়
পাগলা ষাঁড়ে করলে তাড়া কেমন করে ঠেকাব তায়।

--সুকুমার রায়

এতক্ষণ লড়াই করে আমরা একটা curve-এর দৈর্ঘ্যের একটা জম্পেশ সংজ্ঞা খাড়া করতে পেরেছি। এবার আমাদের সামনে প্রশ্ন হল--যদি একটা curve দিয়ে আমাদের বলে তার দৈর্ঘ্য বার করতে, তবে ঠিক করবটা কি! প্রথম কাজ অবশ্যই পরীক্ষা করে দেখা curve-টা আদৌ rectifiable কিনা। যদি না হয় তো ল্যাঠা চুকেই গেল। যদি হয় তবে length-টা কষে বার করতে হবে। কিন্তু এই দুটো কাজ করে কী করে? কিভাবে পরীক্ষা করে বুঝতে হয় একটা rectifiable কিনা, আর rectifiable curve-এর দৈর্ঘ্য কী করেই বা কষে বার করতে হয়?
এই দুটো প্রশ্নেরই চমৎকার উত্তর আছে, যেগুলো আমরা একে একে শিখব। প্রথমে শিখব একটা curve দেওয়া থাকলে কী করে পরীক্ষা করে বুঝতে হয় সেটা rectifiable কিনা। প্রথমে একটা উদাহরণ দেখি, তাহলেই কায়দাটা আন্দাজ করতে পারবে।

Example 2: ধরো এই function-টা দিলাম

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{if } x \in (0,1] \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}.$$

এর গ্রাফের যে বদ্‌খৎ চেহারাটা Fig 10-এ উঁকি মারছে সেটার সঙ্গে আমাদের আগেও বারবার মোলাকাৎ হয়েছে। -1 আর 1-এর মধ্যে বারবার ওঠানামার হিড়িক দেখেই আন্দাজ করছি যে মোট দৈর্ঘ্যটা কোনোভাবেই finite হতে পারে না। হাজার হোক প্রত্যেকবার -1 থেকে 1 উঠতে তো গ্রাফটার দৈর্ঘ্য অন্ততঃ 2 করে বাড়ছে (আসলে 2-এর একটু বেশীই হবে, কারণ গ্রাফটা তো আর খাড়া সরলরেখা বরাবর -1 থেকে 1 পর্যন্ত উঠছে না!)। নামার পথেও একই ব্যাপার। তার মানে একবার উঠে নামতেই দৈর্ঘ্য অন্ততঃ $2 + 2 = 4$ পরিমাণ বেড়ে যাচ্ছে। আর গ্রাফটা তো অসংখ্যবার উঠছে নামছে, সুতরাং মোট দৈর্ঘ্য আর finite হয় কী করে? এইবার এই কথাটাকে গুছিয়ে লিখব অংকের ভাষায়। ■

এই অংকটা থেকেই আন্দাজ করতে পারছ যে এই ক্রমাগত লাফালাফি করাটা rectifiability-র পক্ষে ক্ষতিকারক। আর লাফালাফির পরিমাণ মেপে ফেলার অস্তর তো আমাদের হাতে আগের অধ্যায় থেকেই আছে--total variation. সুতরাং নীচের theorem-টা দেখে বিস্মিত হবার কিছুমাত্র কারণ নেই।

Fig 10

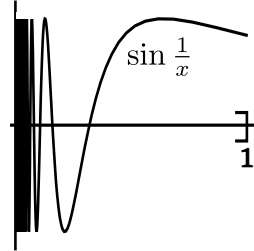
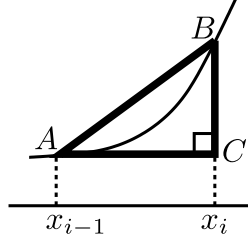



Fig 11

> **THEOREM**
>
> A function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is rectifiable over $[a, b]$ iff f has bounded variation on $[a, b]$.

Proof:
এটা একটা "if and only if" theorem, তাই প্রমাণটাকে দুটো অংশে ভেঙে করব। দুটো দিকেরই মূল কায়দা একই যেটা আমরা Fig 11-এ দেখিয়েছি। এখানে ABC ত্রিভুজটাকে লক্ষ কর। প্রথম অংশে আমরা ব্যবহার করব $AB \geq BC$.

Rectifiable $\implies$ bounded variation:

To show

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall P \in \mathbb{P}([a, b]) \quad T(f, P) \leq M.$$

Given that f is rectifiable over $[a, b]$, ie, the set

$$\{\ell(f, P) \ : \ P \in \mathbb{P}([a, b])\}$$

is bounded from above.

$\exists M$ Choose M as any upper bound of this set.

$\forall P$ Take any partition $P \in \mathbb{P}([a, b])$.

Then

$$\begin{aligned} T(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2} \\ &= \ell(f, P) \leq M, \end{aligned}$$

as required.

দ্বিতীয় অংশের জন্য আবার Fig 11 দ্যাখো। এবার ব্যবহার করব $AB \leq BC + AC$.

Bounded variation $\implies$ rectifiable:

To show

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall P \in \mathbb{P}([a,b]) \quad \ell(f,P) \leq M.$$

Given that f has bounded variation over $[a,b]$, ie, the set

$$\{T(f,P) \ : \ P \in \mathbb{P}([a,b])\}$$

is bounded from above. Let A be any upper bound of this set.

$\exists M$ Choose $M = A + (b-a)$.

$\forall P$ Take any partition $P \in \mathbb{P}([a,b])$.

Then

$$\begin{aligned} \ell(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + (x_i - x_{i-1}) \\ &= T(f,P) + (b-a) \leq A + (b-a) = M, \end{aligned}$$

as required.

[Q.E.D]

এই theorem-টা দিয়ে $y = f(x)$-এর গ্রাফের rectifiability পরীক্ষা করা যায়। যদি একটা curve দেয় $\gamma = (f,g)$, তবে তার rectifiability পরীক্ষা করার জন্যও ঠিক একইরকম একটা theorem আছে, যেটা নীচে দিলাম। প্রমাণটা একইরকম, তাই আর করে দিলাম না।

THEOREM

A curve $\gamma = (f,g)$ where $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ is rectifiable over $[a,b]$ iff both f and g have bounded variation on $[a,b]$.

Example 3: Show that the curve γ in $\mathbb{R}^2$ given on $[0,1]$ by

$$\gamma(x) = \begin{cases} \left(x, x^2 \sin \frac{1}{x}\right) & \text{if } x \neq 0 \\ (0,0) & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

is rectifiable.[3] **(2009.6c)**

SOLUTION:

We know that a curve (f,g) is rectifiable iff both f and g have bounded variation.

Here $f(x) = x$ is monotone, and hence have bounded variation on $[0,1]$.

Also

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \in (0,1] \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

is differentiable on $[a,b]$ and

$$g'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{if } x \in (0,1] \\ 0 & \text{if } x = 0, \end{cases}$$

which is bounded on $[0,1]$ because $\forall x \in [0,1]$

$$|g'(x)| \leq \left|2x \sin \tfrac{1}{x}\right| + \left|\cos \tfrac{1}{x}\right| \leq 2 \times 1 + 1 = 3.$$

We know that a function with bounded derivative has bounded variation.

So both f, g have bounded variation, and hence γ is rectifiable.

■

Example 4: Let $\gamma = (f,g)$ be a plane curve where f and g are defined by

$$f(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

and

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{if } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

State, with reasons, whether γ is rectifiable.[4] **(2007.9ai)**

SOLUTION: আগের অধ্যায়েই দেখেছি যে $g(x)$-এর মোটেই bounded variation নেই $[0,1]$-র উপর। সুতরাং γ আর rectifiable হয় কী করে? ■

Exercise 1: State with proper justification whether the following statement is true or false: The plane curve $\gamma = (f,g)$ where $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ are defined by

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

and $g(x) = x + 1$ is rectifiable.[3] **(2008.10ai)** ■

Exercise 2: Examine whether the curve γ in $\mathbb{R}^2$ given on $[0,1]$ by $\gamma(x) = (\tan x, x \cos \pi x)$ is rectifiable.[4] **(2010.7b)** ■

Exercise 3: Let $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{\pi}{x} & \text{if } x \in (0,1] \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = 3x^2 + \cos x.$$

Examine if the curve $\gamma = (f, g)$ is rectifiable.[4] **(2012.7d)** ■

Exercise 4: Let $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{if } \frac{1}{3^{n+1}} < x \leq \frac{1}{3^n}; \quad n = 0, 1, 2, ... \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

and

$$g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Prove that the curve $\gamma = (f, g)$ is rectifiable.[4] **(2011.7b)** ■

Exercise 5: Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be defined by $f(x) = [x]$ and $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ be defined by $g(x) = \cos x^3$. State with reasons whether the plane curve $\gamma = (f, g)$ is rectifiable.[3] **(2013.3b)** ■

DAY 55
Finding arc length

এই অধ্যায়ের গোড়ায় যে প্রশ্নটা দিয়ে শুরু করেছিলাম সেটার উত্তর কিন্তু এখনও পাই নি-- একটা curve (যাকে অনেক সময়ে arc-ও বলে) দেওয়া থাকলে তার দৈর্ঘ্য কী করে বার করব? এটুকু খালি জেনেছি যে, curve-টা যদি rectifiable না হয়, তবে তার দৈর্ঘ্য বার করতে যাওয়ার মানে হয় না। কিন্তু যদি rectifiable হয়? একটা খুব সহজ কায়দা আছে যেটা দিয়ে বহু rectifiable curve-এর দৈর্ঘ্য বার করে দেওয়া যায়। অবশ্য কিছু rectifiable curve থেকেই যায়, যাদের ক্ষেত্রে এই কায়দাটা খাটে না, কিন্তু সেগুলো নিয়ে লোকে বড় একটা মাথা ঘামায় না। এইবার এই সহজ কায়দাটা আমরা শিখব।

55.1 একটা সহজ কায়দা

কায়দাটা নানারকম curve-এর ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য, তবে curve-টা কিভাবে দেওয়া আছে তার উপর নির্ভর করে এর চেহারাটা সামান্য বদলায়। যদি curve-টা হয় কোনো function $f(x)$-এর গ্রাফ তবে একটা রূপ, আবার যদি curve-টা parametric form-এ দেওয়া থাকে তবেই একটু অন্যভাবে লিখে নিলে সুবিধা হয়। আবার polar form-এ দিলে আরেকটু অন্যভাবে। একে একে আলোচনা করা যাক।

55.1.1 Graphs of functions

ধরো curve-টা দেওয়া আছে কোনো একটা function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$-এর গ্রাফ হিসেবে। যেমন $f(x) = x^2$ আর $a = 1, b = 2$ নিলে পাব Fig 12-এর মোটা করে দেখানো অংশটা। এরকম curve-এর দৈর্ঘ্য বার করার মোক্ষম হাতিয়ার হল নীচের theorem-টা--

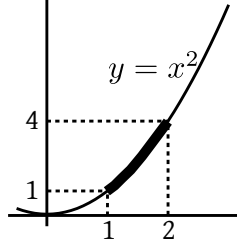
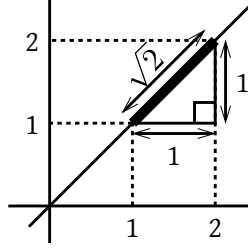
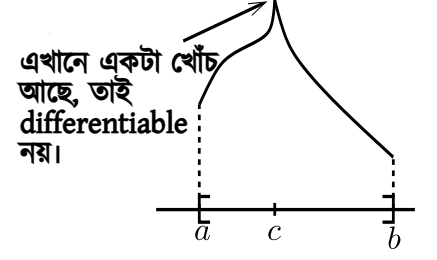



Fig 12 **Fig 13** **Fig 14**

> THEOREM
>
> If $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is a differentiable function and $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ is Riemann integrable over $[a,b]$, then the graph of $f(x)$ is rectifiable over $[a,b]$, and has length
>
> $$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

এটা আমরা একটু পরে প্রমাণ করব, আপাততঃ একটা উদাহরণ দেখে বুঝে নিই।

Example 5: $[1,2]$-এর উপরে $f(x) = x$-এর গ্রাফটার দৈর্ঘ্য এই theorem-টার সাহায্যে বার কর।

SOLUTION: এখানে গ্রাফটা একটা সরলরেখা (Fig 13) তাই Pythagoras লাগালেই উত্তর পাওয়া যায় $\sqrt{2}$. কিন্তু আমরা আমাদের নতুন theorem-টা লাগিয়েও দেখতে চাই সেই একই উত্তর আসে কিনা।
এখানে $f(x)$ দিব্যি differentiable, এবং $f'(x) = 1$ হল $[1,2]$-এর উপরে Riemann integrable. সুতরাং দৈর্ঘ্যটা হবে

$$\int_1^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1+1^2}dx = \sqrt{2},$$

ঠিক যেমনটা হওয়া উচিত ছিল। ■

কায়দাটা বেশ সহজ, কিন্তু integration-এর ভিতরে ওই square root-টা আছে বলে অনেক সময়ে সহজ $f(x)$-দের বেলাতেও integration-টা করা ঝকমারি হয়। তার স্বাদ পাবে নীচের অংকটা করলেই, যেখানে আমরা Fig 13 নিয়ে কাজ করব।

Exercise 6: Find the length of the graph of $f(x) = x^2$ above $[1,2]$.
HINT:
অংকটা করে দেব না, খালি বলে দিই যে $2x = \sinh u$ বসালে উপকার হতে পারে। উত্তরটা দেখতে বেশ বিচ্ছিরি! ■

আচ্ছা, যদি $f(x)$-টা হয় Fig 14-এর মত? এটা তো এক জায়গায় differentiable নয়, তবে theorem-টা লাগাব কী করে? এক্ষেত্রে আমরা $[a,b]$-এ দুভাগে ভেঙে নেব, $[a,c]$ আর $[c,b]$. এবার দুটো অংশে আলাদা করে theorem-টা লাগাব।

Exercise 7: Prove that the plane curve $\gamma(t) = (t, |t|)$, $-1 \le t \le 1$ is rectifiable. Find the length of this curve.[2+1] **(2014.3c)** ■

55.1.2 Parametric form

যদি curve-টা কোনো function-এর গ্রাফ হিসেবে না দিয়ে parametric form-এর দেয় (মানে প্রতিটা point-কে $(x(t), y(t))$ হিসেবে দেয়, যেখানে $t \in [a, b]$ হল parameter), তাহলেও একইরকম কায়দা লাগানো যাবে, যেটা নীচের theorem-এ বলা হয়েছে।

THEOREM

Let a curve γ be parametrised as $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, where $x(t), y(t)$ are differentiable functions and $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ is Riemann integrable over $[a, b]$, then γ must be rectifiable over $[a, b]$, and has the length

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

এটা যে আগের কায়দাটারই একটা generalisation, সেটা বোঝা সহজ। যদি curve-টা $y = f(x)$-এর গ্রাফ হত, তবে আমরা সেটাকে এইভাবে parametric form-এ লিখতে পারি--

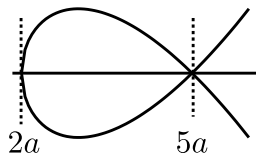
$$x = t \quad \text{আর} \quad y = f(t).$$

তাহলেই লক্ষ কর এই theorem-এর $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$-টা দিব্যি আগের theorem-এর $\sqrt{1 + (f'(t))^2}$-তে পরিণত হবে।
কিছু অংক করি।

Example 6: Find the whole length of the loop of the curve

$$9ay^2 = (x - 2a)(x - 5a)^2, \quad a > 0.$$

(2007.9aii)
SOLUTION: প্রথমে বোঝা দরকার এখানে “loop”-এর প্রসঙ্গ কোথা থেকে এল। লক্ষ কর যে, বাঁদিকে আছে $9ay^2$, যেটা সর্বদাই ≥ 0. সুতরাং ডানদিকটাকেও ≥ 0. হতে হবে। ডানদিকে $(x - 5a)^2$ জিনিসটাকে নিয়ে সমস্যা নেই, ওটা সব সময়েই ≥ 0, কিন্তু $x - 2a \geq 0$ হবার জন্য $x \geq 2a$ চাই।
যখন ডানদিকটা > 0, তখন y-এর ঠিক দুটো করে value আসবে, একটা positive, অন্যটা তারই negative. আর ডানদিকটা 0 হলে y-ও 0 হতে বাধ্য। সুতরাং বোঝা যাচ্ছে যে $x = 2a$-তে $y = 0$ হবে, তার পর y-এর দুটো করে value পাবো। যেই $x = 5a$ হবে অমনি y ফের 0 হয়ে যাবে, এবং তার পর থেকে y সব সময়েই দুটো করে value নেবে। মানে ছবিটা হবে Fig 15-এর মত। ওটাকে যদি একটা মাছের ছবি বলে ভাবো, তবে loop হল ল্যাজাটা বাদ দিলে যেটুকু পড়ে থাকে সেইটা। দেখতেই পাচ্ছ যে x-axis-এর উপরে আর নীচে যে অংশদুটো আছে তারা পরস্পরের reflection. সুতরাং খালি উপরের অংশের দৈর্ঘ্য বার করে দ্বিগুণ করে দিলেই চলবে। উপরের অংশ মানে positive square root–

Fig 15

Let

$$f(x) = \tfrac{1}{3\sqrt{a}}\sqrt{x-2a}(5a-x) \quad x \in [2a, 5a].$$

Then

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{3\sqrt{a}}\left[\frac{1}{2\sqrt{x-2a}}(5a-x) - \sqrt{x-2a}\right] \\ &= \frac{1}{6\sqrt{a}\sqrt{x-2a}}\left[(5a-x) - 2(x-2a)\right] \\ &= \frac{9a-3x}{6\sqrt{ax-2a^2}} \\ &= \frac{3a-x}{2\sqrt{ax-2a^2}} \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} 1 + (f'(x))^2 &= 1 + \frac{(3a-x)^2}{4(ax-2a^2)} \\ &= 1 + \frac{(u-a)^2}{4au} \quad \left[\text{putting } u = x-2a\right] \\ &= \frac{(u+a)^2}{4au}. \end{aligned}$$

এবার 2 দিয়ে গুণ করব--

Hence by symmetry the required length is

$$2\int_{2a}^{5a}\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 2\int_0^{3a}\frac{u+a}{2\sqrt{au}}du = \cdots = 2\sqrt{3}a.$$

■

Example 7: Find the length of one arch of the cycloid

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1-\cos t), \quad (a > 0).$$

[3] **(2011.7c,2008.10aii)**

SOLUTION: Cycloid-টার একটা arch-এর ছবি দেখিয়েছি Fig 16-এ। লক্ষ কর এটা শুরু হয়েছে $t = 0$-তে এবং শেষ হয়েছে $t = 2\pi$-তে, কারণ t-এর এই দুটো value-তে $y = 0$ হয়। Arch-টার সর্বোচ্চ বিন্দুতে $t = \pi$, কারণ সেখানে y সবচেয়ে বেশী। যেহেতু arch-টা এই সর্বোচ্চ বিন্দুর দুইপাশে symmetric, তাই এই বিন্দুর একপাশের দৈর্ঘ্য বার করে দ্বিগুণ করে দিলেই arch-টার মোট দৈর্ঘ্য পাওয়া যাবে।

By symmetry the required length is

$$
\begin{aligned}
& 2\int_0^{\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\
= \quad & 2a \int_0^{\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} dt \\
= \quad & 2a \int_0^{\pi} \sqrt{(2 - 2\cos t)} dt \\
= \quad & 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi} \sqrt{(1-\cos t)} dt \\
= \quad & 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi} \sqrt{1 - (1 - 2\sin^2 \frac{t}{2})} dt \\
= \quad & 4a \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt \\
= \quad & -8a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} \\
= \quad & 8a.
\end{aligned}
$$

■

Example 8: Find the perimeter of the astroid $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$.[3] **(2009.9b)**

SOLUTION: Astroid-রা দেখতে কেমন হয় না জানা থাকলে এই অংকটা করা একটু মুস্কিল। আমাদের astroid-টার ছবি Fig 17-এ রয়েছে। লক্ষ কর যে চারটে quadrant-এ যে অংশগুলো রয়েছে তার সবাই একে অপরের reflection (প্রতিফলন)। সুতরাং ওদের দৈর্ঘ্যগুলো সমান। যেকোনো একজনের দৈর্ঘ্য বার করে চারগুণ করে দিলেই মোট perimeter পেয়ে যাব। আমরা প্রথম quadrant-এর অংশটুকু নিয়ে কাজ করব, মানে $t = 0$ থেকে $t = \frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত।

Fig 16

$t = \pi$
$t = 0$
$t = 2\pi$

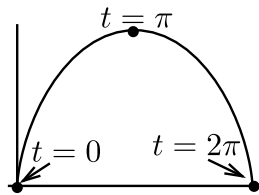
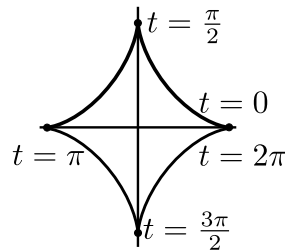



Fig 17

By symmetry, the required length is

$$\begin{aligned}
& 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt \\
= & 24\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-\cos^2 t\sin t)^2+(\sin^2\cos t)^2}dt \\
= & 24\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}dt \\
= & 24\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}dt \\
= & 24\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tfrac{1}{4}\sin^2 2t}dt \\
= & 12\int_0^{\pi/2}\sin 2t dt \\
= & -6\cos 2t|_0^{\pi/2} \\
= & 12.
\end{aligned}$$

■

55.1.3 Polar form

Polar form-এর ক্ষেত্রে আমরা জানি যে $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$ নেওয়া হয়। আমরা r-কে θ-র function হিসেবে লিখি--ধরো $r = r(\theta)$. সুতরাং সব মিলিয়ে হল

$$\begin{aligned}
x &= r(\theta)\cos\theta, \\
y &= r(\theta)\sin\theta.
\end{aligned}$$

এটাও কিন্তু একধরণের parametric form-ই হল, যেখানে parameter-এর ভূমিকা পালন করছে θ. যদি $(x')^2+(y')^2$ বার কর দেখবে কাটাকুটি হয়ে গিয়ে দিব্যি $(r')^2+r^2$ হয়ে যাচ্ছে। সুতরাং--

THEOREM

Let a curve be given in polar form as $r = r(\theta)\quad \theta\in[a,b]$, where $r(\theta)$ is a differentiable function and $\sqrt{(r'(\theta))^2+(r(\theta))^2}$ is Riemann integrable over $[a,b]$, then the curve must be rectifiable over $[a,b]$, and has length

$$\int_a^b\sqrt{(r'(\theta))^2+(r(\theta))^2}d\theta.$$

Example 9: Find the perimeter of the cardioid $r = a(1+\cos\theta)$.[3] **(2010.1i)**

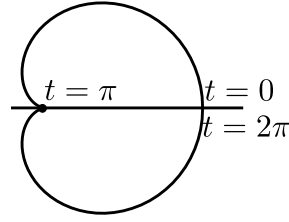



Fig 18

SOLUTION: আগের অংকটার মত এখানেও Fig 18-এর মত ছবিটা জানা থাকলে symmetry ব্যবহার করে কাজ সংক্ষেপ করা যাবে। লক্ষ কর যে cardioid-টার উপরের অর্ধেক আর নীচের অর্ধেক দেখতে একইরকম। সুতরাং খালি উপরের অংশটুকুর দৈর্ঘ্য বার করে দ্বিগুণ করে দিলেই চলবে।

$$
\begin{aligned}
2\int_0^{\pi}\sqrt{(r')^2+r^2}d\theta &= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}d\theta \\
&= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta \\
&= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}d\theta \\
&= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\tfrac{\theta}{2}}d\theta \\
&= 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{4\cos^2\phi}d\phi \quad \left[\text{ putting } \phi=\tfrac{\theta}{2}\right] \\
&= 8a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2\phi}d\phi \\
&= 8a\int_0^{\pi/2}\cos\phi d\phi \quad \left[\because \cos\phi\geq 0 \text{ for } \phi\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right]\right] \\
&= 8a\,\sin\phi|_0^{\pi/2} \\
&= 8a.
\end{aligned}
$$

■

নীচের অংকটা একইরকম, খালি $\cos\theta$-র চিহ্নটা উল্টেছে। তাতে কি সত্যিই কিছু এসে যায়?

Exercise 8: Determine the perimeter of the cardioid

$$r=a(1-\cos\theta), \quad (a>0).$$

[3] (**2013.3c**) ■

DAY 56
প্রমাণ এবং intrinsic form

56.1 সহজ কায়দার জটিল প্রমাণ

THEOREM

If $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is a differentiable function and $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ is Riemann integrable over $[a,b]$, then the graph of $f(x)$ is rectifiable over $[a,b]$, and has length

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Proof: প্রথমে rectifiability প্রমাণ করি।

First part: Let $g(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$.

$\because g(x)$ is Riemann integrable over $[a,b]$,

$\therefore g(x)$ is bounded over $[a,b]$.

$\therefore f'(x)$ is bounded over $[a,b]$, since $|f'(x)| \leq \sqrt{1+(f'(x))^2}$.

$\therefore f(x)$ has bounded variation over $[a,b]$.

কারণ আমরা গত অধ্যায়ে শিখেছিলাম যে, কোনো function-এর derivative যদি bounded হয় তবে function-টা bounded variation হতে বাধ্য।

$\therefore$ the graph of $f(x)$ over $[a,b]$ is rectifiable.

এবার দেখাব যে গ্রাফের দৈর্ঘ্যটাকে integral-টা দিয়ে লেখা যাবে। কিছু notation লিখে শুরু করি--

Second part:

For any $P \in \mathbb{P}([a,b])$

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b,$$

let $\ell(P,f)$ denote the length of the polyline joining the points

$$(x_0, f(x_0)), \cdots, (x_n, f(x_n)).$$

এখানে "polyline" বলে একটা শব্দ ব্যবহার করলাম। যদি কয়েকটা point নিয়ে তাদেরকে পরপর সরলরেখা টেনে যোগ কর, তবে যে জিনিসটা পাওয়া যায় তাকেই বলে একটা polyline. যেমন Fig 19-এ ড্যাশ্ড্যাশ্ লাইনটা।

Let $\delta x_i = x_i - x_{i-1}$ and $\delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$.

Fig 19 দ্যাখো।

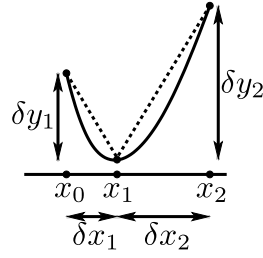



Fig 19

Then

$$\begin{aligned}\ell(P,f) &= \sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\delta x_i)^2+(\delta y_i)^2}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\delta x_i\sqrt{1+\left(\frac{\delta y_i}{\delta x_i}\right)^2}.\end{aligned}$$

We are given that g is Riemann integrable on $[a,b]$. So

$$\sup\{L(P,g)\ :\ P\in\mathbb{P}([a,b])\}=\inf\{U(P,g)\ :\ P\in\mathbb{P}([a,b])\}=\int_a^b g(x)dx.$$

Also f is rectifiable over $[a,b]$. So

$$\sup\{\ell(P,f)\ :\ P\in\mathbb{P}([a,b])\}=\text{length}(\gamma),$$

where γ is the graph of $f(x)$ over $[a,b]$.

এই কাজটা আমরা পাঁচধাপে ভেঙে ভেঙে করব। ভয় নেই, ধাপগুলো ছোটো ছোটো।

Step 1: Shall show

$$\forall P\in\mathbb{P}([a,b])\quad L(P,g)\le\ell(P,f)\le U(P,g).$$

বুঝতেই পারছ যে এটা দেখাতে পারলেই অনেক কাজ হবে। যদি P যথেষ্ট সূক্ষ্ম নিই, তবে $L(P,g)$ আর $U(P,g)$ দুজনেই integral-টার খুব কাছে চলে আসবে, সুতরাং তাদের মাঝখানে পড়ে $\ell(P,f)$-ও integral-টার কাছে যেতে বাধ্য হবে।

$\forall P$ Take any $P\in\mathbb{P}([a,b])$.

Now by Lagrange's MVT,

$$\tfrac{\delta y_i}{\delta x_i}=\tfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi_i),$$

for some $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$.

Thus

$$\ell(P,f) = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i g(\xi_i).$$

So

$$L(P,g) \leq \ell(P,f) \leq U(P,g),$$

as required.

এবার আমরা $\ell(P,f)$-এর সঙ্গে $L(P,g)$-এর সম্পর্ক নিয়ে মাথা ঘামাব।

Step 2: So we have

$$\forall P \in \mathbb{P}([a,b]) \quad L(P,g) \leq \ell(P,f).$$

Taking sup for $P \in \mathbb{P}([a,b])$,

$$\int_a^b g(x)dx \leq \text{length}(\gamma).$$

আমরা একইভাবে $\ell(P,f) \leq U(P,g)$ থেকে উল্টো inequality-টা পেতে চাই। কিন্তু এবার একটু সমস্যা হবে। $L(P,g)$ আর $\ell(P,f)$ দুজনের বেলাতেই sup নেওয়া হচ্ছিল। কিন্তু এবার $U(P,g)$-এর inf আর $\ell(P,f)$-এর sup নিতে হবে। সেই জন্য মাঝে একটা ছোট্টো বাড়তি ধাপ লাগবে--

Step 3: Shall show

$$\forall P,Q \in \mathbb{P}([a,b]) \quad \ell(P,f) \leq U(Q,g).$$

$\forall P,Q$

Take any $P,Q \in \mathbb{P}([a,b])$.

Let $R = P \cup Q$.

Then

1. $\ell(P,f) \leq \ell(R,f)$,
2. $U(R,g) \leq U(Q,g)$,
3. $\ell(R,f) \leq U(R,g)$.

So

$$\ell(P,f) \leq \ell(R,f) \leq U(R,g) \leq U(Q,g),$$

as required.

এইবার আমরা নিশ্চিন্তে এক দিকে sup আর অন্যদিকে inf নিতে পারব।

Step 5: Again, we have

$$\forall P,Q \in \mathbb{P}([a,b]) \quad \ell(P,f) \leq U(Q,g).$$

Fig 20

Taking sup over $P \in \mathbb{P}([a,b])$ and inf over $Q \in \mathbb{P}([a,b])$,

$$\text{length}(\gamma) \leq \int_a^b g(x)dx.$$

So

$$\text{length}(\gamma) = \int_a^b g(x)dx,$$

as required.

[Q.E.D]

56.2 Intrinsic form

একটা curve-কে বিভিন্নভাবে প্রকাশ করার পথ আমরা জানি--

1. কোনো function $f(x)$-এর গ্রাফ হিসেবে। এর জন্য প্রথমে একটা x- আর y-axis খাড়া করে নিতে হয়। যদি y-axis-এর parallel কোনো লাইন curve-টাকে একাধিকবার ছেদ করে, তবে অবশ্য curve-টাকে কোনো function-এর গ্রাফ হিসেবে লেখা যায় না।

2. parametrically লিখতে পারি $(x(t), y(t))$, ঠিক যেন একটা গাড়ি যাচ্ছে যার t সময়ে অবস্থান হল $(x(t), y(t))$. গাড়িটার চাকার দাগ হল আমাদের curve-টা। এক্ষেত্রেও শুরুতে একজোড়া axes খাড়া করে নিতে হয়।

3. polar coordinate ব্যবহার করে লিখতে পারি (r, θ) দিয়ে। এর জন্য প্রথমে একটা point ঠিক করে নিতে হয় (যাকে বলে pole বা origin) এবং সেখান থেকে একটা লাইন টেনে নিতে হয়, যেটা থেকে θ মাপব।

এবার আমরা এরকম আরেকটা কায়দা শিখব। সেটা বোঝার জন্য একটা উপমা দিয়ে শুরু করি। ধরো রাস্তায় একটা গাড়ি তোমায় জিজ্ঞাসা করল সবচেয়ে কাছের পেট্রল পাম্পে কী করে যেতে হয়। পেট্রল পাম্পের রাস্তাটা দেখানো আছে Fig 20-এ। তোমার কাজ হল ছবির curve-টাকে এমনভাবে বর্ণনা করা যেন গাড়ির ড্রাইভার সেই পথে গাড়ী চালাতে পারে। তুমি যদি curve-টাকে $f(x)$ বা $(x(t), y(t))$ বা (r, θ) দিয়ে বোঝাতে যাও--

> "প্রথমে উত্তর-দক্ষিণ বরাবর একটা axis কল্পনা করুন, তারপর...",

তবে ড্রাইভার বেচারীর দুরবস্থা বুঝতেই পারছ। ড্রাইভার যদি অংকে মহা পণ্ডিতও হয়, তাও সুবিধা হবে না, কারণ গাড়ির ভিতর বসে সে কী করে কোনো একটা কাল্পনিক লাইন বা বিন্দু থেকে নিজের দূরত্ব জানতে পারবে? গাড়ির ভিতর বসে খালি দুটো জিনিস বোঝা যায়--এক, রাস্তা বরাবর কত দূরত্ব এসেছি, এবং এই মুহূর্তে গাড়ির মুখ কোন দিকে। সুতরাং তোমার পক্ষে বুদ্ধিমানের কাজ হবে বলা--প্রথমে সোজা চলতে থাকুন, মাইলদেড়েক যাওয়ার পর বাঁদিকে 90° ঘুরে গিয়ে আরও মাইল দেড়েক গেলেই পেট্রল পাম্প পাবেন।

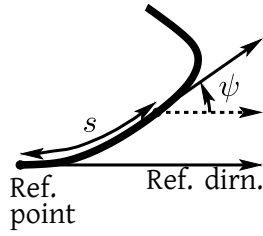
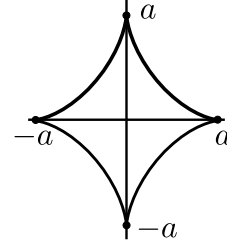



Fig 21 **Fig 22**

এই যে বর্ণনাটা করলাম মোটামুটিভাবে একেই বলে curve-টার intrinsic form. এটা "intrinsic" কারণ এর জন্য গাড়ির চলার পথের বাইরে কোনো বিন্দু বা লাইনের প্রয়োজন হচ্ছে না। এবার অংকের ভাষায় লিখি।
ধরো Fig 21-এর মত একটা curve আছে। এটাকে intrinsic-ভাবে লেখার জন্য প্রথমে দুটো জিনিস নিতে হবে--এক, curve-টার কোনো একটা প্রান্ত বিন্দু (যাকে reference point নেব)। এবং দুই, কোনো একটা direction (একে বলব reference direction). এইবার মনে করো একটা গাড়ি ওই বিন্দু থেকে শুরু করে curve-টা ধরে অন্যপ্রান্তের দিকে চলতে শুরু করেছে। ধরো curve বরাবর s দূরত্ব যাবার পর গাড়ির মুখ reference direction-এর সঙ্গে ψ কোণ করে আছে। যদি আমরা ψ-কে s-এর ফর্মুলা দিয়ে লিখতে পারি তবে সেটাই হবে curve-টার intrinsic form. ব্যাপারটাকে এইভাবে ভাবতে পারো--ড্রাইভারের সামনে যেসব বিভিন্ন মিটার বসানো থাকে, তার মধ্যে একটা হল দূরত্ব মাপার জন্য। চাকাগুলো কতবার ঘুরেছে সেটা অনুযায়ী দূরত্বটা মাপা হয়। Intrinsic form-এর s-টা যেন এই মিটারে দেখানো সংখ্যাটা। আর ψ নিয়ন্ত্রিত হচ্ছে ড্রাইভারের হাতে ধরা স্টিয়ারিং হুইল দিয়ে। সুতরাং intrinsic form-টা যেন ড্রাইভারের প্রতি নির্দেশ--

"যখন মিটারে s দেখাবে তখন গাড়িটাকে ψ অভিমুখে ঘুরিয়ে নিন।"

Intrinsic form জিনিসটা বেশ কাজের বটে কিন্তু এর তিনটে সমস্যা আছে--

1. কোনো curve-এর বর্ণনা যদি function-এর গ্রাফ হিসেবে বা parametric ভাবে, বা polar coordinate-এ দেওয়া থাকে তা থেকে intrinsic form বার করাটা সাধারণতঃ খুব সহজ হয় না।

2. কোনো curve-এর intrinsic form দেওয়া থাকলে তা থেকে parametric ইত্যাদি অন্যান্য বর্ণনা বার করা সাধারণতঃ আরো দুঃসাধ্য কাজ।

3. যদি curve-টা কোথাও differentiable না হয় (মানে ভাঙা বা খোঁচ থাকে) তবে intrinsic form কাজ করে না, কারণ সেই সব point-এ tangent আঁকা যায় না, তাই গাড়ির অভিমুখ (অর্থাৎ ψ) সেখানে undefined.

এবার একটা অংক দেখি যেখানে আমাদের একটা curve-এর intrinsic equation বার করতে হবে।

Example 10: Find the intrinsic equation of the astroid $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ when the arc length is measured from a cusp on the x-axis.[3] **(2012.1i)**
SOLUTION: প্রথমে আন্দাজ করে নিই যে curve-টা দেখতে কিরকম। এখানে $x^{2/3}=(\sqrt[3]{x})^2$. তাই x-এর চিহ্ন ওল্টালেও $x^{2/3}$ একই থাকবে। একইরকম কথা বলা যায় y-এর ক্ষেত্রেও। তার মানে যদি কোনো point (x,y) এই curve-টার উপর থাকে, তবে $(\pm x,\pm y)$-ও থাকবে। ফলে চারটে quadrant-এ curve-টার যে চারটে অংশ থাকবে তারা পরস্পরের reflection (প্রতিফলন) হবে। অতএব খালি প্রথম quadrant-এর অংশটুকু (মানে যখন $x,y\geq 0$) বুঝলেই চলবে। তাহলে

$$y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}.$$

বুঝতেই পারছ যে $x>a$ হলে square root-এর ভিতরে একটা negative জিনিস চলে আসবে। তাই $x\in[0,a]$ নিতে হবে। একই যুক্তিতে $y\in[0,a]$-ও হতে হবে। Differentiate করলে পাবে

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}(-\frac{2}{3}x^{-1/3})=-(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}.$$

লক্ষ কর $x = a$ হলে derivative-টা 0, মানে curve-টা $x = a$-তে এসে horizontal হয়ে পড়ছে। আবার $x \to 0+$ হলে derivative-টা $-\infty$-র দিকে যাচ্ছে, মানে curve-টা $x = 0$-র কাছে vertical হয়ে উঠছে। সুতরাং curve-টা দেখতে নিশ্চয়ই Fig 22-এর মত।

লক্ষ কর যে curve-টায় কয়েকটা cusp বা খোঁচ আছে। সুতরাং পুরো curve-টার intrinsic equation সম্ভব নয়। আমরা খালি প্রথম quadrant-এর অংশটুকুর intrinsic equation বার করব। এখানে বলে দিয়েছে যে x-axis-এর উপরের একটা cusp-কে reference point নিতে হবে। আর reference direction নেব +-ve x-axis বরাবর।

> We consider the part of the curve in the first quadrant with reference direction along the +-ve x-axis.
>
> Then
> $$y = \underbrace{(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}}_{f(x),\text{ say}} \text{ for } x \in [0, a].$$

এবার curve-টার উপরে যে কোনো একটা বিন্দু নেব। যেহেতু y হল x-এর একটা function, তাই কোনো point-এ x জানলেই point-টা নির্ধারিত হয়ে যায়। আমরা প্রথমে দেখব এই point-এ tangent-টার slope কত। এই slope-টা যেমন একদিক দিয়ে দেখলে $\frac{dy}{dx}$, তেমনি অন্যদিক দিয়ে দেখলে $\tan\psi$. সুতরাং $\frac{dy}{dx}$ বার করলেই আমরা $\tan\psi$-কে x দিয়ে লিখতে পারব।

> So
> $$f'(x) = \tfrac{3}{2}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}(-\tfrac{2}{3}x^{-1/3}) = -(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}. \qquad (*)$$

এরপর আমরা দেখব এই point-টা অব্ধি আসতে curve বরাবর কত দূরত্ব s অতিক্রান্ত হয়েছে। অর্থাৎ s-কে x দিয়ে প্রকাশ করব।

> So
> $$\begin{aligned} 1 + \big(f'(x)\big)^2 &= 1 + (a^{2/3} - x^{2/3})x^{-2/3} \\ &= 1 + \left(\tfrac{a}{x}\right)^{2/3} - 1 \\ &= \left(\tfrac{a}{x}\right)^{2/3}. \end{aligned}$$

এইবার আমাদের কাজ হল এইটাকে integrate করা। Integration-টা হবে $[x, a]$-র উপরে। লক্ষ কর x-কে আগে লিখেছি কারণ $x \leq a$. যদি লিখি $\int_x^a \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$, তবে সেটা ঠিক ভালো দেখায় না, কারণ integral-এর ভিতরেও x আবার নীচের প্রান্তেও x, এতে দুই x-এর মধ্যে গোল বেঁধে যেতে পারে। তাই আমরা ভিতরের x-এর বদলে t লিখব--

> So arc length over $[x, a]$ is
> $$s = \int_x^a \sqrt{1 + \big(f'(t)\big)^2}dx = \int_x^a \left(\tfrac{a}{t}\right)^{1/3} dx = \tfrac{3}{2}a^{1/3}(a^{2/3} - x^{2/3}). \qquad (**)$$

ব্যস্, আসল কাজ শেষ! (*) আর (**) থেকে x-টাকে সরিয়ে ফেলতে পারলেই ψ এবং s-এর মিলনের পথে আর কোনো বাধা থাকে না।

So

$$a^{2/3} - x^{2/3} = \tfrac{2}{3}a^{-1/3}s,$$

which gives

$$x^{1/3} = \left(a^{2/3} - \tfrac{2}{3}a^{-1/3}s\right)^{1/2} = a^{1/3}\left(1 - \tfrac{2s}{3a}\right)^{1/2}.$$

So

$$\begin{aligned}\tfrac{dy}{dx} &= -(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3} \\ &= -\sqrt{\tfrac{2}{3}a^{-1/3}s} \times a^{-1/3}\left(1 - \tfrac{2s}{3a}\right)^{-1/2} \\ &= -\sqrt{\tfrac{2}{3}\tfrac{s}{a}\left(1 - \tfrac{2s}{3a}\right)^{-1}} \\ &= -\left[\tfrac{3a}{2s} - 1\right]^{-1/2}.\end{aligned}$$

So the intrinsic equation is

$$\tan\psi = -\left[\tfrac{3a}{2s} - 1\right]^{-1/2}.$$

■

Answers

1. False. **2.** Rectifiable. **3.** Not rectifiable. **6.** $\frac{1}{4}(\sinh^{-1} 4 - \sinh^{-1} 2) + \sqrt{17} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Chapter X
Fourier series

DAY 57
Fourier series

57.1 ব্যাপারটা কী?

এই অধ্যায়ে আমরা যা শিখতে চলেছি বিজ্ঞানে তার গুরুত্ব অপরিসীম। অংকের বিভিন্ন শাখার জন্ম হয়েছে এর থেকে, physics এবং electronics-এও এর প্রচুর ভূমিকা। সুতরাং বুঝতেই পারছ যে এই একটা বিষয় নিয়েই একটা মহাভারত লিখে ফেলা যায়। আমরা অবশ্য সে চেষ্টা করব না, খালি সহজ ধারণাটুকু জানলেই আমাদের কাজ চলবে।
একটা উপমা দিয়ে শুরু করি। মনে করো গ্রাফ কাগজে একটা তীরচিহ্ন আঁকলাম origin থেকে কোনো বিন্দু (u_1, u_2) পর্যন্ত। Fig 1 দ্যাখো। এরকম তীর চিহ্নকে আমরা একটা vector বলে থাকি

$$\vec{u} = (u_1, u_2).$$

যদি এরকম দুটো vector নিই $\vec{u} = (u_1, u_2)$ আর $\vec{v} = (v_1, v_2)$, তবে তাদের dot product-এর সংজ্ঞা ছিল $u_1v_1 + u_2v_2$. আমরা এটাকে এই অধ্যায়ে এভাবে লিখব

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Dot product দিয়ে জানা যায় দুটো vector পরস্পরের সঙ্গে perpendicular কি না। যদি dot product-টা শূন্য হয়, তবে perpendicular, নইলে নয়।

Exercise 1: Fig 2-তে যে দুটো vector রয়েছে, ওদের dot product নিয়ে দ্যাখাও যে ওরা পরস্পরের সঙ্গে perpendicular. ■

Fig 1

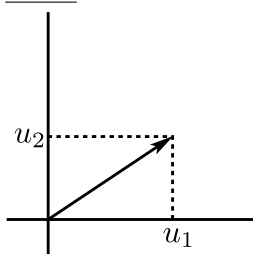



Fig 2

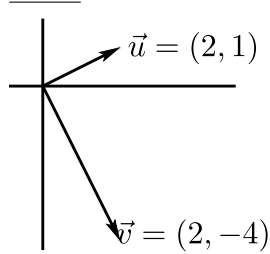
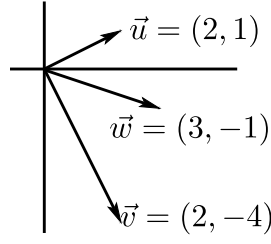
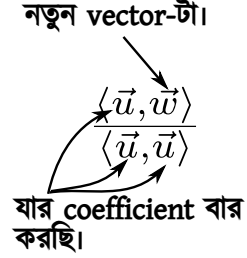



Fig 3 **Fig 4**

এবার তৃতীয় কোনো একটা vector নাও $\vec{w}$, যেমন Fig 3-তে দেখিয়েছি। তোমাকে একটা কাজ দেব--$\vec{w}$-কে $\vec{u}$ আর $\vec{v}$-র একটা linear combination হিসেবে লিখতে হবে, মানে এমন দুটো সংখ্যা $a, b \in \mathbb{R}$ বার করতে হবে যাতে

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \tag{*}$$

হয়। যেহেতু $\vec{u}$ আর $\vec{v}$ হল পরস্পরের সঙ্গে perpendicular, তাই এই কাজটা একটা কৌশল করে সহজে করা যাবে। কৌশলটা এইরকম--প্রথমে (*)-এর দুই দিকের dot product নাও $\vec{u}$-এর সঙ্গে--

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, a\vec{u} + b\vec{v} \rangle = a \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + b \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle .$$

সুতরাং পেয়ে গেলে

$$a = \frac{\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.$$

এর চেহারাটা মনে রাখার জন্য Fig 4 দেখে নাও।
একইভাবে (*)-এর দুই দিকের dot product যদি $\vec{v}$-এর সঙ্গে নাও, তবে পাবে

$$b = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

Exercise 2: আমাদের উদাহরণে a, b কী কী বেরোয় দ্যাখো। সত্যিই

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \tag{*}$$

হচ্ছে তো? আরও কয়েকটা উদাহরণ নিয়ে ভালো করে বুঝে দ্যাখো যে কৌশলটা সব সময়েই কাজ করে (মানে যখনই $\vec{u}$ আর $\vec{v}$ পরস্পরের সঙ্গে perpendicular হয়)। ■

এইবার আমরা এই একই কৌশল একটা সম্পূর্ণ অন্য জায়গায় লাগানোর চেষ্টা করব। প্রথমে কয়েকটা function নিয়ে শুরু করি, যারা সবাই $[-\pi, \pi]$-এর উপরে defined:

$$1, \quad \cos x, \quad \cos 2x, \quad ...,$$

আর

$$\sin x, \quad \sin 2x, \quad ....$$

আমরা দুটো function $f(x)$ আর $g(x)$-এর মধ্যে একটা নতুন ধরণের dot product দিচ্ছি-- Integration-টা দেখে ঘাবড়ে যেও না, এটা বস্তুতঃ আমাদের আগের dot product-টারই মত--সেখানে $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum u_i v_i$ বার করার জন্য গুণ করে যোগ করতে হত, আর এখানে গুণ করে integrate করছি।

একটা dot product বার করে একটু হাত পাকিয়ে নেওয়া যাক। ধরো $\sin x$ আর $\cos 2x$-এর dot product বার করছি--

$$\begin{aligned}\langle \sin x, \quad \cos 2x\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos 2x dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \big[\sin(2x+x) - \sin(2x-x)\big] dx \\ &= \cdots \\ &= 0.\end{aligned}$$

Exercise 3: আমরা যতগুলো function দিয়েছিলাম, তাদের যে কোনো দুটো নিয়ে dot product নিয়ে দ্যাখো, সব সময়েই শূন্য হবে। সুতরাং ভাবতে পারি যেন এই function-গুলো পরস্পরের সঙ্গে perpendicular! ■

এই dot product-গুলো সব শূন্য হল তার পিছনের মূল কারণ হল এই যে, $\sin(-\pi) = \sin\pi$ আর $\cos(-\pi) = \cos\pi$. যেহেতু integration-টা $-\pi$ থেকে π পর্যন্ত তাই শেষ ধাপে গিয়ে উপর নীচে কাটাকাটি হয়ে পড়ে থাকছে শূন্য। মজা হল এখানে $-\pi$ আর π-এর গুরুত্ব বেশী নয়, গুরুত্ব হল এইটার যে integration-এর দুই প্রান্তের দূরত্ব 2π. কারণ তুমি যাই $a \in \mathbb{R}$ নাও না কেন $\sin a = \sin(a + 2\pi)$ আর $\cos a = \cos(a + 2\pi)$ হবে। সুতরাং যদি আমরা dot product-টার সংজ্ঞা এইভাবে নিতাম--

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{a}^{a+2\pi} f(x)g(x)dx,$$

তাহলেও ধাপগুলো একই থাকত।

এবার ধরো একটা নতুন function দিলাম $f : [a, a + 2\pi] \to \mathbb{R}$. দিয়ে বললাম যে f-কে আমাদের ওই function-গুলোর linear combination হিসেবে লিখতে হবে। মানে এমন সব সংখ্যা $a_0, a_1, a_2, \ldots$ আর $b_1, b_2, \ldots$ পেতে হবে যাতে

$$f(x) = a_0 \cdot 1 + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{1}^{\infty} b_n \sin nx. \qquad (**)$$

হয়।

ব্যাপারটা অনেকটা আগেরই মতন, কিন্তু অন্ততঃ তিনটে গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য রয়েছে--

1. এখানে আমরা মোটেই আমাদের পরিচিত vector-দের নিয়ে কাজ করছি না, এখানে কাজ হচ্ছে function-দের নিয়ে,
2. এখানে dot product-টাও অন্যরকম,
3. ডানদিকে দুটো infinite series রয়েছে।

কিন্তু যদি এই তিনটে বড় বড় সমস্যাকে সম্পূর্ণ অগ্রাহ্য করে আমরা চোখ-কান বুঁজে সেই আগের কৌশলটাই লাগিয়ে দিই? তবে পাব--

$$a_0 = \frac{\langle f(x), 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}, \quad a_n = \frac{\langle f(x), \cos nx\rangle}{\langle \cos nx, \cos nx\rangle}$$

আর

$$b_n = \frac{\langle f(x), \sin nx\rangle}{\langle \sin nx, \sin nx\rangle}.$$

একটু অংক কষলেই দেখবে যে $\langle 1, 1\rangle = 2\pi$ আর

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \langle \cos nx, \quad \cos nx\rangle = \langle \sin nx, \quad \sin nx\rangle = \pi.$$

সুতরাং চোখ-কান বুঁজে কৌশলটা লাগিয়ে পাওয়া যাচ্ছে--

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

আমাদের পরিচিত vector-দের ক্ষেত্রে এই কৌশলটা সব সময়েই খাটে জানি, কিন্তু function-দের ক্ষেত্রেও কি খাটবে? মানে (**) কি সত্যিই হবে?
Physics-এর একটা গুরুতর সমস্যা নিয়ে ফ্রান্সের পণ্ডিতেরা এক সময়ে ভারী ব্যতিব্যস্ত ছিলেন। Fourier (উচ্চারণ "ফুরিয়ে", "ফুরিয়ার" নয়) নামে এক ভদ্রলোক function-দের ক্ষেত্রে ঠিক এই কৌশলটাই খাটিয়েই একটা সমাধান বার করেন। Fourier অবশ্য জানতেন না যে function-দের বেলায় কৌশলটা সত্যিই সবসময়ে খাটে কি না। তিনি আন্দাজে লাগিয়ে দিয়েছিলেন, এবং ওই অংকের ক্ষেত্রে সমাধানটা পরীক্ষালব্ধ তথ্যের সঙ্গে মিলে গিয়েছিল, এই যা। কিন্তু এর ফলে Fourier-এর নাম ছড়িয়ে পড়ল রাতারাতি। উৎসাহ পেয়ে অন্যেরাও একই ধরণের অন্য অংকের বেলাতেও একই কৌশল খাটানো শুরু করল, এবং দেখল যে অনেক সময়েই তাতে ঠিক উত্তর পাওয়া যাচ্ছে! সুতরাং কৌশলটা ঠিক কী ভুল স্থির হবার আগেই রীতিমত জনপ্রিয় হয়ে পড়ল। পরে গবেষণা করে জানা গেছে যে কৌশলটা function-দের বেলায় সব সময়ে কাজ করে না, যদিও অনেক সময়েই করে। এই সব নিয়ে আলোচনা করাই এই অধ্যায়ের উদ্দেশ্য।

57.2 Definition

আমরা যদি Fourier-র মত করেই এগোই, মানে কোনো কিছুর তোয়াক্কা না রেখে কৌশলটা লাগিয়ে দিই, তবে যে জিনিসটা পাব সেটাকে বলে Fourier series:

DEFINITION: **Fourier series**

Let $f : [a, a+2\pi] \to \mathbb{R}$ be a Riemann integrable function on $[a, a+2\pi]$ for some $a \in \mathbb{R}$. Its **Fourier series** is defined as

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right],$$

where

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

লক্ষ কর যে আমরা এইটা লেখার সময়ে কেমন গা বাঁচিয়েছি। যেহেতু integration করতে হচ্ছে তাই আগে থাকতেই ধরে নিয়েছি যে f হল $[a, a+2\pi]$-এর উপরে integrable. আর কোথাও কিন্তু বলিনি যে

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

হবে। খালি ডানদিকটাকে Fourier series নাম দিয়েছি মাত্র।
দেখতেই পারছ যে কোনো function f-এর Fourier series বার করতে হলে আসল খাটুনিটা যাবে $\int f(x)\sin nxdx$ আর $\int f(x)\cos nxdx$ বার করতে। কাজের সুবিধার জন্য কয়েকটা সহজ $f(x)$-এ জন্য এইদুটো integral কী কী হয় লিখে রাখি। এগুলো সবই integration by parts দিয়ে বার করা যায়--

$f(x)$	$\int f(x)\sin nxdx$	$\int f(x)\cos nxdx$
x	$\dfrac{\sin nx - nx\cos nx}{n^2}$	$\dfrac{nx\sin nx + \cos nx}{n^2}$
x^2	$\dfrac{2nx\sin nx - (n^2x^2-2)\cos nx}{n^3}$	$\dfrac{(n^2x^2-2)\sin nx + 2nx\cos nx}{n^3}$
e^{ax}	$\dfrac{e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)}{n^2+a^2}$	$\dfrac{e^{ax}(n\sin nx + a\cos nx)}{n^2+a^2}$

খবরদার, এগুলো যেন আবার মুখস্থ করে ফেলো না! এগুলো মোটেই standard integral নয়। এগুলো দিয়েছি যাতে এই বইটা পড়বার সময়ে একই integral বার বার করে কষতে গিয়ে অংক শেখার উৎসাহ না হারিয়ে যায়!
একটা Fourier series বার করে হাত পাকিয়ে নিই।

Example 1: Find the Fourier series of the periodic function f with period 2π defined as

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } -\pi \le x \le 0 \\ e^x & \text{if } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

(2005.9a)

SOLUTION: অংকটায় সামান্য ভুল আছে। যদি period 2π হতে হয়, তবে যেকোনো x-এর জন্যই $f(x) = f(x+2\pi)$ হওয়া উচিত। কিন্তু এখানে $x = -\pi$ নিলেই দেখবে যে $f(-\pi) = 0$ অথচ $f(-\pi+2\pi) = f(\pi) = e^\pi \neq f(-\pi)$. সুতরাং $f(x)$-এর সংজ্ঞায় হয় প্রথম লাইনে "$-\pi \le x$" না লিখে "$-\pi < x$" দেওয়া উচিত ছিল, অথবা দ্বিতীয় লাইনে "$x \le \pi$"-এর বদলে "$x < \pi$." উত্তরটা অবশ্য দুই ক্ষেত্রেই একই। এই $f(x)$-এর গ্রাফটা এঁকে দেখিয়েছি Fig 5-এ।

The series is

$$a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos nx + \sum_1^\infty b_n \sin nx,$$

Fig 5

where

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Here

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^x dx = \frac{e^\pi - 1}{2\pi},$$

Also, for $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \cos nx dx = \cdots = \left.\frac{e^x(n\sin nx + \cos nx)}{\pi(n^2+1)}\right|_0^\pi = \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{\pi(n^2+1)},$$

and

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \sin nx dx = \cdots = \left.\frac{e^x(\sin nx - n\cos nx)}{\pi(n^2+1)}\right|_0^\pi = \frac{n(1-(-1)^n e^\pi)}{\pi(n^2+1)}.$$

So the required Fourier series is

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

where a_0, a_n, b_n are as above.

এই জিনিসটাকে ছবি দিয়ে বোঝার চেষ্টা করা যাক। এই ছবিগুলো অবশ্য খালি হাতে আঁকা কঠিন। আমি এগুলো কম্পিউটার দিয়ে এঁকেছি বোঝানোর জন্য। আমরা এখানে function-এর infinite series নিয়ে কাজ করছি। সেটাকে ছবি দিয়ে বোঝার একটা কায়দা হল তার বিভিন্ন partial sum-গুলোর গ্রাফ আঁকা, মানে এদের গ্রাফ--

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx.$$

Fig 6-এ আমরা $f(x)$-এর গ্রাফের উপরে $S_5(x)$-এর গ্রাফটা এঁকেছি। $S_5(x)$-টা যেন একটা লতার মত $f(x)$-কে জড়িয়ে আছে। যদি তুমি $S_5(x)$-কে মনে কর পাঁচ দিন বয়সী লতানো গাছ, তবে পঞ্চাশ দিনের মাথায় তার রূপ হল $S_{50}(x)$, যেটা এঁকেছি Fig 7-এ। লক্ষ কর এই গ্রাফটা কিভাবে $f(x)$-কে আষ্টে-পৃষ্টে আঁকড়ে ধরেছে। খালি মাঝখানে $x = 0$-তে যেখানে $f(x)$-এ একটা discontinuity আছে, ওখানটায় লতাটা একটু লাফ দিয়েছে, আর দুই প্রান্তে $f(x)$-এর থেকে খানিকটা সরে গেছে। সেই একই লতার যখন একশো দিন বয়স হবে তখন সে হবে $S_{100}(x)$, যার চেহারা দেখতে পাচ্ছ Fig 8-তে। লক্ষ কর যে $f(x)$ আর $S_{100}(x)$-কে আর আলাদা করে চেনবার জো নেই। খালি 0-র কাছে একটা প্রায় vertical লাফ আছে, এবং দুইপ্রান্তের কাছে লতাটা কেমন যেন রহস্যজনকভাবে $f(x)$-এর থেকে বেঁকে গেছে। এই রহস্যের কিনারা আমরা শীঘ্রই করব। ■

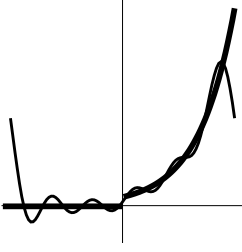
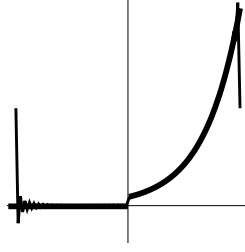
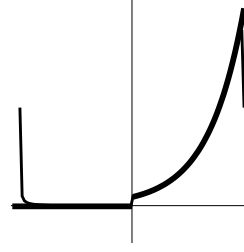



Fig 6 **Fig 7** **Fig 8**

DAY 58
কখন কাজ করে?

Fourier-র সাফল্যের পরে বিভিন্ন পণ্ডিত উঠে পড়ে লাগেন এই কৌশলটা কখন কাজ করে সেটা বার করতে। এঁদের মধ্যে সবচেয়ে উল্লেখযোগ্য ছিলেন Dirichlet (ডিরিচ্লে)। তিনি মাথা ঘামিয়ে বেশ কয়েকটা sufficient condition বার করেছিলেন যেগুলো পালিত হলে Fourier-র কৌশলটা কাজ করবেই। একটা sufficient condition ছিল এইরকম-- যদি $f:[a,a+2\pi]\to\mathbb{R}$ একটা bounded variation function হয়, তবে Fourier series-টা exist করবে এবং সব $x\in(a,a+2\pi)$-এর জন্যই সেটা converge করবে এই limit-এ--

$$\frac{f(x-)+f(x+)}{2}.$$

আর যদি $x=a$ বা $x=a+2\pi$ নাও, তাহলেও converge করবে, সেক্ষেত্রে limit-টা হবে

$$\frac{f(a+)+f\big((a+2\pi)-\big)}{2}.$$

লক্ষ কর যে যদি $f(x)$-টা কোনো $x\in(a,a+2\pi)$-তে continuous হয়, তবে $f(x-)=f(x+)=f(x)$ হবে। সুতরাং সেই সব x-এ Fourier series-টা দিব্যি $f(x)$-এই converge করবে।
খালি একটা মাত্র শর্ত চাপিয়েছিলাম--bounded variation, তাতেই কত কাজ হল। কারণ bounded variation শর্তটা খুব জোরালো জিনিস। ব্যাপারটা একটু তলিয়ে দেখি--

- Bounded variation function-রা সব সময়ে Riemann integrable-ও হয়, তাই Fourier series-এর existence নিয়ে কোনো সমস্যা হচ্ছে না।

- Bounded variation function-দের কোনো type 2 discontinuity থাকতে পারে না, তাই $f(x-), f(x+)$ ইত্যাদি সবাই দিব্যি finite সংখ্যা।

অবশ্য এমনটা মনে করে বোসো না যে, Dirichlet প্রথমেই ধাঁ করে বুঝে ফেলেছিলেন যে, এই শর্তটা লাগালেই কাজ হবে। উনি প্রথমে এর থেকে অনেক সহজ একটা শর্ত দিয়েছিলেন, যেটাকে অনেক সময়ে Dirichlet condition বলে।

58.1 Dirichlet condition

Dirichlet condition

Let $f : [a, a+2\pi] \to \mathbb{R}$ (where $a \in \mathbb{R}$) be a function such that

1. it is continuous everywhere on $[a, a+2\pi]$ except possibly for a finite number of discontinuities of type 1,
2. there is a partition
$$a = x_0 < \cdots < x_n = a + 2\pi$$
such that f is monotone over each open subinterval (x_{i-1}, x_i), $\quad i = 1, ..., n$.

Then the Fourier series of $f(x)$ is well-defined at each $c \in [a, a+2\pi]$, and converges to

- $f(c)$ if $c \in (a, a+2\pi)$ and f is continuous at c,
- $\frac{f(c-)+f(c+)}{2}$ if $c \in (a, a+2\pi)$ and f is not continuous at c,
- $\frac{f(a+)+f\big((a+2\pi)-\big)}{2}$ if $c = a$ or $c = a + 2\pi$.

শর্তগুলো দেখে হয়তো খুব লম্বা মনে হতে পারে, কিন্তু ছবি দেখলেই বুঝবে যে আসলে ওগুলো খুবই সোজা। Fig 9-তে একটা এমন function দেখিয়েছি যেটা Dirichlet condition পালন করে। প্রথম শর্তটা হল continuity বিষয়ে--কিছু finite-সংখ্যক point বাদে সর্বত্র continuous. সেটা তো চোখে দেখেই বুঝতে পারছ। প্রত্যেকটা discontinuity হল type 1, মানে হয় removable নয়তো jump discontinuity. দ্বিতীয় শর্তটা হল monotone হওয়া নিয়ে। সেটা Fig 10 দেখলেই বুঝবে।

অষ্টম অধ্যায়ের শুরুতে আমরা ছবি দিয়ে bounded variation function-এর যে আলোচনা করেছিলাম, সেটা থেকেই বুঝবে যে Dirichlet condition পালন করলে একটা function-এর পক্ষে bounded variation হওয়া ছাড়া পথ নেই।

Example 2: Show that the function $f(x) = e^x - 1$ satisfies the Dirichlet condition in $[0, 2\pi]$. Obtain the Fourier series of $f(x)$ in $[0, 2\pi]$.[6] **(2006.6b)**

SOLUTION:

First part: Here $f(x) = e^x - 1$ is continuous everywhere on $[0, 2\pi]$. Also it is an increasing function on $(0, 2\pi)$, because $f'(x) = e^x > 0$.

Hence it satisfies Dirichlet's condition.

Fig 9

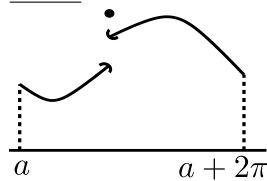
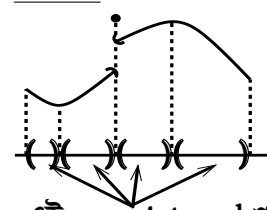



Fig 10

এই open interval-গুলোর প্রত্যেকটার উপরে function-টা monotone.

Second part: The Fourier series is

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right],$$

where

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

এইবার এই integral-গুলো কষতে হবে। এই অধ্যায়ের শুরুতে যে কয়টা integral-এর তালিকা দিয়েছিলাম, সেগুলো ব্যবহার করে চট্ করে মিলিয়ে দ্যাখো নীচের coefficient-গুলো ঠিক বার করেছি কিনা। ধাপগুলো ডট্ ডট্ দিয়ে বাদ দিয়ে গেছি।

In this problem

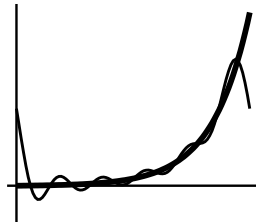
$$\begin{aligned} a_0 &= \cdots = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} - 1, \\ a_n &= \cdots = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi(1+n^2)}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \cdots = \frac{n(1-e^{2\pi})}{\pi(1+n^2)}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

যদি $n = 5$ নিই তবে Fourier series-টা $f(x)$-এর কত কাছে যায় তার একটা ধারণা দিয়েছি Fig 11-এ। এখানে $n = 5$ নেওয়া মানে মোট এগারোটা term নিয়েছি--পাঁচটা sin, পাঁচটা cos আর constant term-টা। ■

পরের অংকটাও একইরকম।

Example 3: Find the Fourier series of the 2π-periodic function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [-\pi, 0) \\ x & \text{if } x \in [0, \pi) \end{cases}.$$

Fig 11

Deduce from the pointwise convergence of this series that

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

[4] **(2009.9c)**
SOLUTION: এখানে একটা কথা লিখেছে--"2π-periodic". এটার মানে আমরা একটু পরে বুঝব। আপাততঃ এই কথাটুকু অগ্রাহ্য করে গেলে উত্তরটা কিছুই বদলাবে না।

First part: The Fourier series is

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right],$$

where

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Now for $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos nx dx &= \cdots = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}, \\ \int_0^{\pi} x \sin nx dx &= \cdots = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

So $a_0 = \cdots = \frac{\pi}{4}$, and for $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \cdots = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} -\frac{2}{\pi n^2} & \text{if } n \text{ odd} \\ 0 & \text{if } n \text{ even} \end{cases} \\ b_n &= \cdots = \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

কোনো function-এর Fourier series থেকে একটা সংখ্যার series তৈরী করার কায়দা হল x-এর এমন কোনো একটা বিশেষ value বার করা যেটা বসালে Fourier series-টা ওই সংখ্যার series-টায় পরিণত হয়। এখানে infinite series-টায় সব term-ই হল $\frac{1}{n^2}$-র মত যেখানে n হল odd (বিজোড়)। একটু ভালো করে আমাদের a_n, b_n-দের দিকে তাকালেই বুঝবে যে b_n-দের denominator-এ মোটেই n^2 নেই, সুতরাং b_n-গুলোকে তাড়াতে হবে। তার জন্য $x = 0$ নিলেই হবে, যাতে $\sin nx = 0$ হয়ে যায়। আর $x = 0$ নিলে $\cos nx = 1$ হবে সুতরাং Fourier series-টা হবে--

Second part: The Fourier series at $x=0$ is

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos 0 + b_n \sin 0\right] = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{2}{\pi} \sum_{n \text{ odd}} \tfrac{1}{n^2}. \qquad (*)$$

এবার এই infinite series-টাকে $f(x)$ দিয়ে লিখতে হবে। তার জন্য অবশ্যই হাতিয়ার হল Dirichlet condition. সেটা আগে দেখিয়ে নিই।

Here $f(x)$ satisfies Dirichlet's condition on $[-\pi, \pi]$.

⟦ Because:

f is continuous and nondecreasing on $[-\pi, \pi]$.

⟧

এবার Fourier series-এর convergence ব্যবহার করব। Convergence-টা কেমন হচ্ছে সেটার একটা ধারণা দিয়েছি Fig 12-এ।

$\because f(x)$ is continuous at $x=0$,

$\therefore$ the Fourier series converges to $f(0)$ at $x=0$.

Equating (*) to $f(0)=0$, we have

$$\sum_{n \text{ odd}} \tfrac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

as required.

■

এর পরের অংকটা একেবারেই একইরকম। নিজে নিজে চেষ্টা কর।

Exercise 4: Obtain Fourier series for $f(x)$ in the interval $[-\pi, \pi]$ where

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } -\pi \le x \le 0 \\ \pi x/4 & \text{if } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Fig 12

Hence show that the sum of the series

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \text{ is } \frac{\pi^2}{8}.$$

[3+2] **(2004.10b)** ■

58.2 Periodic extension

একটু আগে আমরা "2π-periodic" কথাটা একটা অংকে অগ্রাহ্য করেছিলাম। এবার সেটা বোঝার সময় এসেছে। ধরো তোমাকে এই function-টা দিলাম--

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

দেখতেই পাচ্ছ যে এটা দিব্যি Dirichlet conditions মেনে চলে। যদি $f(x)$-এর Fourier series বার করি তবে সেটা কোথায় converge করবে? উত্তর হল

$$a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos nx + \sum_1^\infty b_n \sin nx = \begin{cases} x & \text{if } x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & \text{if } x = \pm\pi \end{cases}.$$

লক্ষ কর যে Fourier series-টায় যে $\sin nx$ আর $\cos nx$ ব্যবহার করা হয়েছে, তারা পুরো $\mathbb{R}$-এর উপরেই defined. স্বভাবতঃই প্রশ্ন জাগে--যদি $[-\pi, \pi]$-এর বাইরে কোনো x নিই, তবে সেখানে Fourier series-টা কি রকম আচরণ করবে? Converge করবে? এবং করলে কোথায় converge করবে?
প্রশ্নটা শুনতে যতই কঠিন লাগুক এর উত্তর কিন্তু খুবই সহজ। এবং এই উত্তরের চাবিকাঠি হল এই কথাটা--যদি তুমি x-কে 2π পরিমাণ বাড়িয়ে বা কমিয়ে দাও তবে $\sin nx$ এবং $\cos nx$ অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং যদি জানতে চাই $x = 5$-এ Fourier series-টার আচরণ কী হবে, তবে আমরা চট্ করে x থেকে 2π বিয়োগ করে দেব, তাতে অবশ্যই Fourier series-টার আচরণ বদলাবে না--

$$a_0 + \sum a_n \cos 5n + \sum b_n \sin 5n = a_0 + \sum a_n \cos(n(5 - 2\pi)) + \sum b_n \sin(n(5 - 2\pi)).$$

এবার লক্ষ কর যে $5 - 2\pi$ দিব্যি $[-\pi, \pi]$-এর মধ্যে রয়েছে। সুতরাং $5 - 2\pi$-তে Fourier series-টার আচরণ আমরা জানি যে

$$a_0 + \sum a_n \cos n(5 - 2\pi) + \sum b_n \sin n(5 - 2\pi) = 5 - 2\pi.$$

সুতরাং বলতে পারি যে $x = 5$-এও Fourier series-টা $5 - 2\pi$-তে converge করবে। একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে এইভাবে $[-\pi, \pi]$-এর উপরে Fourier series-টার যা আচরণ হবে, $[\pi, 3\pi]$-এর উপরের সেই আচরণেরই পুনরাবৃত্তি হবে। আবার $[3\pi, 5\pi]$-এর উপরেও সেই একই আচরণ ফিরে আসবে, এবং এইভাবে চলতেই থাকবে। $[-\pi, \pi]$-এর উপরে Fourier series-টার limit-টা কিরকম দেখতে সেটা Fig 13-এর দেখিয়েছি। এই জিনিসটাকেই বার বার করে ব্যবহার করে গেলেই পাব পুরো $\mathbb{R}$-এর উপরে Fourier series-টার limit, যেটা দেখিয়েছি Fig 14-তে। যেভাবে Fig 13 থেকে Fig 14 পেলাম, তাকে বলে 2π-periodic extension, অর্থাৎ একটা function-কে এমনভাবে extend করা (মানে domain-টাকে

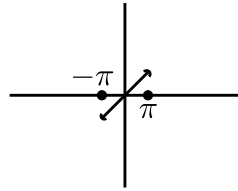
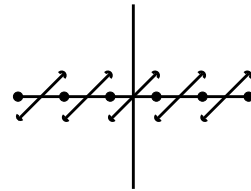



Fig 13 **Fig 14**

বিস্তৃত করা), যাতে প্রতি 2π অন্তর অন্তর function-টার একই value ফিরে ফিরে আসে, অর্থাৎ নতুন function-টাকে যদি $g(x)$ বলি তবে যেন

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x+2\pi) = g(x)$$

হয়।

DAY 59
Even and odd functions

যেসব function $f(x)$-এর জন্য

$$\forall x \quad f(-x) = -f(x)$$

হয় তাদের বলে odd function, যেমন $\sin ax$ বা $x, x^3, x^5, \dots$ ইত্যাদি odd power-গুলো।
যেসব $f(x)$-এর বেলায়

$$\forall x \quad f(-x) = f(x),$$

তাদের বলে even function, যেমন যে কোনো constant function, $\cos ax$ বা $x^2, x^4, x^6, \dots$ ইত্যাদি even power-গুলো।

Exercise 5: এমন কোনো $f(x)$ দিতে পারো যেটা even-ও নয় odd-ও নয়? এমন কোনো $g(x)$ কি সম্ভব যেটা একই সঙ্গে even এবং odd? ■

ধরো তোমাকে কোনো একটা $f(x)$ দিলাম যেটা $[-a, a]$-র উপরে integrable. এখানে $a > 0$ যে কোনো একটা সংখ্যা। যদি $f(x)$ একটা odd function হয় তবে

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

হবে। কারণটা Fig 15 দেখলেই বুঝবে। যদি $f(x)$ একটা even function হত তবে

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

হত। Fig 16 দ্যাখো।
ধরো তোমাকে দুটো odd function দিলাম, তাদের যোগফল কি হবে--odd নাকি even নাকি কিছুই বলা যায় না? যদি odd function দুটো $f(x)$ আর $g(x)$ হয়, এবং যোগফলটা হয় $h(x) = f(x) + g(x)$, তবে

$$h(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -h(x).$$

সুতরাং যোগফলটাও একটা odd function হচ্ছে।
এবার তোমাকে একটা multiple choice test দিই--

Exercise 6: প্রতিক্ষেত্রেই উত্তর হবে odd বা even বা কিছুই বলা যায় না।

Fig 15

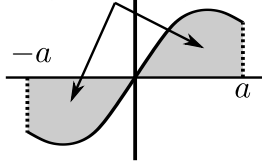
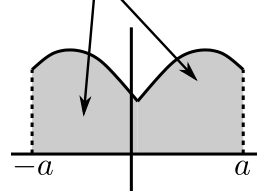



Fig 16

(i) even function + even function = ?

(ii) even function + odd function = ?

(iii) even function × even function = ?

(iv) odd function × odd function = ?

(v) even function × odd function = ?

■

সংখ্যাদের বেলায় even মানে জোড় আর odd মানে বিজোড়। কিন্তু function-দের বেলায় এদের আচরণ মোটেই জোড়-বিজোড় সংখ্যার মত নয়। দুটো odd number যোগ করলে সব সময়ে even number পাওয়া যায়, কিন্তু function-দের বেলায় দুটো odd-এর যোগফল odd-ই হয়।

Exercise 7: If $f : [\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ is an even function, then show that $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = 0$. Also show that

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

■

Exercise 8: If $f : [\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ is an odd function, then show that $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad a_n = 0$. Also show that

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

■

এবার আবার Fourier series-এর প্রসঙ্গে আসি। ধরো তোমাকে $[-\pi, \pi]$-এর উপরে একটা odd function $f(x)$ দিয়ে তার Fourier series বার করতে বললাম। তাহলে বুঝতেই পারছ যে $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ইত্যাদি সবাই শূন্য হয়ে যাবে। আর b_n-গুলো হবে এইরকম--

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx.$$

লক্ষ কর যেহেতু $f(x)$-একটা odd function, তাই $[0, \pi]$-এর উপর $f(x)$ জানলেই পুরো $[-\pi, \pi]$-এর উপরে $f(x)$ জানা হয়ে যায়।
লক্ষ কর যে এই Fourier series-টা খালি sin-দের নিয়ে তৈরী। একইভাবে যদি $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ একটা even function হত, তবে Fourier series-টায় কেবল cos-ওয়ালা term-গুলো থাকত। এদেরকে অনেক সময়ে sine series আর cosine series বলে। সংজ্ঞাটা গুছিয়ে লেখার আগে আমাদের একটা জিনিস শিখতে হবে--কোনো function-এর even extension এবং odd extension বলতে কী বোঝায়।

59.1 Even and odd extensions

যদি $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ একটা even বা odd function হয়, তবে খালি $[0, \pi]$-এর উপরে $f(x)$-এর value জানলেই $[-\pi, 0)$-র উপরে কী হবে বলে দেওয়া যায়। যেমন যদি

$$f(x) = \pi - x, \quad x \in [0, \pi]$$

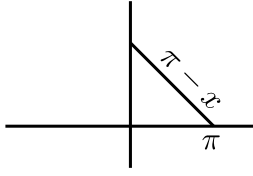
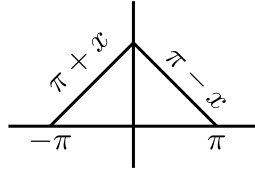
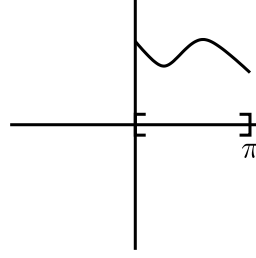
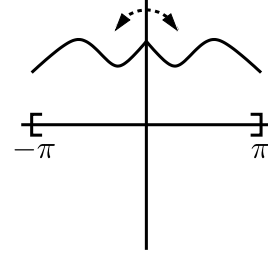



Fig 17 **Fig 18** **Fig 19** **Fig 20**

হয় তবে even function-এর ক্ষেত্রে

$$f(x) = \pi + x, \quad x \in [-\pi, 0]$$

হবে, অর্থাৎ খালি x-এর চিহ্নটা উল্টে দিলেই হবে। Fig 17 আর Fig 18 দ্যাখো। এখানে আমরা Fig 18-এর function-টাকে বলি Fig 17-এর even extension.
ছবি দিয়ে even extension বার করা খুব সহজ, ধরো $[0, \pi]$-এর উপরে Fig 19-এর মত যা খুশী একটা গ্রাফ দেওয়া আছে। $[-\pi, \pi]$-এর উপরে এটার even extension বার করার জন্য তুমি খালি এই গ্রাফটাকে y-axis বরাবর reflect (প্রতিফলিত) করে দেবে। মূল গ্রাফটা এবং তার এই প্রতিফলনটা মিলে তৈরী হবে even extension-এর গ্রাফ (Fig 20)। একই কাজ ফর্মুলা দিয়েও করা যায়, $[0, \pi]$-এর উপরে যা ফর্মুলা দেওয়া ছিল, একই ফর্মুলা $[-\pi, 0]$-এর উপরেও খাটবে, খালি x-এর জায়গায় $-x$ বসিয়ে।

Example 4: এই function-টার even extension বার কর--

$$f(x) = e^x, \quad x \in [0, \pi].$$

SOLUTION: আমরা $[-\pi, 0]$-র উপরেও একই ফর্মুলা লাগাব, খালি x-এর চিহ্নটা উল্টে। সুতরাং সব মিলিয়ে even extension-টা হবে

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{if } x \in [-\pi, 0] \\ e^x & \text{if } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

■

একইরকম জিনিস করা যায় odd function-দের বেলাতেও। এক্ষেত্রে অবশ্য দুবার reflect করাতে হবে। প্রথমে y-axis বরাবর, আর তারপরে সেই reflection-টাকে আরেকবার reflect করাতে হবে x-axis বরাবর। এটাই দেখিয়েছি Fig 21-এ। খালি একটা ছোট্টো সমস্যা আছে। আমরা জানি যে odd function-দের বেলায়

$$\forall x \quad f(-x) = -f(x)$$

Fig 21

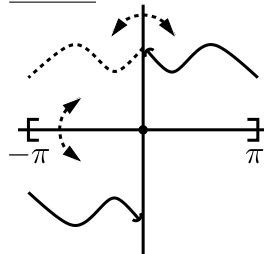
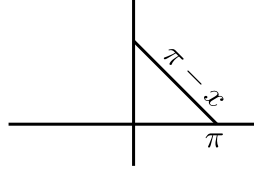



Fig 22

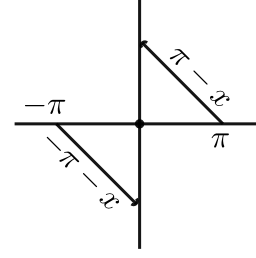



Fig 23

হয়। এখানে $x = 0$ বসালে হয় $f(0) = -f(0)$, অর্থাৎ $f(0) = 0$. সুতরাং যদি তোমাকে

$$f(x) = \pi - x, \quad x \in [0, \pi]$$

দিয়ে তার odd extension বার করতে বলি, তবে তুমি মুস্কিলে পড়ে যাবে, কারণ এখানে $f(0) = \pi - 0 = \pi \neq 0$. এরকম ক্ষেত্রে আমরা এইভাবে odd extension নিই--$(0, \pi]$-এর উপরে $f(x)$-এর যা value সেটাকে উল্টে $[-\pi, 0)$-র উপরে $f(x)$ কী নেব ঠিক করি, আর সবশেষে জোর করে $f(x) = 0$ করে দিই। ভালো করে Fig 21-টা দ্যাখো, দেখবে origin-এ একটা ডট্ এঁকেছি, অর্থাৎ জোর করে $f(x) = 0$ বসিয়েছি।

ফর্মুলা দিয়েও ব্যাপারটা করা যায়। $(0, \pi]$-এর উপরে যে ফর্মুলা (ধরো $f(x)$) দেওয়া থাকবে, $[-\pi, 0)$-এর উপরেও একই ফর্মুলা, খালি প্রথমে x-এর চিহ্ন ওল্টাতে হবে (মানে $f(-x)$), তারপর পুরোটার চিহ্ন ওল্টাতে হবে (মানে $-f(-x)$). আর $x = 0$-তে তো value-টা জোর করে 0 করে দেবেই। একটা উদাহরণ দেখলে বুঝতে সুবিধা হবে।

Example 5: আবার $f(x) = \pi - x, \quad x \in [0, \pi]$ নিলাম। সুবিধার জন্য গ্রাফটা আরেকবার এঁকেছি Fig 22-তে। এর odd extension বার কর।

SOLUTION: $f(0)$-র কী value দেওয়া আছে ভুলে যাও, আমরা সবার শেষে $f(0) = 0$ বসিয়ে দেব। বলা আছে যে $x \in (0, \pi]$ হলে $f(x) = \pi - x$ হবে। এর থেকে বার করব $x \in [-\pi, 0)$ হলে $f(x)$ কী নেব। প্রথমে x-এর চিহ্ন উল্টে দাও, তবে পাবে $\pi - (-x) = \pi + x$. এবার পুরো জিনিসটার চিহ্ন উল্টে দাও, পাবে $-(\pi + x) = -\pi - x$. সুতরাং সব মিলিয়ে দাঁড়ালো

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{if } x \in [-\pi, 0) \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ \pi - x & \text{if } x \in (0, \pi] \end{cases}$$

গ্রাফটা এঁকে দেখিয়েছি Fig 23-তে। ■

59.2 Sine and cosine series

ধরো $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ দিলাম, যেটা $[0, \pi]$-এর উপরে Riemann integrable. তবে এর even extension-টা হবে $[-\pi, \pi]$-এর উপরে একটা even function, যেটা Riemann integrable-ও বটে। সুতরাং সেটার Fourier series-এ কেবল cos-ওয়ালা term-গুলো (এবং constant term-টা) থাকবে। একেই বলে $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$-এর cosine series. যদি $F : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ হয় f-এর even extension, তবে $F(x) \cos nx$-ও একটা even function হবে এবং তাই

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx = 2 \int_{0}^{\pi} F(x) \cos nx dx = 2 \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

হতে বাধ্য। এ থেকেই নীচের definition-টার জন্ম।

DEFINITION: Fourier cosine series

Let $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ be a function Riemann integrable on $[0,\pi]$. Then its **Fourier cosine series** is defined as

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx,$$

where

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nxdx \text{ for } n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

একইরকম কথা বলা যাবে যদি $f(x)$-এর একটা odd extension নিই। সেক্ষেত্রে odd extension-টার Fourier series-টায় খালি sin-ওয়ালা term-গুলোই পড়ে থাকবে।

DEFINITION: Fourier sine series

Let $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ be a function Riemann integrable on $[0,\pi]$. Then its **Fourier sine series** is defined as

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx,$$

where

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nxdx.$$

Fourier series-এর সঙ্গে Fourier sine series বা Fourier cosine series-এর সম্পর্কটা মনে রেখো। ধরো একটা কোনো Riemann integrable function $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ দিলাম, যেমন Fig 24-এ দেখিয়েছি। যদি এর Fourier cosine series বার করি, তার মানে আমরা f-এর even extension-টার Fourier series বার করছি (Fig 25)। কিন্তু যদি $f(x)$-এর Fourier sine series বার করি, তার মানে Fourier series বার করছি f-এর odd extension-এর (Fig 26)।

Fig 24

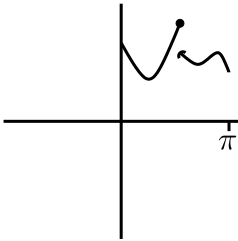



Fig 25

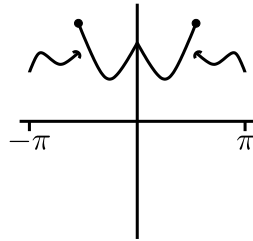
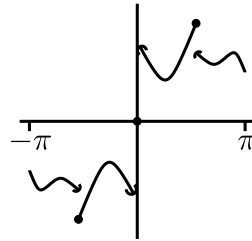



Fig 26

DAY 60
Examples

এবার কিছু cosine series আর sine series-এর উদাহরণ দেখব। প্রতিক্ষেত্রেই আমরা গ্রাফগুলো পুরো $[-\pi, \pi]$-এর উপরে আঁকব যাতে limit-টার একটা আদল পাওয়া যায়।

60.1 Cosine series

এবার যে অংকগুলো করব সেগুলো সবই খুব বাঁধাধরা নিয়মের। বোঝানোর খুব বেশী কিছু নেই।

Example 6: Find the Fourier cosine series for the function $x(\pi - x)$ on $[0, \pi]$. Hence deduce the value of

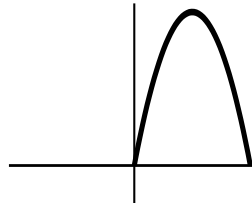
$$1 - \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} - \tfrac{1}{4^2} + \cdots .$$

[3+3] **(2012.9a)**

SOLUTION: Function-টার গ্রাফ এঁকেছি দ্যাখো Fig 27-এ।

First part:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx, \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)dx, \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\tfrac{\pi x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3}\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Fig 27

Now

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi x\cos nx dx &= \frac{1}{n}\int_{x=0}^{\pi} xd(\sin nx)\\
&= \frac{1}{n}\left[x\sin nx|_0^\pi - \int_{x=0}^{\pi}\sin nx dx\right]\\
&= -\frac{1}{n}\int_{x=0}^{\pi}\sin nx dx\\
&= \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^\pi\\
&= \frac{(-1)^n-1}{n^2}.
\end{aligned}
$$

Also,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi x^2\cos nx dx &= \frac{1}{n}\int_{x=0}^{\pi} x^2 d(\sin nx)\\
&= \frac{1}{n}\left[x^2\sin nx|_0^\pi - 2\int_{x=0}^{\pi} x\sin nx dx\right]\\
&= -\frac{2}{n}\int_{x=0}^{\pi} x\sin nx dx\\
&= \cdots\\
&= \frac{(-1)^n 2\pi}{n^2}.
\end{aligned}
$$

So

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\cos nx dx\\
&= \frac{2}{\pi}\left[\pi\int_0^\pi x\cos nx dx - \int_0^\pi x^2\cos nx dx\right]\\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi((-1)^n-1)}{n^2} - \frac{(-1)^n 2\pi}{n^2}\right]\\
&= 2\times\frac{((-1)^n-1)-(-1)^n 2}{n^2}\\
&= 2\times\frac{(-1)^n-1-2(-1)^n}{n^2}\\
&= 2\times\frac{-1-(-1)^n}{n^2}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ odd,}\\ -\frac{4}{n^2} & \text{if } n \text{ even.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

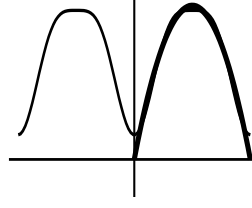



Fig 28

So the required Fourier cosine series is

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \tfrac{\pi^2}{6} - 4\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{4k^2} \cos 2kx = \tfrac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k^2} \cos 2kx.$$

Cosine series-টাকে function-টার গ্রাফের উপরে এঁকেছি Fig 28-তে। মোটে $n = 5$ নিয়েছি, অর্থাৎ constant term-টা এবং পাঁচটা cos term. তাতেই দ্যাখো function-টার কত কাছে চলে গেছে। Cosine series-এর গ্রাফটা পুরো $[-\pi, \pi]$-এর উপরে দেখিয়েছি, যাতে ওর even function রূপটা স্পষ্ট হয়।

Second part: The even extension of the given function is

$$F(x) = \begin{cases} -x(\pi + x) & \text{if } x \in [-\pi, 0) \\ x(\pi - x) & \text{if } x \in [0, \pi] \end{cases} .$$

This function satisfies Dirichlet conditions.

⟦ Because:

F is continuous on $[-\pi, \pi]$.
F is monotone on each of the open subintervals of the partition

$$-\pi < -\tfrac{\pi}{2} < 0 < \tfrac{\pi}{2} < \pi.$$

⟧

$$\therefore x(\pi - x) = \tfrac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k^2} \cos 2kx.$$

Putting $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Solving,

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

which is the required answer.

■

Exercise 9: If $f(x) = (\pi - |x|)^2$ on $[-\pi, \pi]$, prove that

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos nx.$$

Hence find the value of $\sum \frac{1}{n^2}$.[4] **(2010.10b)** ■

Example 7: If the function $f(x)$ is even and

$$f\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -f\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)$$

then obtain Fourier series for $f(x)$ in the interval $[-\pi, \pi]$.[3] **(2004.10a)**

SOLUTION:

Since $f(x)$ is an even function, so its Fourier series is its Fourier cosine series

$$a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

where

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

Now

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} f(x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)dx = \cdots = 0.$$

$\therefore a_0 = 0.$

For $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\cos nx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

Putting $t = x - \frac{\pi}{2}$ in the second integral

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \int_0^{\pi/2} f\left(\tfrac{\pi}{2} + t\right)\cos\left(nt + \tfrac{n\pi}{2}\right) dt$$

Putting $t = \frac{\pi}{2} - x$ in the first integral

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} f(x)\cos nx dx \\ = & \int_0^{\pi/2} f\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right)\cos\left(\tfrac{n\pi}{2} - nt\right) dt \\ = & \int_0^{\pi/2} f\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right)\cos\left(nt - \tfrac{n\pi}{2}\right) dt \\ = & -\int_0^{\pi/2} f\left(\tfrac{\pi}{2} + t\right)\cos\left(nt - \tfrac{n\pi}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Now

$$\cos\left(nt - \tfrac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \cos\left(nt + \frac{n\pi}{2}\right) & \text{if } n \text{ even} \\ -\cos\left(nt + \frac{n\pi}{2}\right) & \text{if } n \text{ odd} \end{cases}$$

So

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\cos nx dx & \text{if } n \text{ odd} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

So the required Fourier series is

$$\sum_1^\infty a_{2n-1}\cos((2n-1)x),$$

where, for $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{2n-1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\cos((2n-1)x)dx.$$

■

Example 8: Prove that

$$\cos Kx = \frac{\sin K\pi}{\pi}\left[\frac{1}{K} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n 2K\cos nx}{K^2 - n^2}\right]$$

for all $x \in [-\pi, \pi]$, where K is not an integer. Hence deduce that

$$\frac{\pi}{\sin K\pi} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\left(\frac{1}{n+K} + \frac{1}{n+1-K}\right).$$

[4+2] **(2008,2013)**

Solution:

First part:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos Kx dx \quad = \cdots = \quad \frac{\sin K\pi}{K\pi}$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos Kx \cos nx dx \quad = \cdots = \quad \frac{\sin K\pi}{\pi} \times \frac{(-1)^n 2K}{K^2 - n^2}.$$

$\cos Kx$ satisfies Dirichlet's condition on $[-\pi, \pi]$.

⟦ Because:

It is continuous on $[-\pi, \pi]$.
The function is monotone on every interval of the form

$$\left(\frac{n\pi}{K}, \frac{(n+1)\pi}{K}\right).$$

⟧

Hence, for $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\cos Kx = \frac{\sin K\pi}{\pi}\left[\frac{1}{K} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n 2K \cos nx}{K^2 - n^2}\right],$$

as required.

Second part: Putting $x = 0$,

$$1 = \frac{\sin K\pi}{\pi}\left[\frac{1}{K} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n 2K}{K^2 - n^2}\right],$$

এইবার আমরা একটু সূক্ষ্ম একটা কারিকুরি করব, যেটা আমরা আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই সিরিজের Real Analysis (volume 2)-তে শিখেছিলাম। পাছে ভুলে গিয়ে থাকো, তাই একবার মনে করিয়ে দিই। ধরো একটা series আছে $\sum p_k$. এর partial sum-গুলোর নাম দেওয়া যাক S_n. তাহলে আমরা জানি যে, $\sum p_n$-এর converge করা মানে হল $\{S_n\}_n$-এর converge করা। এবার ধরো খালি বলে দিলাম যে $S_{2n} \to L \in \mathbb{R}$, মানে পুরো $\{S_n\}_n$-এর দায়িত্ব নিচ্ছি না, খালি বলছি যে $S_2, S_4, S_6, ...$ ইত্যাদিরা কোনো একটা সংখ্যা L-এ গিয়ে converge করে। এটুকু থেকেই কি জোর দিয়ে বলতে পারো যে পুরো $\{S_n\}_n$-ই converge করবে? মানে $\sum p_n$-টা converge করবে? অবশ্যই না! যেমন $p_n = (-1)^n$ নিলে series-টা হল

$$-1 + 1 - 1 + 1 - + - + \cdots,$$

যেটা মোটেই converge করে না, অথচ $S_2 = S_4 = S_5 = \cdots = 0$, সুতরাং দিব্যি 0-তে converge করে। সুতরাং even partial sum-গুলো ভদ্র হলেও odd-গুলো বেয়াড়া আচরণ করতেই পারে। কিন্তু যদি আরেকটা শর্ত চাপাই যে $p_n \to 0$, তাহলে সেই সমস্যা আর থাকে না। কারণ

$$S_{2n+1} = S_{2n} + p_{2n+1} \to L + 0 = L.$$

অতএব পুরো $\{S_n\}_n$-ই L-এ converge করতে বাধ্য, মানে $\sum p_n = L$ হবেই! এই কথাটাকে এইভাবে লেখা যায়--যদি $(p_1 + p_2) + (p_3 + p_4) + \cdots = L$ হয় আর $p_n \to 0$ হয়, তবে $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = L$ হবে, মানে সহজ ভাষায় যাকে বলে "ব্র্যাকেট তোলা যাবে"। এই জিনিসটাই আমরা এক্ষুণি ব্যবহার করতে চলেছি।

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sin K\pi} &= \frac{1}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2K}{K^2 - n^2} \\ &= \frac{1}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{K-n} + \frac{1}{K+n}\right]\end{aligned}$$

এইবার আমাদের কায়দাটা লাগিয়ে চৌকো ব্র্যাকেটগুলো তুলব--

If we denote the infinite series

$$-\frac{1}{K-1} - \frac{1}{K+1} + \frac{1}{K-2} + \frac{1}{K+2} + \cdots$$

by $\sum p_k$, and its partial sums by $\{S_n\}_n$, then we have

$$\frac{1}{K} + (p_1 + p_2) + (p_3 + p_4) + \cdots = \frac{\pi}{\sin K\pi}.$$

Thus $S_{2n} \to \frac{\pi}{\sin K\pi} - \frac{1}{K}$.
Clearly, $p_k \to 0$. So $S_{2n+1} = S_{2n} + p_{2n+1} \to \frac{\pi}{\sin K\pi} + \frac{1}{K}$ also.
Hence $S_n \to \frac{\pi}{\sin K\pi} - \frac{1}{K}$.

সুতরাং ব্র্যাকেটগুলো তোলা যাবে--

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sin K\pi} &= \frac{1}{K} - \frac{1}{K-1} - \frac{1}{K+1} + \frac{1}{K-2} + \frac{1}{K+2} - - + + \cdots \\ &= \frac{1}{K} + \frac{1}{1-K} - \frac{1}{1+K} - \frac{1}{2-K} + \frac{1}{2+K} + - - + + - - \cdots \\ &= \left(\frac{1}{0+K} + \frac{1}{1-K}\right) - \left(\frac{1}{1+K} + \frac{1}{2-K}\right) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+K} + \frac{1}{n+1-K}\right),\end{aligned}$$

as required.

■

60.2 Sine series

Example 9: Find the Fourier series of the function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } -\pi \le x < 0 \\ 1 & \text{if } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Also calculate the sum of the series at $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pm\pi$.[3+1+1+1] **(2011.9a)**
SOLUTION:

First part:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^\pi \\ &= \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ even} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

So the required series is

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

ছবিটা এঁকেছি Fig 29-এ। আমরা $n = 5$ নিয়ে ছবিটা এঁকেছি, মানে পাঁচটা sin term নিয়েছি।

Second part: Here $f(x)$ satisfies Dirichlet's condition on $[-\pi, \pi]$.

[[Because:

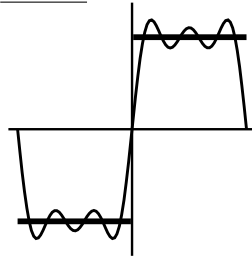
f is continuous everywhere on $[-\pi, \pi]$, except at 0, where it has a jump discontinuity.

f is nondecreasing on $[-\pi, \pi]$.

]]

The sum of the series at $x = 0$ is

$$\frac{f(0-) + f(0+)}{2} = 0.$$

Fig 29

The sum of the series at $x = \frac{\pi}{2}$ is $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. The sum at $x = \pm\pi$ is

$$\frac{f(\pi-) + f(-\pi+)}{2} = 0.$$

■

Example 10: Let $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ be defined as follows:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{if } 0 \le x \le \pi \\ -\cos x & \text{if } -\pi \le x < 0. \end{cases}$$

Obtain the Fourier's coefficients and the Fourier series for the function $f(x)$. Hence find the sum of the series

$$\frac{2}{1 \cdot 3} - \frac{6}{5 \cdot 7} + \cdots.$$

[1+2+3] **(2007.10a)**

SOLUTION:

First part: The given function is odd. So we shall consider Fourier sine series:

$$\sum_{1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

where the Fourier coefficients are given by

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin nx dx \\ &= \cdots \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } n = 1 \\ \frac{2(1+(-1)^n)}{\pi} \times \frac{n}{(n-1)(n+1)} & \text{if } n \ge 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Clearly, $b_n = 0$ if n is odd. If n is even, then

$$b_n = \frac{4}{\pi} \times \frac{n}{(n-1)(n+1)}.$$

এবার দ্বিতীয় অংশটা দেখি। আমাদের Fourier sine series-টা দেখতে হয়েছে এইরকম--

$$\frac{2}{1 \times 3}\sin 2x + \frac{4}{3 \times 5}\sin 4x + \frac{6}{5 \times 7}\sin 6x + \cdots.$$

দ্বিতীয় অংশে যে series-টা দিয়েছে তার আদলটা মোটামুটি এসে গেছে এর মধ্যে। খালি এর একটা অন্তর একটা term রাখতে হবে, আর চিহ্নটা $+, -, +, -, \cdots$ করে এগোবে। সুতরাং এমন একটা x নিতে হবে যাতে $\sin 4x$, $\sin 8x$, ... ইত্যাদিরা শূন্য হয়, আর $\sin 2x = 1$, $\sin 6x = -1$, $\sin 10x = 1, \ldots$ ইত্যাদি হয়। একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে $x = \frac{\pi}{4}$ নিলেই সে উদ্দেশ্য হাসিল হবে। এবার আগের অংকের মতই প্রথমে Dirichlet condition দেখিয়ে $x = \frac{\pi}{4}$ বসিয়ে

দাও। সহজ জিনিস, লিখে ফেলার দায়িত্ব তোমার জন্যেই রেখে দিলাম। ■

এইবারের অংকটায় একটা প্যাঁচ আছে, যেটা একবার ধাক্কা না খেয়ে বোঝা কঠিন।

Example 11: Show that if $0 < x < \pi$,

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \sum_1^\infty \frac{\sin 2nx}{n}.$$

Show that the equation does not hold for $x = 0$ and $x = \pi$, and explain why it does not hold.[3+1+1] **(2005.9b)**

SOLUTION: অংকটা দেখেই মনে হয় যেন প্রথমে $\pi - x$-এর sin series বার করতে হবে। তাতে নিশ্চয়ই $\sum_1^\infty \frac{\sin 2nx}{n}$ আসবে। কিন্তু সত্যিই যদি $\pi - x$-এর sine series বার কর তবে আবিষ্কার করবে যে মোটেই সেটা আসছে না। তখন খানিকক্ষণ খাবি খেয়ে বুঝবে কী করতে হবে--

> First part: We shall show
>
> $$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \sum_1^\infty \frac{\sin 2nx}{n},$$
>
> ie,
>
> $$\frac{\pi}{2} - x = \sum_1^\infty \frac{\sin 2nx}{n}.$$

এইবার $\frac{\pi}{2} - x$-এর sine series বার করলে ঠিকঠাক উত্তর মিলবে। এই যে দুদিক দিয়ে $\frac{\pi}{2}$ কেটে নিতে হল, এইটা একেবারেই এই অংকটার নিজস্ব একটা প্যাঁচ। এর মধ্যে শেখার বা বুদ্ধি খাটানোর কিছু নেই।

> The Fourier sine series for $\frac{\pi}{2} - x$ is
>
> $$\sum_1^\infty b_n \sin nx,$$
>
> where for $n \in \mathbb{N}$
>
> $$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\frac{\pi}{2} - x) \sin nx dx.$$
>
> Now
>
> $$\int_0^\pi \sin nx dx = \cdots = \frac{1}{n}(1 - (-1)^n),$$
>
> and
>
> $$\int_0^\pi x \sin nx dx = \cdots = -\frac{\pi(-1)^n}{n}.$$
>
> So
>
> $$b_n = \cdots = \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{if } n \text{ even} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Here the odd extension of the function $f(x) = \frac{\pi}{2} - x, \quad x \in [0, \pi]$ is

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - x & \text{if } x \in [-\pi, 0) \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} - x & \text{if } x \in (0, \pi] \end{cases}.$$

This function satisfies Dirichlet's condition on $[-\pi, \pi]$.

⟦ Because:

It is continuous everywhere on $[-\pi, \pi]$, except at 0, where is has a jump discontinuity.
Also it is nonincreasing on $(-\pi, 0)$ and $(0, \pi)$.

⟧

$$\therefore \frac{\pi}{2} - x = \sum_1^{\infty} \frac{2}{2k} \sin 2kx = \sum_1^{\infty} \frac{\sin 2kx}{k},$$

as required.

এবার যথারীতি Dirichlet condition পরীক্ষা করতে হবে।

Second part: The Fourier sine series of $\frac{\pi}{2} - x$ is the Fourier series of the odd extension on $[-\pi, \pi]$, which is

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - x & \text{if } x \in [-\pi, 0) \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} - x & \text{if } x \in (0, \pi] \end{cases}$$

This function satisfies Dirichlet condition.
So at $x = 0$ the series converges to $\frac{F(0-)+F(0+)}{2} = 0 \neq f(0) = \frac{\pi}{2}$. So the series does not converge to $f(0)$ at $x = 0$.

Again, at $x = \pi$, the series convergs to $\frac{F(-\pi+)+F(\pi-)}{2} = 0 \neq f(\pi) = -\frac{\pi}{2}$. So the series does not converge to $f(\pi)$ at $x = \pi$.

■

DAY 61
Uniform convergence

Dirichlet condition পালিত হলে যে convergence-টা হয় সেটা হল pointwise convergence. স্বভাবতঃই প্রশ্ন ওঠে যে, কী শর্ত পালিত হলে uniform convergence হবে। এরকম একটা শর্ত রয়েছে নীচের theorem-টায়।

THEOREM

Let $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ be continuous and $f(-\pi) = f(\pi)$. We also assume that $f(x)$ is continuously differentiable everywhere except possibly at finitely many points in $(-\pi, \pi)$. Let

$$f_n(x) = a_0 + \sum_1^n a_k \cos kx + \sum_1^n b_k \sin kx$$

be the n-th partial sum of its Fourier series. Then

$$f_n \to f \text{ uniformly on } [-\pi, \pi] \text{ as } n \to \infty.$$

এই theorem-টা জানা থাকা ভালো, যদিও এই বইতে আমরা এটা কোথাও ব্যবহার করব না। নীচের অংকটায় অবশ্য uniform convergence লাগবে, কিন্তু সেটা সরাসরি Weierstrass' M-test দিয়েই হয়ে যাবে।

Example 12: Prove that for $0 \le x \le \pi$,

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \cdots\right).$$

Hence deduce that

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right), \quad 0 \le x \le \pi.$$

[3+2] **(2003.8a)**

SOLUTION: অংকটার দিকে ভালো করে তাকালেই বুঝবে কী করতে হবে। প্রথম অংশে তো স্রেফ $x(\pi - x)$-এর sine series বার করতে বলেছে। এবার যদি এই series-টাকে term by term differentiate করে দাও, তবেই দ্বিতীয় অংশটা হয়ে যাবে। খালি প্রশ্ন হল এই term by term differentiation-টা এখানে করা যাবে কিনা। এবং এই কাজেই uniform convergence-এর ডাক পড়বে।

প্রথম অংশের sine series বার করাটা তোমার উপরেই ছেড়ে দিলাম। এবার দ্বিতীয় অংশটা--

> Second part:
>
> Let
>
> $$f_n(x) = \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$$

তাহলে প্রথম অংশ থেকে পাচ্ছি $\sum f_n(x) = \frac{\pi}{8}x(\pi - x)$. এটাকে যে term by term differentiate করা যায় সেটা দেখানোর জন্য দুটো জিনিস দেখালেই চলবে--

1. $\sum f_n'(x)$ uniformly converge করে,
2. $\sum f_n(x)$ অন্ততঃ কোনো একটা x-এর জন্য converge করে।

> Then
>
> $$f_n'(x) = \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Thus

$$\forall x \in [0, \pi] \quad |f_n'(x)| \le \frac{1}{(2n-1)^2} = M_n, \text{ say.}$$

Comparing with $\frac{1}{n^2} < \infty$, we see that $\sum M_n < \infty$.

So by Weierstrass' M-test, $\sum f_n'(x)$ converges uniformly for $x \in [0, \pi]$.

ব্যস্, প্রথম কাজ শেষ। দ্বিতীয় কাজটা তো আরও সহজ--

Also $\sum f_n(0)$ converges.

কারণ $f_n(0)$-রা সবাই 0.

So

- $\sum f_n(x)$ converges uniformly to some $f(x)$,
- $f(x)$ is differentiable,
- $f'(x) = \sum f_n'(x)$.

From the first part, $f(x) = \frac{\pi}{8}x(\pi - x)$.
So $f'(x) = \frac{\pi}{8}(\pi - 2x)$.
Hence

$$\sum f_n'(x) = \frac{\pi}{8}(\pi - 2x),$$

or

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum f_n'(x), \quad x \in [0, \pi],$$

or,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right),$$

as required.

■

এবার একটা অন্য রকম অংক করি। এখানেও uniform convergence লাগবে। ধরো তোমাকে একটা trigonometric series দিলাম, মানে

$$a_0 + \sum_1^\infty a_k \cos kx + \sum_1^\infty b_k \sin kx$$

জাতীয় একটা series দিলাম যেখানে a_k, b_k-রা যা খুশী সংখ্যা। কী করে পরীক্ষা করবে যে এটা কোনো $f(x)$-এর Fourier series কিনা? এর জন্য একটা sufficient condition আছে নীচের অংকটায়, যেটা আসলে একটা theorem. আমরা একটু আগেই বলেছি যে Fourier series-রা সব সময়ে uniformly converge নাও করতে পারে। এবার তারই উল্টো দিকটা দেখব--যদি একটা trigonometric series-কে uniformly converge করতে দ্যাখো, তবে সেটা একটা Fourier series না হয়ে যায় না!

Example 13: If the series

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converges uniformly to f on $[-\pi, \pi]$, show that it is the Fourier series for f in $[-\pi, \pi]$.[3] **(2008.9b)**

SOLUTION: এখানে এই তথ্যটা কাজে লাগবে--যদি $f_n \to f$ uniformly হয়, আর f_n-গুলো integrable হয়, তবে f-ও integrable হবে এবং $\int f_n \to \int f$ হবে। এখানে f_n-এর ভূমিকা পালন করবে Fourier series-এর partial sum-গুলো--

> Let, for $x \in [-\pi, \pi]$ and $n \in \mathbb{N}$,
>
> $$f_n(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$
>
> It is given that $f_n \to f$ uniformly on $[-\pi, \pi]$.
>
> Clearly, $f_n(x)$ is continuous, and hence Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$.
>
> So $f(x)$ is also Riemann integrable on $[-\pi, \pi]$.

বুঝতেই পারছ যে আমাদের বার বার করে $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$ জাতীয় integral লিখতে হবে। পরিশ্রম বাঁচানোর জন্য একটা সহজ notation বানিয়ে রাখি--

> For any two Riemann integrable functions $a(x), b(x)$ on $[-\pi, \pi]$ we define the notation
>
> $$\langle a(x), b(x)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} a(x)b(x)dx.$$

এবার লিখে নিই কী দেখাতে চলেছি--

> To show that the given series is the Fourier series of $f(x)$, ie,
>
> $$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi}\langle f(x), \quad 1\rangle, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\langle f(x), \quad \cos nx\rangle, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\langle f(x), \quad \sin nx\rangle, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

এখানে $\frac{a_0}{2}$ দেখে অবাক হবার কিছু নেই। আমরা এই অধ্যায়ে constant term-টাকে এতক্ষণ a_0 বলছিলাম, কিন্তু এই অংকে constant term-টাকে $\frac{a_0}{2}$ দিয়েছে।

We shall use the following standard results:

$$\begin{aligned} \langle 1, 1\rangle &= 2\pi \\ \langle \cos nx, \cos nx\rangle &= \langle \sin nx, \sin nx\rangle = \pi, \quad n\in\mathbb{N}, \\ \langle \cos nx, \cos mx\rangle &= \langle \sin nx, \quad \sin mx\rangle = 0, \quad m\neq n = 0,1,2... \\ \langle \cos nx, \sin mx\rangle &= 0, \quad m,n = 0,1,2.... \end{aligned}$$

লক্ষ কর যে আমাদের যেসব integral নিয়ে কাজ করতে হবে সেগুলো হল $\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\cos pxdx$ বা $\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\sin pxdx$ জাতীয়, যেখানে $n, p\in\mathbb{N}$. সুতরাং খালি f_n-গুলোর uniform convergence জেনে লাভ নেই, দরকার হল $f_n(x)\sin np(x)$ এবং $f_n(x)\cos np(x)$-দের uniform convergence.

Also, $\because \sin$ and $\cos$ are bounded functions, $\therefore f_n(x)\sin px \to f(x)\sin px$ and $f_n(x)\cos px \to f(x)\cos px$ uniformly.

এইটা কী করে হচ্ছে বুঝলে তো? কারণ--

$$|f_n(x)\sin px - f(x)\sin px| \leq |f_n(x) - f(x)|.$$

তাই f_n-এর পুরো গ্রাফটা যদি $f(x)$-এর গ্রাফের সঙ্গে প্রায় মিশে যায়, তবে যেকোনো $p\in\mathbb{N}$-এর জন্য $f_n(x)\sin px$-এর গ্রাফটাও $f(x)\sin px$-এর গ্রাফের সঙ্গে মিশে যেতে বাধ্য।

$\therefore$ Using uniform convergence result for integrals,

$$\begin{aligned} \langle f_n(x), \quad 1\rangle &\to \langle f(x), \quad 1\rangle, \\ \langle f_n(x), \quad \cos px\rangle &\to \langle f(x), \quad \cos px\rangle, \\ \langle f_n(x), \quad \sin px\rangle &\to \langle f(x), \quad \sin px\rangle. \end{aligned}$$

এবার একে একে a_0, a_n আর b_n-দের বার করি। প্রথমে a_0-এর পালা--

Now

$$\begin{aligned} & \langle f_n(x), \quad 1\rangle \\ = & \left\langle \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx), \quad 1\right\rangle \\ = & \tfrac{1}{2}a_0\langle 1, \quad 1\rangle + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k\langle\cos kx, \quad 1\rangle + b_k\langle\sin kx), \quad 1\rangle\right] \\ = & \tfrac{1}{2}a_0\langle 1, \quad 1\rangle = \pi a_0. \end{aligned}$$

So $\langle f(x), \quad 1\rangle = \pi a_0$, or

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\langle f(x), \quad 1\rangle,$$

as required.

তারপর a_n-দের ব্যবস্থা করি যেখানে $n\in\mathbb{N}$.

Again, for $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \langle f_n(x), \cos px \rangle \\ = & \left\langle \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \cos px \right\rangle \\ = & \tfrac{1}{2}a_0 \langle 1, \quad \cos px \rangle + \sum_{k=1}^{n} [a_k \langle \cos kx, \quad \cos px \rangle + b_k \langle \sin kx), \quad \cos px \rangle] \\ = & \tfrac{1}{2}a_0 \langle 1, \quad \cos px \rangle + \sum_{k=1}^{n} a_k \langle \cos kx, \quad \cos px \rangle \\ = & \begin{cases} a_p \pi & \text{if } n \geq p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

So

$$a_p = \frac{1}{\pi} \langle f(x), \quad \cos px \rangle ,$$

as required.

একইরকম ব্যাপার b_n-দের ক্ষেত্রেও। মাঝের সহজ ধাপগুলো ডট্ ডট্ দিয়ে বাদ দিয়েছি।

Similarly, for $p \in \mathbb{N}$,

$$\langle f_n(x), \quad \sin px \rangle = \cdots = \begin{cases} b_p \pi & \text{if } n \geq p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

So

$$b_p = \frac{1}{\pi} \langle f(x), \quad \sin px \rangle ,$$

as required.

■

নীচের অংকটা এটারই একটা প্রয়োগ।

Example 14: Examine whether the trigonometric series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

is a Fourier series.[3] **(2012.1e)**

SOLUTION:

Let $M_n = \frac{1}{n^2}$.

Then

$$\forall x \in [0, \pi] \qquad \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} = M_n.$$

Since $\sum M_n < \infty$.

So, by Weierstrass' M-test, the given series converges uniformly to some $f(x)$, ie,

$$F_n \to f \text{ uniformly on } [-\pi, \pi],$$

where

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k^2}$$

So, by standard result,

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \int_0^\pi F_n(x) \sin pxdx \to \int_0^\pi f(x) \sin pxdx \tag{1}$$

and

$$\forall p \in \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad \int_0^\pi F_n(x) \cos pxdx \to \int_0^\pi f(x) \cos pxdx. \tag{2}$$

Now for each $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F_n(x) \sin pxdx = \begin{cases} 0 & \text{if } n < p \\ \frac{1}{p^2} & \text{if } n \geq p \end{cases}$$

and for each $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F_n(x) \cos pxdx = 0.$$

So

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F_n(x) \sin pxdx \to \frac{1}{p^2}$$

and

$$\forall p \in \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad \int_0^\pi F_n(x) \cos pxdx \to 0.$$

Comparing these with (**1**) and (**2**) we see that

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \sin pxdx = \frac{1}{p^2} \text{ for } p = 1, 2, 3, ...$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \cos pxdx = 0 \text{ for } p = 0, 1, 2, ...$$

So the given series is the Fourier series of $f(x)$.

■

Example 15: Prove or disprove: The trigonometric series

$$\sum_n \frac{\sin nx}{n^2}$$

represents a Fourier series in $[-\pi, \pi]$.[3] **(2007.1i)**
SOLUTION: আগের অংকটাই। ■

Answers

4. $a_n = \begin{cases} \frac{-1}{2n^2} & \text{if } n \text{ odd} \\ 0 & \text{if } n > 0 \text{ even} \\ \frac{\pi^2}{16} & \text{if } n = 0 \end{cases}$. আর $b_n = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{4n}$. এবার $x = 0$ বসাও।

5. $f(x) = x - 1, g(x) \equiv 0$. **6.** **(1)** even function, **(2)** বলা যায় না, **(3)** even function, **(4)** even function, **(5)** odd function.

Index